人教新课标版

学练创

轻松学习　快乐练习　探究创新

八年级数学 下

总主编/刘文全

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

人教新课标版

Xue Lian Chuang

学练创

轻松学习　快乐练习　探究创新

八年级数学 下

总主编／刘文全
学科主编／汪四友
本册主编／姜红松　万怀生
编写者（排名不分先后）／霍世详　姜红松
王洪贵　杨春华　石春祥　何祥俊
明文静　谷万穗　靳全有　任广富
林　灿　方守恒　华秋实　冯瑞祥
欧阳欣　张育林　段　炜　秦国基
汪四友　付耀名　崔志浩　万怀生
熊新华　蔡振国

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

（鄂）新登字 02 号

图书在版编目（CIP）数据

学练创八年级数学（人教版）下/刘文全主编. —武汉：湖北教育出版社，2008.1

ISBN 978-7-5351-5003-5

Ⅰ. 学…　Ⅱ. 刘…　Ⅲ. 数学课-初中-教学参考资料
Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 173362 号

出版　发行：湖北教育出版社　武汉市青年路 277 号
网　址：http://www.hbedup.com　邮编：430015　电话：027-83619605
经　销：新　华　书　店
印　刷：枝江金汇纸塑包装有限公司印刷　（443200·枝江市马家店石碑山路）
开　本：880mm×1230mm　1/32　8.75 印张
版　次：2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
字　数：309 千字　印数：1-7 000

ISBN 978-7-5351-5003-5　定价：13.00 元

寄读者朋友

亲爱的读者朋友：我是一部名副其实的集“学”“练”“创”为一身的系列丛书！脱胎换骨后的我，是依据《全日制义务教育课程标准》、《义务教育课程标准实验教科书》和《教师教学用书》打造的。你看到的我饱经风霜，经过了策划论证、专家研讨、读者访谈、实验反馈等一系列严格的历练，现在以更全面体现新课标的理念、反映课程改革的精神、贴紧学习实际的面貌与你见面，因此，毋庸质疑，我更具有科学性、实用性和权威性。

我的特点鲜明，现列出以下三点：

其一，传授方法，启迪思维——是破译科学思维方法的秘码

查理德·费思曼说过，“科学是一种方法”，因此，学习和运用科学知识的核心是方法，而方法的核心是思维方法，尤其是超常规思维方法，它是知识转化为创造的必经之路。我突出思维方法的训导，所开辟的“方法特快专递（方法快递）”专门用来引导你调整思维视角，扩大思维范围，寻求变异的思路和方法，做到触类旁通，举一反三。

其二，诠释课标，演绎时尚——是揭开新课标神秘面纱的秘籍

新课标目标设计中，我认为“过程和方法”是一切的根本。因此我注重“过程和方法”的目标指导，重视知识和方法的实际运用，尤其是提供了许多常见的自然现象和当前社会生活中诸多鲜活的情景材料，让你去探究，不仅可以激发你的学习兴趣，而且可以实实在在地培养你的创新精神和实践能力。

其三，完善功能，破解难点——是提高学习成绩的秘方

“知识——方法——能力”是我身体的三维架构：“知识全屏显示（知识小屋）”显示全方位知识内容和结构，“方法特快专递（方法快递）”传递思考并解答问题的技巧及风险规避的方法，“智能自动升级（能力展示）”提供从“双基”训练到考试竞赛的升级平台。不仅如此，语文学科的综合性实践活动、口语交际、作文（习作），数理化学科的考点等你特别关注的重点或疑难问题，都辟有专栏做了详尽、深入的点拨。

握着我的手，“学练创”无忧！我一定会不负众望，在你学习和人生发展道路上发挥魔力，助你走向辉煌！

你的朋友《学练创》

2007 年 11 月

目 录

第十六章

分　式

16.1　分　式

学前导思

1. 请你仔细观察下列代数式：$7,\frac{2}{3},x,\frac{1}{y},\frac{b}{a},\frac{x^2}{10},\frac{n}{m}$. 这些式子中，哪些是整式？剩下的代数式与整式有什么区别？它们有共同的特点吗？

2. 新学期开始后，八年级五班的几名同学各买了一本《学练创》，共花去 120 元钱，那么每本《学练创》多少钱呢？若有 10 名同学，那么每本《学练创》多少钱？若有 12 名同学呢？

知识全屏显示

知识要点归纳

要点 1　分式的概念

一般地，如果 A、B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式.

