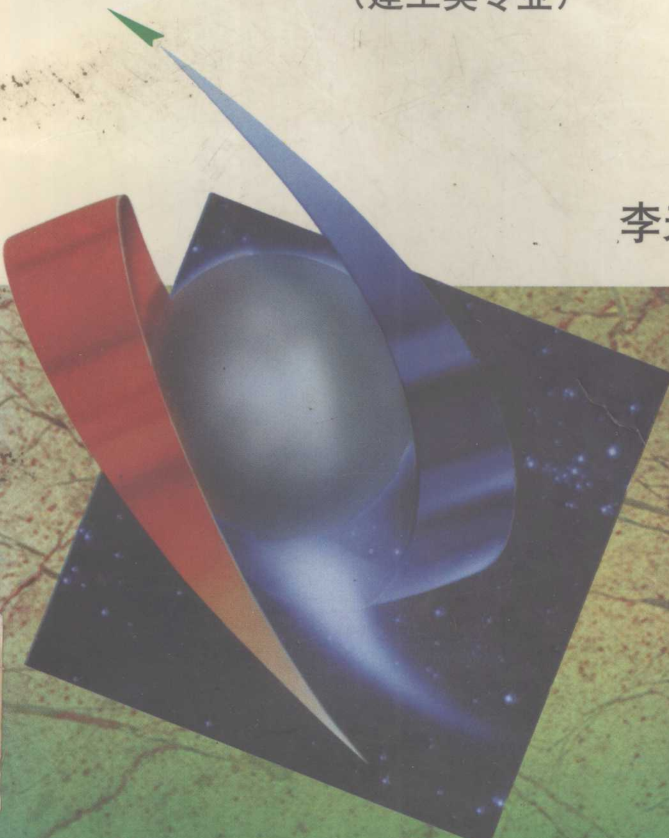
高等学校专科教材

高等数学

（建工类专业）



李天然　主编

中国铁道出版社

高等学校专科教材

高 等 数 学

（建工类专业）

主　编　李天然

副主编　张新宇

主　审　周叔子

中 国 铁 道 出 版 社

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本教材是"湖南省普通高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划"课题的研究成果．具有以下特点：突出建工类专业特色；融入数学建模思想；精减一些烦琐的证明和难题，突出应用．

全书保留了高等数学课程的主要内容，包括：函数的极限、导数与微分、导数的应用，曲率、不定积分、定积分及其应用，微分方程，空间解析几何与向量代数，多元函数的微分学，多元函数积分学，无穷级数，数值算法．

本书是高等专科学校房屋建筑、道路桥梁、给水排水、规划设计、房地产管理等专业教材，也可作为相关专业自考、夜大、函大教材．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/李天然主编．—北京：中国铁道出版社，1998.6
高等学校专科教材
ISBN 7-113-02994-9

Ⅰ．高… Ⅱ．李… Ⅲ．高等数学-高等学校-教材 Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 14069 号

书　　名：高等学校专科教材
高等数学(建工类专业)
著作责任者：李天然　主编
出版·发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
责 任 编 辑：李小军
封 面 设 计：陈东山
印　　刷：中国铁道出版社印刷厂
开　　本：850×1168　1/32　印张：16.125 字数：429 千
版　　本：1998 年 8 月第 1 版　1998 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1—4000 册
书　　号：ISBN7-113-02994-9/O·55
定　　价：27.00 元

前　言

本书是“湖南省普通高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”课程的研究成果之一，有较多新意．

自1986年始，编者就开始探讨建工类各专业的数学课程体系与教学内容，通过阅读分析高等教育专科房屋建筑、道路桥梁、给水排水、城市规划、房地产管理等专业的全部专业基础课和专业课程，统计了这些课程中高等数学各部分知识出现的频率，编写了讲义，并试讲多年，取得良好的教学效果．1990年获湖南省普通高等学校教学成果二等奖．

