数学小丛书

1

从杨辉三角谈起

华罗庚

科学出版社
www.sciencep.com

数学小丛书 1

从杨辉三角谈起

华 罗 庚

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

杨辉是我国宋朝时候的数学家．在他著的《详解九章算法》一书中，画了一张表示二项式展开后的系数构成的三角图形，称做“开方作法本源”，现在简称为“杨辉三角”．本书从分析杨辉三角的基本性质谈起，讨论二项式定理、开方和多种级数，最后以精确估计一个无穷级数的和的值为例，告诉读者近似计算的一种方法．

图书在版编目(CIP)数据

从杨辉三角谈起/华罗庚．—北京：科学出版社，2002
(数学小丛书)
ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ.从…　Ⅱ.华…　Ⅲ.数学-普及读物　Ⅳ.O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 010167 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2002年5月第 一 版　开本:787×960 1/32
2004年2月第二次印刷　印张:2 3/4 插页:1
印数:5 001—8 000　字数:38 000

全套书定价: 99.00 元(共 18 册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

馬克思说：「一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步」。恩格斯说：「要辯证而又唯物地了解自然，就必須熟悉数学」。在科教兴国，振兴中华的今天，向全社会普及数学，实在是一件刻不容缓的大事。

数学小丛書是由我国一些著名数学家撰写的一批数学普及读物精品。几十年来，我国几代科技人员中，不少人都曾得益于这套丛书。我衷心地祝賀数学小丛書的重版与補充，并预祝它取得更大的成功。

王元 二〇〇〇年四月

出版说明

1956年,为了向青少年传播数学知识,科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛,出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》.在20世纪60年代初,这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作,被北京市数学会编成小丛书,相继由不同的出版社出版,并多次重印.

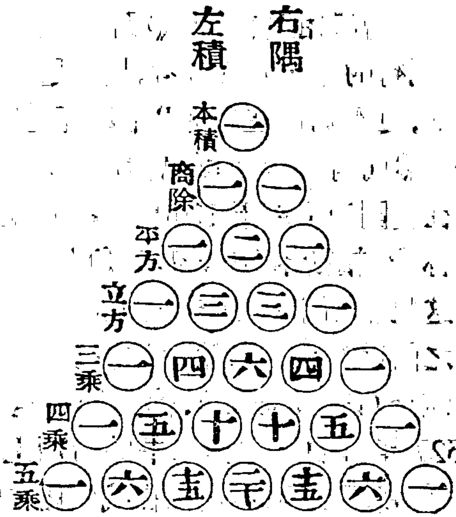
由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品,曾激发一代青少年学习数学的兴趣.书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想,促进了无数中学生在求学的道路上健康成长.当年这套小丛书的许多读者,现在已经成为学有所成的科学技术工作者,国家建设的栋梁之才.当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动,现在已经得到蓬勃的发展.我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来,历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算 π 之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经 300 多年终于在 20 世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

写在前面



左衺乃積數。右衺乃隅算。中藏者皆廉。以廉乘商方。命實而除之。

上面的图形,称为"杨辉三角".杨辉三角并不是杨辉发明的,原来的名字也不是"三角",而是"开方作法本源";后来也有人称为"乘方求廉图".这些名称实在太古奥了些,所以我们简称之为"三角".

杨辉是我国宋朝时候的数学家,他在公元1261年著了一本名为《详解九章算法》的书,里面画了这样一张图,并且说这个方法出于《释锁算书》,贾宪曾经用过它. 但《释锁算书》早已失传,这书刊行的年代无从查考,是不是贾宪所著也不可知,更不知道在贾宪以前是否已经有这个方法. 然而有一点是可以肯定的,这一图形的发现在我国当不迟于1200年左右. 在欧洲,这图形称为"帕斯卡(Pascal)三角". 因为一般都认为这是帕斯卡在1654年发明的. 其实在帕斯卡之前已有许多人论及过,最早的是德国人阿批纳斯(P. Apianus),他曾经把这个图形刻在1527年著的一本算术书的封面上. 可是无论怎样,杨辉三角的发现,在我国比在欧洲至少要早300年光景.

这本小册子是为中国数学会创办数学竞赛而作的,其中一部分曾经在中国数学会北京分会和天津分会举办的数学通俗讲演会上讲过. 它的目的是给中学同学们介绍一些数学知识,可以充当中学生的课外读物. 因此,我们既不

钻进考证的领域，为这一图形的历史多费笔墨，也不只是限于古代的有关杨辉三角的知识，而是从我国古代的这一优秀创造谈起，讲一些和这图形有关的数学知识. 由于读者对象主要是中学生，我们不得不把论述的范围给与适度的限制.

我必须在此感谢潘一民同志，本书的绝大部分是他根据我的非常简略的提纲写出的.

华 罗 庚

1956 年 6 月序于清华园

目　　录

1 杨辉三角的基本性质

我们先来考察一下**杨辉三角**里面数字排列的规则. 一般的杨辉三角是如下的图形:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

……………………………………

第 n 行 . $1, C_{n-1}^{1}, \cdots, C_{n-1}^{r-1}, C_{n-1}^{r}, \cdots, C_{n-1}^{n-2}, 1$

第 $n+1$ 行 $1, C_{n}^{1}, C_{n}^{2}, \cdots, C_{n}^{r}, \cdots, C_{n}^{n-1}, 1$

……………………………………

这里,记号 C_n^r 是用来表示下面的数:

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

而记号 $n!$ (同样 $r!$ 和 $(n-r)!$),我们知道它是代表从 1 到 n 的连乘积 $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$,称为 n 的**阶乘**. 学过排列组合的读者还可以知道,C_n^r 也就是表示从 n 件东西中取出 r 件东西的组合数.

