普通高等教育“十一五”国家级规划教材专用辅导

高等数学

同步辅导

第六版　下册

主 编：同济大学数学系　彭 舟

- 教材内容归纳
- 重点难点剖析
- 典型例题解析
- 课本习题全解
- 考研真题精选

航空工业出版社

笃志图书

普通高等教育“十一五”国家级规划教材专用辅导

高等数学

同步辅导

第六版 下册

主 编：同济大学数学系 彭 舟

航空工业出版社
北京

内 容 提 要

本书是与同济大学数学系主编的《高等数学》第六版相配套的学习辅导用书,全书是根据全国工科院校高等数学教学大纲和研究生入学考试要求编写的。可供理、工、农、医(非数学专业)大学生学习高等数学时作为参考用书,也可供考研数学复习第一阶段使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导. 下/彭舟主编. —北京:航空工业出版社, 2004.8 (2008.7 重印)
ISBN 978-7-80183-419-5

Ⅰ.高… Ⅱ.彭… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 070804 号

高等数学同步辅导(下册)
Gaodeng Shuxue Tongbu Fudao (Xiace)
航空工业出版社出版发行
(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)
发行部电话: 010-64815615 010-64978486

北京山华苑印刷有限责任公司印刷 全国各地新华书店经售
2004 年 8 月第 1 版 2008 年 7 月第 5 次印刷
开本:787×960 1/16 印张: 41.25 字数: 880 千字
印数: 13001-27000 定价: 50.00 元(上、下册)

前　言

本书是同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)的指定配套参考用书,适合初次学习《高等数学》课程的大学生及准备报考硕士研究生的人员复习《高等数学》时使用。

由于近年来教学改革的实施,高等数学课时有所减少,对概念的深入探讨、知识点的融会贯通、课本知识的灵活运用无法在课堂上完成,同学们急切需要一本合适的高等数学辅导书。为了满足同学们的需求,北京大学数学科学学院、同济大学数学系根据多年的高等数学教学经验,听取广大学生的意见,联合编写了这本《高等数学同步辅导》。

全书分上下两册,内容体系编排完全按照同济大学第六版教材。本书主要有以下特点:

1. **重点难点剖析**:在每章开始给出了大纲对本章各知识点的不同程度的要求,使学生在学习中做到有的放矢。

2. **教材内容归纳**:知识内容表格网络化,更有利于同学提纲挈领,深刻地理解各部分内容之间的关系,从整体的角度掌握课本内容。

3. **典型例题解析**:例题既包括与基本概念有关的各种题型,又有综合多个知识点具有一定难度的综合例题,从基础到提高,适合各种水平学生的需要。

4. **课本习题全解**:给出了每节课后习题的全解,供学生作为解题参考。

5. **考研真题精选**:精选了有代表性的近年考研真题及解答放在每章的最后,让学生在第一遍学习时就对研究生入学考试的难度要求有初步认识。

《高等数学同步辅导(第六版)》(上、下册)有科学完整的体系,如果合理地使用本书,必将事半功倍。本书的出版,如果能对广大学生在高等数学的学习和复习中有所帮助,那就是对我们工作的最大肯定。

由于时间仓促和水平所限,书中的不足之处恳请广大读者和专家给予批评指正。

编　者

二〇〇八年一月

目　录

第八章　空间解析几何与向量代数

本章大纲要求

1. 熟练掌握向量的各种运算法则及几何意义，领会数量积、向量积、混合积的运算法则及几何意义

2. 理解向量坐标概念，会用向量坐标判断和表达向量之间的关系及计算有关问题，会计算两向量之间的夹角，判断两向量之间平行、垂直关系

3. 熟练掌握各种形式的平面方程和直线方程. 会判断面与面、线与线及线与面之间的平行、垂直、相交的关系

4. 会计算直线与直线、直线与平面、平面与平面之间的夹角，会求点到平面、点到直线的距离，能用平面束的方法解决直线与平面的各类问题

5. 知道柱面方程及旋转曲面的方程，了解常用二次曲面的标准方程及图形

6. 了解空间曲线的参数方程、一般方程及空间曲线在平面上投影的方程

本章知识结构图

- 空间解析几何与向量代数
  - 向量代数
    - 概念及其线性运算
    - 数量积　向量积　混合积
  - 空间解析几何
    - 曲面
      - 旋转曲面
      - 柱面
      - 二次曲面
    - 空间曲线
      - 空间曲线的方程
        - 一般式
        - 参数式
      - 空间曲线在坐标面上的投影
    - 平面
      - 平面方程
        - 点法式
        - 一般式
        - 截距式
        - 三点式
      - 两平面的夹角
      - 点到平面的距离
      - 平面束方程
    - 空间直线
      - 直线方程
        - 一般式
        - 对称式
        - 参数式
      - 两直线的夹角
      - 直线与平面的夹角