本书具有如下特点：

1．遵循“必需，够用为度”的原则

我们认为高等学校专科培养的是工艺型工程师、生产第一线的技术人员，做为基础课的高等数学，应当以应用为目的，在选择内容时应以必需，够用为度．因此，必须与专业相结合．不考虑相关专业的要求，这个“度”是难以掌握的．我们奉献给读者的，就是适应建工类各专业的要求编写的高等学校专科教材．

2．精减一些烦琐的证明和难题，突出应用

根据我们的统计，建工类各专业对高等数学的要求宽而浅，所以我们基本保留了高等数学传统教材的内容，但精减了一些烦琐的证明和难题，并对侧重点作了一些调整．例如第三章，我们突出了泰勒公式，从这个公式出发，推演出微分中值定理、洛必达法则及函数一系列性质的判别法．

3．突出专业特色

本书编入了大量具有建工专业背景的例题、习题，其中有些题是十分精彩的．这需要高等数学教师能了解相关专业的一些基本知识，所以本教材可以促进理科教师向工程专业靠拢，这也是当前

提高教师素质所必要的.

4. **融入数学建模思想**

随着计算机技术的普及与发展,数值计算与数学建模能力在工程应用上日益重要,所以本书介绍了数学建模的思想方法,并在十一章介绍了几种数值计算的方法、程序和 Mathematica 数学软件.

本书是湖南城建高等专科学校数学教研室十多年来教研成果的结晶,李天然副教授主编,张新宇副教授副主编.参编人员分工如下:李天然编写第三、六、九、十一章,张新宇编写第一、二、十章,龙韬编写第五、八章,龚卫明编写第四章,李俊峰编写第七章,肖劲松编写附录,并验算了部分习题的答案.此外,金庆华副教授、田罗生副教授、彭德权副教授也参加了全书结构的讨论.

本书由湖南大学应用数学系周叔子教授主审.他仔细审阅了本书全部原稿,并提出了一些有益意见和建议。在此我们表示衷心的感谢!

由于水平有限,书中可能有不当之处,敬请读者指正.

编　者

1998 年 2 月

本书所使用的缩写记号

自然数集合：　$\mathbf{N}$

整数集合：　$\mathbf{Z}$

有理数集合：　$\mathbf{Q}$

实数集合：　$\mathbf{R}$

复数集合：　$\mathbf{C}$

任意：　$\forall$

存在：　$\exists$

定义(规定)左边等于右边：　$\xlongequal{\text{def}}$

求和号 $\sum\limits_{i=1}^{n}$：　$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \xlongequal{\text{def}} x_1+x_2+\cdots+x_n$

连乘号 $\prod\limits_{i=1}^{n}$：　$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \xlongequal{\text{def}} x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$

x_0 的 δ 邻域：　$U(x_0,\delta) \xlongequal{\text{def}} (x_0-\delta, x_0+\delta)$

x_0 的去心 δ 邻域：$U(\hat{x}_0,\delta) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid 0<|x-x_0|<\delta, x\in\mathbf{R}\}$

函数 $f(x)$ 的定义域：$D(f)$

目　录

第一章 函数的极限

本书的主要内容是一元和多元函数微积分．它的研究对象是函数，研究方法是运用极限来研究变量间的相互依赖关系．这是它与初等数学的主要区别．值得指出的是，极限的思想和方法是贯穿整个微积分学的一条红线．

微积分是近代数学的基础，是学习自然科学和工程技术的有力工具，也是培养和提高大学生的数学素质的必修内容．

本课程将在中学数学的函数、实数及数列极限等知识的基础上逐步展开．

本章首先介绍初等函数的概念，然后讨论函数的极限与连续性，它们是整个微积分学的基础．

第一节 初 等 函 数

为了研究的方便，首先对我们的研究对象——函数进行科学分类．为此，需要挑选出少数最基本、最简单又最常用的函数，作为“基本初等函数”，它们是构成其他复杂函数的最基本的单元．然后建立一些构造新函数的方法，就可利用基本初等函数造出更广泛的一类函数，即所谓的“初等函数”．

一、初 等 函 数

1．基本初等函数

中学数学中研究过的下列六种函数称为基本初等函数：

(1)$y=C$ （C 为常数）；

(2)幂函数：$y=x^{\mu}$ （μ 为常数）；

(3)指数函数：$y=a^{x}$ （$0<a\neq1$）；

(4)对数函数:$y=\log_a x \quad (0<a\neq 1)$;

(5)三角函数①:$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$,

$y=\sec x, y=\csc x$;

(6)反三角函数:$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$,

$y=\text{arccot}\, x$.