分式 $\frac{A}{B}$ 中，A 叫做分子，B 叫做分母.

要点 2　分式中分母应满足的条件

分式中的分母表示除数，由于除数不能为 0，所以分式的分母不能为 0，即当 $B\neq 0$ 时，分式 $\frac{A}{B}$ 才有意义.

要点 3　分式的基本性质

分式的基本性质是：分式的分子和分母同乘以（或除以）一个不等于 0 的整式，分式的值不变.

上述性质可以用式子表示为

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C},\quad \frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}.\ (C\neq 0)$$

其中，A、B、C 均为整式. 要特别注意 $C\neq 0$ 这一重要条件.

要点4 最简公分母及其确定

一般取各分母的所有因式的最高次幂的积作公分母,它叫最简公分母.

确定最简公分母的一般方法和步骤:①取各分母系数的最小公倍数;②凡是在分母中出现的字母为底的幂的因式都要取;③以相同字母为底的幂的因式取指数最大的.当分母是多项式时,先把各多项式因式分解,再按上述方法求.

要点5 通分及其一般步骤

利用分式的基本性质,使分子和分母同乘以适当的整式,不改变分式的值,把异分母分式化成相同分母的分式,这样的分式变形叫做分式的通分.

通分的一般步骤:①确定各分式的最简公分母;②利用分式的基本性质把异分母的分式化为同分母的分式.

要点6 约分及约分的方法

利用分式的基本性质,约去分式的分子和分母的公因式,不改变分式的值,这样的分式变形叫做分式的约分.

约分的关键是正确找出分子与分母的公因式,其一般方法和步骤是:①若分子和分母都是单项式时,先约去分子分母中系数的最大公约数,再约去相同字母的最低次幂;②当分子和分母都是多项式时,首先要对分子、分母进行因式分解,把分子、分母变为几个因式的积后,再约去分子、分母中的公因式.

方法特快专递

经典范例剖析

例1 填空:

(1)前进村有耕地 x 亩,人口总数为 y 人,则前进村人均耕地为____亩.

(2)面积为 $a\text{m}^2$ 的长方形一边长为 $b\text{m}$,则它的另一边长是______m.

分析 (1)题中人均耕地=耕地总数÷人口总数,即 $\frac{x}{y}$;(2)题中另一边长应为 $a\div b$,即 $\frac{a}{b}$.

解 (1)$\frac{x}{y}$;(2)$\frac{a}{b}$.

例2 下列各式中,哪些是整式?哪些是分式?

$\frac{1}{x}$,$a-1$,$\frac{8}{b}$,$\frac{y}{9}$,$\frac{3}{a-b}$,$\frac{6+c}{2\pi}$,$-\frac{1}{3}(a-b)$,$\frac{a^2+4a+4}{3}$,$\frac{x-y}{x+y}$.

分析 分母中含字母的是分式,不含字母的就是整式.要注意 π 是一个常数,表示

圆周率，因此$\frac{6+c}{2\pi}$应是整式.

解 整式有：$a-1$，$\frac{y}{9}$，$\frac{6+c}{2\pi}$，$-\frac{1}{3}(a-b)$，$\frac{a^2+4a+4}{3}$；

分式有：$\frac{1}{x}$，$\frac{8}{b}$，$\frac{3}{a-b}$，$\frac{x-y}{x+y}$.

例 3 (1)当x______时，分式$\frac{x+1}{4x+5}$有意义；

(2)当a为______时，分式$\frac{(a-3)(a-1)}{|a|-3}$的值为0.

分析 分式有意义即要求分母不等于0，分式的值为0，应同时满足两个条件，即分子为0的同时分母不为0，分母不为0是分式有意义的前提条件.

解 (1)由分母$4x+5\neq0$，得$x\neq-\frac{5}{4}$.

$\therefore$当$x\neq-\frac{5}{4}$时，分式$\frac{x+1}{4x+5}$有意义，即应填上"$\neq-\frac{5}{4}$".

(2)由分母$|a|-3\neq0$，得$a\neq\pm3$，此时分式有意义.