第一节　向量及其线性运算

一、基本内容

表 1－1　向量的概念及运算性质

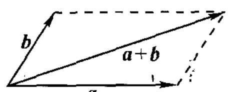
<table>
<tr><td>概念</td><td colspan="2">既有大小又有方向的量称为向量，记作 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots$ 以 A 为起点，B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为向量的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$，模等于1的向量称为单位向量，模为零的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 如果两个向量大小和方向都相等，称向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 如果两非零向量的方向相同或相反，就称这两个向量平行，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 如果把 $k(k\geqslant 3)$ 个向量起点放在同一个点，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，称这 k 个向量共面.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">加减法</td><td>平行四边形法则</td><td>

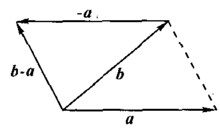
图 8－1


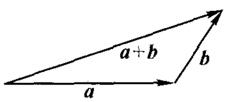
图 8－2</td></tr>
<tr><td>三角形法则</td><td>

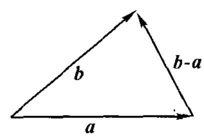
图 8－3


图 8－4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">向量与数的乘法</td><td colspan="2">向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 相反. 当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.</td></tr>
<tr><td colspan="2">设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.</td></tr>
</table>

表 1－2　向量在轴上的投影

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模乘以向量与轴夹角的余弦，即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$$

(2) 两个向量的和在轴 u 上的投影等于两个向量在该轴上的投影的和，即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2$$

(3) 向量与数的乘积在轴上的投影等于向量在轴上的投影与数的乘积，即

$$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$$

表 1－3　向量的坐标与运算

名称	概　念	坐标表示	性质与注解
向量	有向线段 $\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ $=\{x,y,z\}$	模：$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 幅角：α,β,γ 方向余弦：$\cos\alpha=\dfrac{x}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}$.
线性运算	λ,μ 为实数，$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ $\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\{\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2,\lambda z_1+\mu z_2\}$	(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 由平行四边形法则或三角形法则确定. (2)$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，$\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向，$\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反方向，$\lvert\lambda\boldsymbol{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\boldsymbol{a}\rvert$

表 1－4　空间两点间距离公式

空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离为 $d=\lvert M_1M_2\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

二、重点难点

1. 向量具有两个要素，大小和方向，与起点无关.

2. 由三角形法则知，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$ 等于将$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 首尾相接得到的由$\boldsymbol{a}_1$ 起点到$\boldsymbol{a}_n$ 终点的向量.

3. 注意方向角与方向余弦在解题中的应用. 向量 $\boldsymbol{r}$ 与 x,y,z 轴之间夹角分别记为 α,β,γ，则$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\dfrac{x}{\lvert\boldsymbol{r}\rvert},\dfrac{y}{\lvert\boldsymbol{r}\rvert},\dfrac{z}{\lvert\boldsymbol{r}\rvert}\right)$.

三、典型例题分析

例 1. 证明三角形两边中点的连线平行于第三边，且等于第三边的一半.

解　如图 8－5 所示，AB,AC 两边的中点分别为 D,E，则有

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$$

而$\overrightarrow{DA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

故　$\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

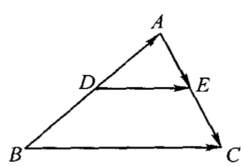


图 8－5

因而 $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$,且 $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$.

提示 利用向量的加减法来证明空间直线的几何关系.

例 2. 设$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC} = -2\boldsymbol{a} + 8\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD} = 3(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$,试证 A、B、D 三点共线.

证明 由于

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} &= (\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}) + (-2\boldsymbol{a} + 8\boldsymbol{b}) + 3(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \\ &= 2\boldsymbol{a} + 10\boldsymbol{b} = 2(\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}) = 2\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

故$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AB}$,即 A,B,D 三点共线.