由基本初等函数通过加、减、乘、除等运算可以构造出新函数.下面介绍另一种重要的构造新函数的方法.

2. 函数的复合

有些复杂函数是由若干个较简单的函数通过代入消元的方法而得到的.例如,土建工程中要研究振动问题.简谐振动的位移 y 与时间 t 的函数关系为

$$y=A\sin(\omega t+\varphi)$$

其中,A 为振幅,φ 为初相位.它就是由函数 $y=\sin u$ 与常数 A 的乘积函数 $y=A\sin u$ 和一次函数 $u=\omega t+\varphi$ 通过代入消元而得到的.这种构造新函数的方法,叫作函数的复合.

定义 1　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 M,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D,值域为 G,且 $M\cap G\neq\varnothing$(空集),则函数 $y=f(\varphi(x))$ 叫作函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 的复合函数.u 叫作中间变量.得到复合函数的过程,叫作函数的复合.

复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 是函数的函数,它的定义域 $F=\{x\mid \varphi(x)\in M\cap G, x\in D\}$.

例 1　求函数 $y=f(u)=\sqrt{1-u^2}$ 和函数 $u=\varphi(x)=\sin x$ 的复合函数 $y=f(\varphi(x))$.

解　代入消元得

$$y=f(\varphi(x))=\sqrt{1-u^2}\,\big|_{u=\varphi(x)}=\sqrt{1-\varphi^2(x)}$$

$$=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$$

定义域:$D=\{x\mid \sin x\in[-1,1]\cap[-1,1], x\in(-\infty,+\infty)\}$

---

① 三角函数与反三角函数的自变量,一律以弧度为单位.

$=\{x\mid \sin x\in[-1,1]\}=(-\infty,+\infty)$

注意：并非任意两个函数都能复合．例如，$y=f(x)=\sqrt{x-2}$，$x=\varphi(t)=\sin t$ 就是如此．

例2　设 $f(x)=\sqrt{x}$，$\varphi(x)=1-x^2$，求复合函数 $f(\varphi(x))$ 和 $\varphi(f(x))$．

解　注意：函数是对应规律 f、φ，它与自变量和因变量用什么字母表示无关．所以，求 $f(\varphi(x))$ 就是求 $y=f(u)=\sqrt{u}$ 与 $u=\varphi(x)=1-x^2$ 的复合函数，故

$$f(\varphi(x))=\sqrt{\varphi(x)}=\sqrt{1-x^2}$$

求 $\varphi(f(x))$ 就是求 $y=\varphi(v)=1-v^2$ 与 $v=f(x)=\sqrt{x}$ 的复合函数，所以 $\varphi(f(x))=1-f^2(x)=1-(\sqrt{x})^2=1-x$

$f(\varphi(x))$ 的定义域 $F_1=\{x\mid 1-x^2\in[0,+\infty)\}=[-1,1]$

$\varphi(f(x))$ 的定义域 $F_2=\{x\mid \sqrt{x}\in(-\infty,+\infty)\}=[0,\infty)$

反之，我们也可以把一个复杂的函数分解成若干个简单函数，使前者恰好由后者复合而成．我们称这一过程为复合函数的分解．

例3　分解下列复合函数：

(1) $y=(3x+5)^{10}$

(2) $y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ $(0<a\neq 1)$

解　(1) $y=u^{10}$，　$u=3x+5$

(2) $y=\sqrt{u}$，　$u=\log_a v$，　$v=\sin x+2^x$

求几个函数的复合函数和复合函数的分解是两种正好相反的函数运算过程．我们不把复合函数当作一个函数类型，而是看作一种函数运算或构造新函数的方法．

3. 初等函数

定义2　**由有限个基本初等函数通过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的且能用一个式子表示的函数叫作初等函数．不是初等函数的函数统称为非初等函数．**