由分子$(a-3)(a-1)=0$，得$a=3$或$a=1$.

综上可知，$a=1$时，分式的值为0，即应填上"1".

例 4 填空：

(1)$\frac{a+b}{ab}=\frac{(\quad)}{a^2b}$；(2)$\frac{-x^2}{xy}=\frac{x}{(\quad)}$.

分析 两题都涉及到不改变分式的值的变形，可以考虑分式的基本性质，运用分式的基本性质来解题.(1)题中等号左边的分母是ab，右边的分母是a^2b，可以考虑在左边分式的分子和分母中同时乘以a来变形；(2)题中等号左边的分子是$-x^2$，右边的分子是x，可以考虑在左边的分子和分母中同时除以$-x$来变形.

解 (1)a^2+ab；(2)$-y$.

例 5 通分：

(1)$\frac{61}{3abc^2}$与$\frac{a-b}{4a^2b^2c^3}$；(2)$\frac{m}{m^2-2m}$与$\frac{3m}{m^2-4}$.

分析 通分之前应先确定各分式的最简公分母，再利用分式的基本性质将各分式变形.在(1)题中，最简公分母应是$12a^2b^2c^3$，因此$\frac{61}{3abc^2}=\frac{61\times4abc}{3abc^2\cdot4abc}=\frac{244abc}{12a^2b^2c^3}$，$\frac{a-b}{4a^2b^2c^3}=\frac{(a-b)\times3}{4a^2b^2c^3\times3}=\frac{3a-3b}{12a^2b^2c^3}$；在(2)题中，应先将分母因式分解，$m^2-2m=m(m-2)$，$m^2-4=(m+2)(m-2)$，因此最简公分母应为$m(m+2)(m-2)$，所以$\frac{m}{m^2-2m}=\frac{m(m+2)}{m(m-2)(m+2)}=\frac{m^2+2m}{m(m-2)(m+2)}$，$\frac{3m}{m^2-4}=\frac{3m\cdot m}{(m+2)(m-2)\cdot m}=\frac{3m^2}{m(m+2)(m-2)}$.

解 (1)$\frac{244abc}{12a^2b^2c^3}$，$\frac{3a-3b}{12a^2b^2c^3}$；(2)$\frac{m^2+2m}{m(m+2)(m-2)}$，$\frac{3m^2}{m(m+2)(m-2)}$.

例 6 约分：

(1)$\frac{16xy^3z^2}{-4x^2yz^3}$；(2)$\frac{a^2+4a+4}{a^2-4}$；(3)$\frac{-m-n}{m^3-mn^2}$.

分析 若分子、分母都是单项式，可以先确定分子、分母的公因式，然后约分；也可以系数与系数约分，相同底数的幂进行约分. 若分子和分母都是多项式，应先将多项式因式分解，再约分.

解 (1)$\frac{16xy^3z^2}{-4x^2yz^3}=-\frac{4xyz^2\cdot 4y^2}{4xyz^2\cdot xz}=-\frac{4y^2}{xz}$；

(2)$\frac{a^2+4a+4}{a^2-4}=\frac{(a+2)^2}{(a+2)(a-2)}=\frac{a+2}{a-2}$；

(3)$\frac{-m-n}{m^3-mn^2}=\frac{-(m+n)}{m(m+n)(m-n)}=-\frac{1}{m(m-n)}$.

例 7 已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=7$，求分式$\frac{3x+4xy-3y}{2x-3xy-2y}$的值.

分析 此题很显然无法求出 x 与 y 的具体值，因此不能直接计算求值，我们可以考虑利用分式的基本性质将已知条件变形或将要求值的分式变形，然后将它们联系在一起，从而求出分式的值.

解法一 ∵$xy\neq 0$.

$$\therefore \frac{3x+4xy-3y}{2x-3xy-2y}=\frac{(3x+4xy-3y)\div xy}{(2x-3xy-2y)\div xy}=\frac{3\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+4}{2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)-3}=\frac{3\times(-7)+4}{2\times(-7)-3}=\frac{-17}{-17}=1.$$

解法二 由$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=7$，可知 $x\neq 0$，$y\neq 0$，因此，利用等式的基本性质在等式的两边同时乘以 xy，得 $y-x=7xy$，即 $x-y=-7xy$.

$$\therefore 原式=\frac{3(x-y)+4xy}{2(x-y)-3xy}=\frac{3\times(-7xy)+4xy}{2\times(-7xy)-3xy}=\frac{-17xy}{-17xy}=1.$$

例 8 已知 $x+\frac{1}{x}=5$，求$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值.