提示 本题概括了证明三点共线的一般方法,即证明其中任意两点间连成的三条直线中有两条为平行直线.

例 3. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个单位向量,u 为任意轴,已知 $\boldsymbol{a}$ 与轴 u 的夹角为$\frac{\pi}{6}$,$\boldsymbol{b}$ 与轴 u 的夹角为$\frac{\pi}{3}$,$\boldsymbol{c}$ 与轴 u 的夹角为$\frac{\pi}{2}$,试求 $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}$ 在轴 u 上的投影.

解 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{d} = \mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} + 2\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b} + 3\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{c}$

而 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{c}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$,故

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{d} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot 0 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例 4. 设点 A 的坐标是$(15,8,z)$,$z < 0$,向量$\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴的夹角为$\frac{\pi}{6}$,求$\overrightarrow{OA}$ 的模及方向余弦.

解 由于 $\cos\alpha = \dfrac{15}{\sqrt{15^2 + 8^2 + z^2}} = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,故

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{15^2 + 8^2 + z^2} = 10\sqrt{3}, z = -\sqrt{11}$$

于是

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\beta = \frac{8}{10\sqrt{3}}, \cos\gamma = -\frac{\sqrt{11}}{10\sqrt{3}}.$$

提示 向量 a 的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 满足关系式 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,这在向量代数中是很常用的关系.

例 5. 试在 x 轴上求点 P,使它与点 $P_0(4,1,2)$ 的距离为$\sqrt{30}$.

解 由于 P 在 x 轴上,故设其坐标为$(x_0,0,0)$,于是

$$|P_0P| = \sqrt{(x_0 - 4)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{30}$$

解得,$x_0 = 9$ 或 $x_0 = -1$,故 P 点坐标为$(9,0,0)$ 或$(-1,0,0)$.

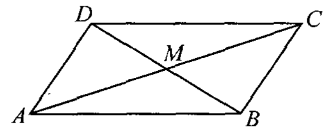
提示 要熟记空间两点间的距离公式.

四、课本习题全解

习题 8－1 解答

1. 解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 证明　如图,设在四边形 $ABCD$ 中,$AM=MC,BM=MD$.

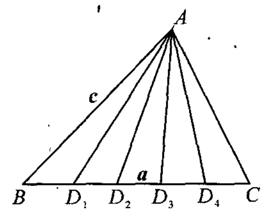


因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DC},$$

所以　$AB \mathrel{\underline{\parallel}} DC$,故四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

3. 解　如图,$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{D_1D_2}=\overrightarrow{D_2D_3}=\overrightarrow{D_3D_4}=\overrightarrow{D_4C}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{5}$,所以



$$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{D_2B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{D_4B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

4. 解　$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-0,-1-1,0-2\}=\{1,-2,-2\}$;

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2\{1,-2,-2\}=\{-2,4,4\}$.

5. 解　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=\sqrt{121}=11$.

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left\{\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11}\right\},$$

平行于 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量或为 $\boldsymbol{a}^0$,或为 $-\boldsymbol{a}^0$,即为 $\left\{\pm\dfrac{6}{11},\pm\dfrac{7}{11},\mp\dfrac{6}{11}\right\}$.

提示 求平行于向量的单位向量,也就是将向量单位化,要先求出向量的模,然后再用每个坐标除以向量的模.

6. 答　各点依次在第 Ⅳ,Ⅴ,Ⅷ,Ⅲ 卦限.

7. 答　在 xOy、yOz、zOx 坐标面上的点的坐标中有一个为零,依次是 $z=0,x=0$ 与 $y=0$;在 x、y、z 轴上点的坐标中有两个坐标为零,依次为 $y=z=0,x=z=0$,与 $x=y=0$. 题中四点依次在 xOy 面上,yOz 面上,x 轴上,y 轴上.