本课程所研究的函数,大多是初等函数,如,$y=x^3+\cos5x$,$y=\dfrac{3x+\sin x^2}{1+\cos x}$,$y=x+\ln(x+1)$等等.这里"ln"是以 e 为底的对数(叫自然对数)的记号.常数 e=2.7 1828 1828…是无理数,它的定义将在本章第五节中介绍.下面介绍一种在工程技术中常用的初等函数.

4. 双曲函数

定义 3　双曲正弦函数:$\mathrm{sh}x \overset{\text{def}}{=\!=} \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

双曲余弦函数:$\mathrm{ch}x \overset{\text{def}}{=\!=} \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切函数:$\mathrm{th}x \overset{\text{def}}{=\!=} \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

显然,它们的定义域都是$(-\infty,+\infty)$.双曲正弦、双曲余弦函数图像如图 1-1所示.

双曲函数的性质和三角函数有相似之处,也有不同点.由定义 3 可直接验证:

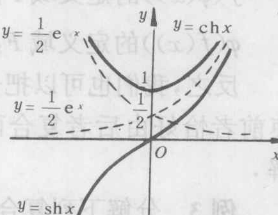


图 1-1

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$$
$$\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$$
$$\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\ \mathrm{ch}x$$
$$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\ \mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\ \mathrm{sh}y$$
$$\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\ \mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\ \mathrm{sh}y$$

又曲线$\begin{cases}x=\mathrm{ch}t\\y=\mathrm{sh}t\end{cases}$是双曲线,所以上述函数冠以"双曲三角"的名称,简称**双曲函数**.

双曲三角函数在工程技术中常有应用.例如,有一种拱桥的拱轴线方程为

$$y=\frac{q_0}{r}\cdot\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{r}{H}}\cdot x-1\right)\quad(q_0,r,H\text{ 为常数})$$

它是用双曲余弦复合函数构成的初等函数.它表示的曲线称为列格氏悬链线.某些机械运输机的传送带轨道曲线也采用悬链

线．

双曲函数的反函数记为：

反双曲正弦：$y=\operatorname{arsh}x$

反双曲余弦：$y=\operatorname{arch}x$

反双曲正切：$y=\operatorname{arth}x$

其中，反双曲余弦是双值函数，$\operatorname{arch}x$ 应理解为是取正值的一支，称为主值支．

反双曲函数都可用自然对数来表示：

$$y=\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$y=\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\quad x\in[1,+\infty)$$

$$y=\operatorname{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad x\in(-1,1)$$

推导过程及性质从略．

二、分 段 函 数

在微积分的长期发展过程中，最初曾有不少人认为，任何函数都可用解析式表示，而且在定义域内处处都有相同的解析表达式．到了 18 世纪后期，在对某些实际问题的研究中，出现了在定义域的不同部分必须用不同的解析式表示的函数，称为**分段函数**．它是非初等函数，有广泛的应用．

例 4　$$y=f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{当}-1<x<1\\ 2 & \text{当 } x=1\\ 3x^2 & \text{当 } 1<x<2\end{cases}$$

这里应看作是一个函数，它的定义域为：

$$D(f)=(-1,1)\cup\{1\}\cup(1,2)=(-1,2)$$

如果令 $f_1(x)=x+1$ （当$-1<x<1$），$f_2(x)=2$ （当 $x=1$），$f_3(x)=3x^2$ （当 $1<x<2$），则我们可以说：

$y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的限制是 $f_1(x)$，在 $\{1\}$ 上的限制是 $f_2(x)$，在 $(1,2)$ 上的限制是 $f_3(x)$，而 $f_i(x)$ $(i=1,2,3)$ 在 $(-1,2)$ 上的扩张是 $f(x)$．