分析 根据题目提供的已知条件，我们无法用所学知识求出 x 的具体值，然后代入求值. 但是，我们观察分式$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$，发现它的倒数为$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1$，因此我们可以利用完全平方公式$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ 来求值. 同时我们也可以利用分式的基本性质根据 $x\neq 0$ 的隐藏条件在$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的分子和分母中同时除以 x^2 来化简，从而求值.

解法一 $\because x+\frac{1}{x}=5$. $\therefore x\neq0$,即 $x^2\neq0$.

$\therefore\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=25$,即 $x^2+\frac{1}{x^2}=25-2=23$.

$\therefore\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=23+1=24$.

$\therefore\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{24}$.

解法二 $\because x+\frac{1}{x}=5$. $\therefore x\neq0$,即 $x^2\neq0$.

$\therefore\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5$,即 $x^2+\frac{1}{x^2}=25-2=23$.

$\therefore\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{x^2\div x^2}{(x^4+x^2+1)\div x^2}=\frac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1}{23+1}=\frac{1}{24}$.

发散密题探究

例 9 (1)当 a 取何值时,$\frac{a^2-9}{a+3}$无意义?

(2)当 a 取何值时,$\frac{a^2-9}{a+3}$的值为 0?

(3)当 a 取何值时,$\frac{1}{a-1}$有意义?

(4)当 a 取何值时,$\frac{a^2-9}{a+3}+\frac{1}{a-1}$有意义?

分析 (1)要使分式$\frac{a^2-9}{a+3}$无意义,只需满足条件 $a+3=0$ 即可;(2)分式的值为 0,只需分子为 0,同时分母不为 0 即可,因此 $a^2-9=0$,所以$a^2=9$,所以 $a=\pm3$,也就是说当 $a=3$ 或 $a=-3$ 时,分子 $a^2-9=0$,但当$a=-3$时,分母为 0,所以 a 的值只能是 3;(3)要使$\frac{1}{a-1}$有意义,只需满足条件 $a-1\neq0$ 即可;(4)要使$\frac{a^2-9}{a+3}+\frac{1}{a-1}$有意义,$a$ 的值需同时满足条件$a+3\neq0$和 $a-1\neq0$,所以 $a\neq-3$ 且 $a\neq1$.

解 (1)$a=-3$ 时,$\frac{a^2-9}{a+3}$无意义;(2)当 $a=3$ 时,$\frac{a^2-9}{a+3}$的值为 0;(3)当 $a\neq1$ 时,$\frac{1}{a-1}$有意义;(4)当 $a\neq-3$ 且 $a\neq1$ 时,$\frac{a^2-9}{a+3}+\frac{1}{a-1}$有意义.

例 10 当 x 为何值时,下列各式有意义?

(1)$\frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$;(2)$\frac{x+3}{\sqrt{x-1}}$;(3)$\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$.

分析 此题中应注意两个方面的问题:①是要注意分母不为 0;②是要注意偶次根

式中被开方数应大于或等于0，因此(1)中 $x+3\geqslant 0$ 且 $x-1\neq 0$，所以 $x\geqslant -3$ 且 $x\neq 1$；(2)中 $x-1\geqslant 0$ 且 $\sqrt{x-1}\neq 0$，所以 $x>1$；(3)中 $\frac{x+3}{x-1}\geqslant 0$ 且 $x-1\neq 0$，由分式 $\frac{x+3}{x-1}\geqslant 0$，可知 $\begin{cases}x+3\geqslant 0,\\x-1>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+3\leqslant 0,\\x-1<0,\end{cases}$ 解得 $x>1$ 或 $x\leqslant -3$，所以 $x>1$ 或 $x\leqslant -3$.

解 (1) $x\geqslant -3$ 且 $x\neq 1$；(2) $x>1$；(3) $x>1$ 或 $x\leqslant -3$.