8. 解　(1) 关于坐标面对称点的坐标,只须将原坐标中的一个坐标改为相反数,使得两对称点的连线垂直于该坐标面. 点(a,b,c) 关于 xOy,yOz,zOx 面的对称点依次是:

$$(a,b,-c),(-a,b,c),(a,-b,c).$$

(2) 关于各坐标轴的对称点,可看成连续对两个坐标面施行了对称变换的结果,由(1) 知,这时须将原三个坐标中的两个改成相反数. 点(a,b,c) 关于 x、y、z 轴的对称点依次是

$$(a,-b,-c),(-a,b,-c),(-a,-b,c).$$

(3) 关于原点的对称点的坐标,则须把原坐标的三个数都改成相反数,(a,b,c) 关于原点的对称点的坐标是$(-a,-b,-c)$.

9. **解** 作坐标面的垂线,垂足在该坐标面上,因此对应的那个坐标为零,例如,过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 依次引 xOy、yOz、zOx 面垂线的垂足的坐标,依次是

$$(x_0,y_0,0),(0,y_0,z_0),(x_0,0,z_0).$$

而坐标轴上的点,有两个坐标为零.因此垂足在各坐标轴上,另两个坐标应为零.于是,过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 作 x、y、z 轴垂线的垂足,其坐标依次是

$$(x_0,0,0),(0,y_0,0),(0,0,z_0).$$

10. **答** 过点 P_0 且平行于 z 轴的直线上的点的坐标为 (x_0,y_0,z),即前两个坐标与 P_0 的坐标相同,而第三个坐标换成流动坐标 $z\in R$.

过点 P_0 而平行于 xOy 面的平面上的点,其坐标为 (x,y,z_0),即与 P_0 的第三个坐标相同,而前两个坐标应改换为流动坐标.

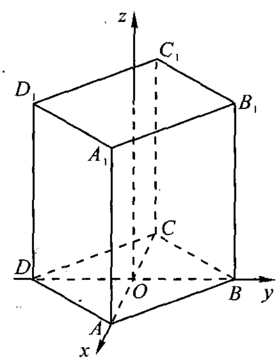
11. **解** 如右图,各顶点的坐标依次为:

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right),B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right),$$

$$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right),D\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right);$$

$$A_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right),B_1\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right),$$

$$C_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right),D_1\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right).$$



12. **解** 点 M 向各坐标轴作垂线的垂足依次是:

$$N_1(4,0,0),N_2(0,-3,0),N_3(0,0,5).$$

因此 M 到各坐标轴的距离依次是

$$d_x=|N_1M|=\sqrt{0+(-3)^2+5^2}=\sqrt{34};$$

$$d_y=|N_2M|=\sqrt{4^2+0+5^2}=\sqrt{41};$$

$$d_z=|N_3M|=\sqrt{4^2+(-3)^2+0}=5.$$

13. **解** 设该点为 $M(x,y,z)$,因为 $M\in yOz$,所以 $x=0$,该点为 $(0,y,z)$,而 $|MA|=|MB|$,

所以
$$(3-0)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4^2+(y+2)^2+(z+2)^2,$$
即得

$$3y+4z=-5;$$

同理,由 $|MA|=|MC|$,得

$$9+(y-1)^2+(z-2)^2=0+(y-5)^2+(z-1)^2,$$

$$4y-z=6.$$

两方程联立、解方程组,得 $y=1,z=-2$,所求点为 $(0,1,-2)$.

14. **证明** 因为

$$|AB|=\sqrt{(4-10)^2+(-1-1)^2+(9-6)^2}=\sqrt{49}=7,$$

$$|BC|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{98},$$

$$|AC|=\sqrt{(4-2)^2+(4-1)^2+(9-3)^2}=\sqrt{49}=|AB|,$$

又由 $98=49+49$,得

$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

提示 通过两点间距离公式求出三边的长度,然后通过定义来证明.

15. **解** $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(3-4)^2 + (0-\sqrt{2})^2 + (2-1)^2} = 2.$

设 α、β、γ 为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向角,则

$$\cos\alpha = \frac{3-4}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{0-\sqrt{2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma = \frac{2-1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = \frac{1}{2}.$$

从而
$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{3\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

16. **答** (1) 设该向量为 $\boldsymbol{a}$. 因为 $\cos\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$,故 $\boldsymbol{a} \perp Ox$,或 $\boldsymbol{a} \,/\!/\, yOz$ 面.

(2) $\because \cos\beta = 1, \therefore \beta = 0$,故 $\boldsymbol{a} \,/\!/\, Oy$ 轴且 $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴正向一致,或 $\boldsymbol{a} \perp xOz$ 面并与 y 轴正向一致.