从上面的图形中我们能看出什么呢? 就已经写出的一些数目字来看,很容易发现这个三角形的两条斜边都是由数字 1 组成的,而其余的数都等于它肩上的两个数相加. 例如 $2=1+1$, $3=1+2$, $4=1+3$, $6=3+3$, $\cdots$. 其实杨辉三角正就是按照这个规则作成的. 在一般的情形,因为

$$\begin{aligned}
C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^{r} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\ (n-r)!} \\
&\quad + \frac{(n-1)!}{r!\ (n-1-r)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{r!\ (n-r)!}[r+(n-r)] \\
&= \frac{n!}{r!\ (n-r)!} = C_n^r,
\end{aligned}$$

这说明了,上图中的任一数 C_n^r 等于它肩上的两数 C_{n-1}^{r-1} 和 C_{n-1}^{r} 的和.

为了方便起见，我们令本来没有意义的记号 C_n^0 和 C_{n-1}^n 分别等于 1 和 0，这样就可以把刚才得到的结果写成关系式：

$$\boxed{C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^{r}=C_n^r \quad (r=1,\ 2,\ \cdots,n),}$$

而称它为**杨辉恒等式**．这是杨辉三角最基本的性质．

对于杨辉三角的构成，还可以有一种有趣的看法．

如图 1，在一块倾斜的木板上钉上一些正六角形的小木块，在它们中间留下一些通道，从上部的漏斗直通到下部的长方框子．把小弹子倒在漏斗里，它首先会通过中间的一个通道落

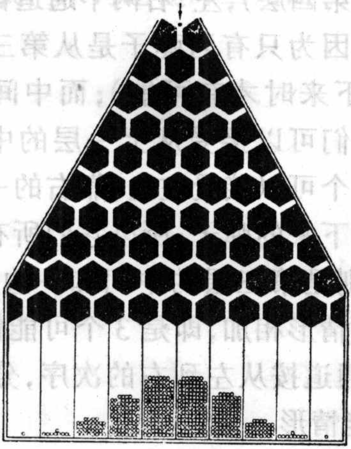


图 1

到第二层六角板上面，以后，落到第二层中间一个六角板的左边或右边的两个竖直通道里去．再以后，它又会落到下一层的三个竖直通道之一里面去．这时，如果要弹子落在最左边的通道里，那么它一定要是从上一层的左边通道里落下来的才行(1个可能情形)；同样，如果要它落在最右边的通道里，它也非要从上一层的右边通道里落下来不可(1个可能情形)；至于要它落在中间的通道里，那就无论它是从上一层的左边或右边落下来的都成(2个可能情形)．

这样一来，弹子落在第三层(有几个竖直通道就算第几层)的通道里，按左、中、右的次序，分别有1,2,1个可能情形．不难看出，在再下面的一层(第四层)，左、右两个通道都只有1个可能情形(因为只有当弹子是从第三层的左边或右边落下来时才有可能)；而中间的两个通道，由于它们可以接受从上一层的中间和一边(靠左的一个可以接受左边，靠右的一个可以接受右边)掉下来的弹子，所以它们所有的可能情形应该分别是第三层的中间和一边(左边或右边)的可能情形相加，即是3个可能情形．因此第四层的通道按从左到右的次序，分别有1,3,3,1个可能情形．

照同样的理由类推下去，我们很容易发现一个事实，就是任何一层的左右两边的通道都

只有一个可能情形，而其他任一个通道的可能情形，等于它左右肩上两个通道的可能情形相加. 这正是杨辉三角组成的规则. 于是我们知道，第 $n+1$ 层通道从左到右，分别有 $1, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^{n-1}, 1$ 个可能情形.

我们还可以这样来看上面的结论：如果在倾斜板上做了 $n+1$ 层通道；从顶上漏斗里放下 $1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+1$ 颗弹子，让它们自由地落下，掉在下面的 $n+1$ 个长方框里. 那么分配在各个框子中的弹子的正常数目（按照可能情形来计算），正好是杨辉三角的第 $n+1$ 行. 注意，这是指“可能性”而不是绝对如此. 这种现象称为概率现象.

以下我们来讨论杨辉三角的一些应用.

2 二项式定理

和杨辉三角有最直接联系的是**二项式定理**. 学过初中代数的人都知道:

$$(a+b)^1=a+b,$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

…………

这里,$(a+b)^3$ 展开后的系数 1,3,3,1 就是杨辉三角第四行的数字. 不难算出$(a+b)^6$ 的系数是 1,6,15,20,15,6,1,即杨辉三角第七行的数字. 所以杨辉三角可以看做是二项式的乘方经过分离系数法后列出的表. 实际上,我们可以证明这样的事实:一般地说,$(a+b)^n$ 的展开式的系数就是杨辉三角中第 $n+1$ 行的数字

$$1, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^r, \cdots, C_n^{n-1}, 1,$$

即

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r$$

$$+ \cdots + b^n$$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots$$

$$+ C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + b^n.$$

这便是有名的二项式定理.

要证明这个定理并不难，我们可以采用一个在各门数学中都被广泛地应用到的方法——**数学归纳法**. 数学归纳法的用途是它可以推断某些在一系列的特殊情形下已经成立了的数学命题，在一般的情形是不是也真确. 它的原理是这样的：

假如有一个数学命题，合于下面两个条件：(1)这个命题对 $n=1$ 是真确的；(2)如设这个命题对任一正整数 $n=k-1$ 为真确的，就可以推出它对于 $n=k$ 也真确. 那么这个命题对于所有的正整数 n 都是真确的.

事实上，如果不是这样，就是说这个命题并非对于所有的正整数 n 都是真确的，那么我们