例 11 若 $\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}\geqslant 0$，求 x 的取值范围？

分析 分式的值为非负数，因此 $\begin{cases}\sqrt{x+2}\geqslant 0,\\x-1>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sqrt{x+2}\leqslant 0,\\x-1<0,\end{cases}$ 解得 $x>1$ 或 $x=-2$.

解 $x>1$ 或 $x=-2$.

例 12 已知 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，求 $\frac{a^4-a^2b^2}{a^2-ab}$ 的值.

分析 此题要求分式的值，此类型题应先化简，即先约分，然后再代入 a、b 的值求分式的值，$\frac{a^4-a^2b^2}{a^2-ab}=\frac{a^2(a^2-b^2)}{a(a-b)}=\frac{a^2(a+b)(a-b)}{a(a-b)}=a(a+b)$.

解
$$\begin{aligned}\frac{a^4-a^2b^2}{a^2-ab}&=\frac{a^2(a^2-b^2)}{a(a-b)}\\&=\frac{a^2(a+b)(a-b)}{a(a-b)}\\&=a(a+b).\end{aligned}$$

将 $a=\sqrt{2}$，$b=1$ 代入 $a(a+b)$ 中，得

原式 $=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$.

例 13 等式 $\frac{a+1}{a-2}=\frac{(a+1)(a+2)}{(a-2)(2a-4)}$ 成立的条件是______.

分析 要使等式成立，需等式左边和右边变形后能够完全相同，我们注意到，左边分子中 $a+1$ 在右边分子中也含有，左边分母中 $a-2$ 在右边分母中也含有. 因此我们可以理解为在左边分式的分子中乘以 $(a+2)$，左边分母中乘以 $(2a-4)$，而根据分式的基本性质，只有当 $a+2=2a-4\neq 0$ 时，左边和右边才相等，即 $a=6$；此题也可令 $a+1=0$，即 $a=-1$ 时，此等式也可成立.

解 $a=6$ 或 $a=-1$.

例 14 根据分式的基本性质，分式 $\frac{-a}{a-b}$ 可变形为(　　).

A. $-\frac{a}{a-b}$　　B. $\frac{a}{a+b}$　　C. $-\frac{a}{a+b}$　　D. $\frac{a}{-a-b}$

分析 根据分式的基本性质，在分子、分母、分式本身三个符号中，任意改变其中的两个，分式的值不变. 当分子和分母是多项式时，要改变它们的符号，应先把多项式放在

括号内，改变符号后再去括号. B选项中改变了分子的符号，但分母中只改变了多项式中$-b$的符号而没有改变a的符号，因此错误；C选项中改变了分子、分式本身的符号，同时也改变了分母中$-b$的符号，因此错误；D选项中，改变了分子的符号，同时改变了分母中a的符号而没有改变$-b$的符号，因此错误；只有A选项中，同时改变了分子和分式本身的符号，而没有改变分母的符号，因此是正确的. 故应选A.

解 选A.

例15 已知$x=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，$xy=1$，求$\frac{x^3y-xy^3}{x^2-y^2}$的值.

分析 此题若由已知条件求出y的值，然后将x、y的值代入求分式的值，那样肯定很复杂，因此，我们可以选择先将分式化简，然后再来代入求值. $\frac{x^3y-xy^3}{x^2-y^2}=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2-y^2}=xy$.

解 $\frac{x^3y-xy^3}{x^2-y^2}=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2-y^2}=xy=1$.

例16 已知$x^2-3x+1=0$，求$x^2+\frac{1}{x^2}$的值.

分析 本题考查我们对于完全平方公式的理解以及等式的变形的有关知识. 此题通过求x的值来求分式的值很显然行不通. 因为我们无法求解一元二次方程. 但是我们要求值，只有仔细观察题目的条件，寻找另外的解题方法. 我们发现x不可能为0，若x为0，则$x^2-3x+1=0$左右两边不等，因此在方程$x^2-3x+1=0$左边和右边同时除以x，得$x-3+\frac{1}{x}=0$，即$x+\frac{1}{x}=3$，则有$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$.

解 根据$x^2-3x+1=0$，可知$x\neq0$.