(3) $\because \cos\alpha = \cos\beta = 0, \therefore \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$,故 $\boldsymbol{a} \,/\!/\, Oz$ 轴,或 $\boldsymbol{a} \perp xOy$ 面.

17. **解** $\mathrm{Prj}_u \boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}| \cos(\widehat{\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}}) = |\boldsymbol{r}| \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$

18. **解** 设 $A(x,y,z)$,则

$$\overrightarrow{AB} = \{2-x, -1-y, 7-z\}.$$

由题意,此向量在坐标轴上的投影依次为 4, −4, 7,所以

$$2-x = 4, -1-y = -4, 7-z = 7,$$
$$x = -2, y = 3, z = 0,$$

故 A 点的坐标为 $(-2,3,0)$.

19. **解** $\boldsymbol{a} = 4(3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}) + 3(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}) - (5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}) = 13\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}.$

$$\mathrm{Prj}_{ox} \boldsymbol{a} = 13,$$

而 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

第二节　数量积　向量积　* 混合积

一、基本内容

表 2—1　数量积　向量积　* 混合积

名称	定　义	记　号	坐标表示	性　质	备　注
数量积	两向量 a,b，其数量积为 $\|a\|\|b\|\cos(a,b)$	$a\cdot b$	设 $a=\{x_1,y_1,z_1\}$，$b=\{x_2,y_2,z_2\}$，则 $a\cdot b=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$	$a\cdot b=b\cdot a$ $(\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b)$ $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$	$a\perp b \Leftrightarrow a\cdot b=0$
向量积	两向量 a,b 的向量积为一向量，其模等于 $\|a\|\|b\|\sin(a,b)$，其方向垂直于 a,b 且 a,b 与该向量成右手系	$a\times b$	$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$	$a\times b=-(b\times a)$ $\lambda(a\times b)=(\lambda a)\times b=a\times(\lambda b)$ $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$	$a\parallel b \Leftrightarrow a\times b=0$
混* 合积	向量 a,b,c 的混合积定义成 $a\times b\cdot c$	$(a\times b)\cdot c$	$(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$	$(a\times b)\cdot c=(b\times c)\cdot a=(c\times a)\cdot b$ $(a\times b)\cdot c=-(b\times a)\cdot c=-(c\times b)\cdot a=-(a\times c)\cdot b$	a,b,c 共面 $\Leftrightarrow (a\times b)\cdot c=0$ $\|(a\times b)\cdot c\|$ 为以 a,b,c 为棱的平行六面体的体积

二、重点难点

1. 熟练掌握数量积、向量积的定义、运算性质，会应用它们来判断向量平行与垂直的关系：$a\perp b \Leftrightarrow a\cdot b=0$，$a\parallel b \Leftrightarrow a\times b=0$.

2. $c=a\times b$ 表示与 a,b 垂直，且使 a,b,c 成右手系的向量，它的大小 $|a\times b|$ 为以 a,b 为邻边的平行四边形的面积.

三、典型例题分析

例 1. 设 $\boldsymbol{a}=\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{3}{2}\boldsymbol{j}$，求以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形两对角线之间的夹角的余弦(不大于$\frac{\pi}{2}$ 的角).

解 先求出两对角线对应的向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$：

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})+(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{3}{2}\boldsymbol{j})=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})-(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{3}{2}\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

故 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 之间不大于$\frac{\pi}{2}$ 的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{d}|}=\frac{|2\times1+(-1)\times2+2\times2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{4}{9}.$$

提示 本题用的是求解两个向量夹角余弦的基本公式，即数量积与两个向量的模的乘积的比值.

例 2. 已知三角形三顶点为 $A(1,2,3)$，$B(2,3,4)$，$C(-1,3,2)$，求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

解 因为$\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,1,-1)$，故

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\-2&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}1&1\\-2&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}1&1\\-2&1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$$

所以 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+3^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

提示 本题是利用向量的向量积来求三角形的面积，这是一个基本公式，需要读者牢记.

例 3. 证明三角形三条高线相交于一点.