例 5 在生存分析中研究寿命时用到的函数

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x\leqslant 0\end{cases}$$

也是分段函数．

例 6 符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x=0\\ -1 & \text{当 } x<0\end{cases}$ 是分段函数．

取整函数 $y=[x]$ 也是分段函数，请读者写出它的分段解析表示式，并画出这两个函数的图像．

三、函数的若干简单性质

为了以后的需要，在本节之末，我们略为提及函数的几种简单性质，供读者复习参考之用．

1. 函数的奇偶性

定义 4 设有函数 $y=f(x)$，

(1)若对任意的 $x\in D(f)$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数．

(2)若对任意的 $x\in D(f)$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数．

显然，对于偶函数 $f(x)$，若点 $P(x,f(x))$ 在它的图像上，则点 P 关于 y 轴的对称点 $P'(-x,f(x))$ 也在它的图像上，所以偶函数的图像关于 y 轴对称．同理，奇函数的图像关于原点对称．

例 7 判定函数 $\operatorname{sh}x$ 和 $\operatorname{ch}x$ 的奇偶性．

解 $\operatorname{sh}x$ 的定义域 $D(\operatorname{sh})=(-\infty,+\infty)$，任取 $x\in D(\operatorname{sh})$，有

$$\operatorname{sh}(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-(-x)}}{2}=-\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}=-\operatorname{sh}x$$

所以 $\operatorname{sh}x$ 是奇函数．

任取 $x\in D(\operatorname{ch})=(-\infty,+\infty)$，有

$$\operatorname{ch}(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-(-x)}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x$$

所以 $\mathrm{ch}x$ 是偶函数．

要注意，存在非奇非偶的函数，例如 $y=f(x)=x+4$ 就是一例．

2. 函数的周期性

定义 5　设有函数 $y=f(x)$，$D(f)=(-\infty,+\infty)$，若存在常数 $l>0$，使得对任意的 $x\in D(f)$ 恒有 $f(x+l)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数；满足上述等式的最小正数 l，称为 $f(x)$ 的周期．

例如，$y=\sin x$ 和 $y=\sin(\omega x)$ $(\omega>0)$ 都是周期函数，它们的周期分别为 2π 和 $\dfrac{2\pi}{\omega}$．

3. 函数的单调性

定义 6　设函数 $y=f(x)$ 对任意区间 I 内的任意两个值 $x_1<x_2$ 有

(1) $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加（或单调递增）的；

(2) $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少（或单调递减）的．

4. 函数的有界性

定义 7　设函数 $y=f(x)$ 在 $(a,b)\subset D(f)$ 内有定义．若存在正数 M，对于任意的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的．否则，称 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界．

例如，因为对 $\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立，所以函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的．不难判定，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是无界的，但在 $(1,+\infty)$ 或 $[1,+\infty)$ 上都是有界的．

各基本初等函数的上述简单性质，在中学数学中已经学过，在此不再赘述．

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^4-1}$

(2) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{当 } x\leqslant 0\\ 2 & \text{当 } 0<x<1\\ x & \text{当 } 1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}3x & \text{当 } -2\leqslant x<0\\ -1 & \text{当 } x\geqslant 1\end{cases}$

(5) $f(x)=\sqrt{\sin x-1}$

(6) $y=\sqrt{\tan^2 x-1}$

2. 下列各对函数中，哪些是同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}, g(x)=x-1$

(2) $f(x)=\ln x^3, g(x)=3\ln x$

(3) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=|x|$

(4) $f(x)=\sin 2x+1, g(t)=\sin 2t+1$

3. 解下列各题：

(1) 已知 $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{当 } -1\leqslant x<0\\ x^2-1 & \text{当 } 0\leqslant x<1\end{cases}$，求 $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f(0)$；

(2) 已知 $f(x)=x-1$，求 $f(a-b)$，$f(x^2)$，$f(f(x))$．

4. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，$f(1)=f(2)=0$，$f(0)=1$，求 $f(-1)$．

5. 判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\sin x+x^3$　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$