在$x^2-3x+1=0$的两边同时除以x，得

$$x-3+\frac{1}{x}=0，即\ x+\frac{1}{x}=3.$$

$$\therefore\ x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7.$$

例17 约分：

(1)$\frac{a^2-3a}{9-a^2}$；(2)$\frac{a^2-5a+6}{a^2-3a+2}$.

分析 本题应先将分子和分母分别因式分解，然后再确定公分母约分.

解 (1)$\frac{a^2-3a}{9-a^2}=-\frac{a^2-3a}{a^2-9}=-\frac{a(a-3)}{(a+3)(a-3)}=-\frac{a}{a+3}$；

(2)$\frac{a^2-5a+6}{a^2-3a+2}=\frac{(a-2)(a-3)}{(a-1)(a-2)}=\frac{a-3}{a-1}$.

例18 学校要挖一条1500m长的排水沟，先由一班挖，每小时挖am，2小时后改

由二班挖，二班每小时挖的米数比一班的 2 倍少 15m，那么二班需要多少小时才能把剩下的排水沟挖完？

分析 此题要求二班的工作时间，因此我们应弄清二班的工作总量以及二班的工作效率，然后利用工作时间＝工作总量÷工作效率，求出二班所需工作时间，二班工作总量应为$(1500-2a)$m，二班工作效率应为$(2a-15)$m/h.

解 $\frac{1500-2a}{2a-15}$(h).

例 19 当 y 取何值时，$\frac{y+3}{|y|-3}$有意义？

分析 要使分式有意义，必须分母不为 0，即$|y|-3\neq0$，$|y|\neq3$，所以 $y\neq\pm3$.

解 当 $y\neq\pm3$ 时，$\frac{y+3}{|y|-3}$有意义.

例 20 如果把分式$\frac{x}{x+y}$中的 x、y 都扩大 4 倍，那么分式的值(　　).

A. 扩大 4 倍　　B. 不变　　C. 缩小 4 倍　　D. 缩小 8 倍

分析 分式$\frac{x}{x+y}$中的 x、y 都扩大 4 倍，即$\frac{4x}{4x+4y}=\frac{4x}{4(x+y)}=\frac{x}{x+y}$，可以发现，分式的值不变，故应选 B 项.

解 选 B 项.

例 21 已知 $x+m^2=2005$，$y+m^2=2006$，$z+m^2=2007$，且 $xyz=6021$，求$\frac{x}{yz}+\frac{z}{xy}+\frac{y}{xz}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$的值.

分析 根据已知条件可知 $y-x=1$，$z-y=1$，$z-x=2$，求值时可以先将分式变形，变形时可以全部通分，也可部分通分化简. 全部通分即$\frac{x}{yz}+\frac{z}{xy}+\frac{y}{xz}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{x^2+z^2+y^2-yz-xz-xy}{xyz}=\frac{2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2xz-2xy}{2xyz}=\frac{(y-x)^2+(z-y)^2+(z-x)^2}{2xyz}=\frac{1+1+4}{2\times6021}=\frac{1}{2007}$. 部分通分化简即$\frac{x}{yz}-\frac{1}{y}+\frac{z}{xy}-\frac{1}{x}+\frac{y}{xz}-\frac{1}{z}=\frac{x-z}{yz}+\frac{z-y}{xy}+\frac{y-x}{xz}=\frac{-2}{yz}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}=\frac{-2x+z+y}{xyz}=\frac{(z-x)+(y-x)}{xyz}=\frac{2+1}{6021}=\frac{1}{2007}$.

解法一 由题意可知 $y-x=1$，$z-y=1$，$z-x=2$，

$$\frac{x}{yz}+\frac{z}{xy}+\frac{y}{xz}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$$
$$=\frac{x^2+z^2+y^2-yz-xz-xy}{xyz}$$
$$=\frac{2x^2+2z^2+2y^2-2yz-2xz-2xy}{2xyz}$$

$=\dfrac{(y-x)^2+(z-y)^2+(z-x)^2}{2xyz}$

$=\dfrac{1+1+4}{2\times 6021}=\dfrac{1}{2007}$.