证明 如图 8－6 所示，设两高线 BE，CF 相交于 H，则$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$，从而$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，为证三高相交于一点，只须证 $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$，

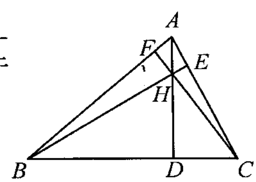


图 8－6

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CA},\quad \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH},\quad \overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}$$

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}&=-(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AH}\\&=-\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH})-\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CA})\\&=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=0\end{aligned}$$

所以$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AH}$.

例 4. 证明:若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

证明 由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$,得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\&=0\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

提示 要证明三向量共面,一般常用方法是证明三个向量的混合积为零.

四、课本习题全解

· 习题 8-2 解答

1. **解** (1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3$;

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}.$$

(2)$(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}=(-6\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\cdot(3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})=-6\times3+2\times6+4\times(-3)=-18$;

$$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\2&4&-2\end{vmatrix}=\{10,2,14\}.$$

(3)$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

2. **解** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{b}|^2=-1$,

同理 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-1,\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$,

相加得 $2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=-3$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{2}(-3)=-\dfrac{3}{2}$.

3. **解** 记该向量为 $\pm\boldsymbol{c}^0$,由 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,4,-1\},\overrightarrow{M_2M_3}=\{0,-2,2\}$,得

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&4&-1\\0&-2&2\end{vmatrix}=\{6,-4,-4\},$$

所以 $$\pm\boldsymbol{c}^0=\pm\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{\pm\{6,-4,-4\}}{\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}}=\left\{\frac{\pm3}{\sqrt{17}},\frac{\mp2}{\sqrt{17}},\frac{\mp2}{\sqrt{17}}\right\}.$$

4. **解** $W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\{0,0,-9.8\times100\}\cdot\{-2,3,-6\}=6\times980=5880(\mathrm{J})$.

5. **解** 两力矩分别为 $x_1|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta_1$ 与 $x_2|\boldsymbol{F}_2|\sin\theta_2$,要使杠杆保持平衡,须

$$x_1|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta_1-x_2|\boldsymbol{F}_2|\sin\theta_2=0.$$

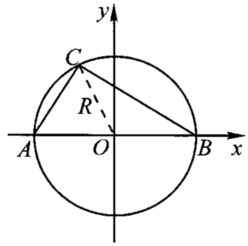
6. **解** $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{4\times2+(-3)\times2+4\times1}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\dfrac{6}{3}=2$.

7. **解** 因为 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\{3\lambda,5\lambda,-2\lambda\}+\{2\mu,\mu,4\mu\}=\{3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu\}$;
在 z 轴上取单位向量 $\boldsymbol{e}=\{0,0,1\}$,要使它与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 互相垂直,只须 $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}=0$,即

$$(3\lambda+2\mu)\times 0+(5\lambda+\mu)\times 0+(-2\lambda+4\mu)\times 1=0,$$

∴ $$-2\lambda+4\mu=0,\lambda=2\mu,$$

此即所求 λ 与 μ 的关系.



8. **证明**　如右图,AB 是直径,圆的半径为 R,在圆上任取一点 C,连接 AC、BC 与 OC.因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\\&=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO})\\&=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{AO}|^2=R^2-R^2=0,\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$,故直径 AB 所对的圆周角是直角.

提示　证明两个向量相互垂直,一般常通过两个向量的数量积为零来证明.

9. **解**　(1) $$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}&=(2+3+3)(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})-(2+6+0)(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\\&=8\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

(2) $$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\{3,-4,4\}\times\{2,-3,3\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

(3) $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&1\\1&-1&3\end{vmatrix}\cdot\{1,-2,0\}=\{-8,-5,1\}\cdot\{1,-2,0\}=-8+10+0=2.$$

10. **解**　$$\begin{aligned}S_{\triangle AOB}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\sin(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|\\&=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&3\\0&1&3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{9+9+1}=\frac{\sqrt{19}}{2}.\end{aligned}$$

提示　以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

*11. **证明**　$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_x&b_y&b_z\\a_x&a_y&a_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}\\&=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=-\begin{vmatrix}c_x&c_y&c_z\\b_x&b_y&b_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

提示　向量的混合积还可以写成如下形式

$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\boldsymbol{\alpha}$　($\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的夹角)且 $P_{ij_f}\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\boldsymbol{\alpha}$.

12. **证明**　记 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$,则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),$$

∴ $$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|,$$