解法二 由题意可知 $y-x=1, z-y=1, z-x=2$,

$\dfrac{x}{yz}+\dfrac{z}{xy}+\dfrac{y}{xz}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}$

$=\dfrac{x}{yz}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{z}{xy}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{xz}-\dfrac{1}{z}$

$=\dfrac{x-z}{yz}+\dfrac{z-y}{xy}+\dfrac{y-x}{xz}$

$=\dfrac{-2}{yz}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{xz}$

$=\dfrac{-2x+z+y}{xyz}$

$=\dfrac{(z-x)+(y-x)}{xyz}$

$=\dfrac{2+1}{6021}=\dfrac{1}{2007}$.

解题技法提炼

1. 判断分式时,应直接判断,不能化简之后再判断.
2. 判断分式有无意义时注意“且”与“或”的用法.

例 22 已知分式$\dfrac{5x-2}{x^2-2x-3}$,求:

(1)当 x 为何值时,此分式有意义?

(2)当 x 为何值时,此分式无意义?

解 (1)当 $x^2-2x-3\neq 0$,即 $x\neq 3$ 且 $x\neq -1$ 时分式有意义.

(2)当 $x^2-2x-3=0$,即 $x=3$ 或 $x=-1$ 时分式无意义.

3. 要使分式的值为 0,必须同时具备两个条件:①分子为 0;②分母不为 0.

4. 涉及分式取正、负值时,一般是考虑分子、分母同号或异号,然后通过解不等式组来解决.

5. 运用分式基本性质时,要注意三点:①二同. 在分子和分母中同时乘以(或除以)同一个整式;②二种运算. 只能同时乘以或除以,不能加或减;③不为 0. 在分子和分母中同时乘以(或除以)的整式应不为 0.

易错风险规避

1. 分式值为 0 时,分母应不为 0.

例 23 若分式$\dfrac{x^2-9}{x+3}$的值为 0,则 $x=$______.

错解 $x^2-9=0$ 时，分式的值为 0.

$\therefore x^2=9$，即 $x=\pm 3$.

错误原因 分式的值是否为 0，前提条件应是分式有意义，只有在分式有意义的前提条件下，才能具体讨论分式的取值. 有些同学在解题时容易忽略这个前提条件. 因此，分式的值要等于 0，必须同时具备以下两个条件：①分母不为 0；②分子为 0.

正解 $\because$ 分式的值为 0.

$\therefore x^2-9=0$，且 $x+3\neq 0$.

$\therefore x=3$.

2. 运用分式的基本性质解题时，理解有误.

例 24 下列分式的变形是否正确？

(1) $\dfrac{y}{x}=\dfrac{xy}{x^2}$；(2) $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$.

错解 (1)、(2)都正确.

错误原因 (1)式中隐含了 $x\neq 0$ 这一条件，所以在分式的分子和分母中同时乘以 x 是正确的；而(2)式中隐含的条件为 $a+b\neq 0$，而 $a-b$ 有可能为 0，有可能不为 0，所以在分式的分子和分母中都乘以 $a-b$ 是错误的.

正解 (1)正确；(2)不正确.

例 25 不改变分式的值，把分式 $\dfrac{2x-\frac{5}{2}y}{\frac{5}{3}x+y}$ 的分子和分母中各项的系数化为整数.

错解 $\dfrac{2x-\frac{5}{2}y}{\frac{5}{3}x+y}=\dfrac{\left(2x-\frac{5}{2}y\right)\cdot 2}{\left(\frac{5}{3}x+y\right)\cdot 3}=\dfrac{4x-5y}{5x+3y}$.

错误原因 在运用分式的基本性质解题时，没有注意到应在分子和分母中同时乘以同一个数.

正解 $\dfrac{2x-\frac{5}{2}y}{\frac{5}{3}x+y}=\dfrac{\left(2x-\frac{5}{2}y\right)\cdot 6}{\left(\frac{5}{3}x+y\right)\cdot 6}=\dfrac{12x-15y}{10x+6y}$.

3. 约分不彻底.

例 26 约分 $\dfrac{32(x-3y)^2(-x+2y)}{24(3y-x)^2(x-2y)}$.

错解 $\dfrac{32(x-3y)^2(-x+2y)}{24(3y-x)^2(x-2y)}$

$=\dfrac{4\cdot 8(x-3y)^2(-x+2y)}{4\cdot 6(x-3y)^2(x-2y)}=\dfrac{8(-x+2y)}{6(x-2y)}$.