微积分（上册）

宋明娟　王春　编著

清华大学出版社

微积分（上册）

宋明娟　王春　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是作者结合多年教学研究和改革实践，参照最新的本科数学课程教学要求，借鉴当前国内外相关教材的优点，在充分考虑普通高等院校的培养目标的基础上编写的.

全书分上、下两册，共 9 章. 其中上册 4 章，主要内容为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程；下册 5 章，主要内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数. 本书注重对基本概念、基本定理和重要公式的几何意义和实际背景的介绍，突出微积分的基本思想和方法，加强对常用数学方法的分析和指导；较一般教材扩大了应用实例的范围；增加了数学实验，每章都配备数学实验指导；书末附有 Mathematica 和 MATLAB 简介. 为了兼顾不同层次学生的需要，每章都配备了 A、B 两组不同层次的总复习题，并在书末附有习题答案供读者参考.

本书可以作为普通高等院校工学类本、专科“微积分”课程的教材，也可作为相关人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 上册/宋明娟，王春编著. —北京：清华大学出版社，2008. 8

ISBN 978-7-302-18094-4

Ⅰ. 微…　Ⅱ. ①宋… ② 王…　Ⅲ. 微积分　Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 099514 号

责任编辑：石　磊　王海燕
责任校对：赵丽敏
责任印制：何　芊
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京密云胶印厂
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　**印 张**：16.5　**字 数**：353 千字
版　次：2008 年 8 月第 1 版　　**印　次**：2008 年 8 月第1 次印刷
印　数：1～3500
定　价：26.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：030447－01

FOREWORD

前言

微积分内容涵盖一元函数微积分学、微分方程、空间解析几何、多元函数微积分学及无穷级数. 其理论和方法是研究连续型模型的数学基础,对于培养学生的科学思想方法和分析解决问题的能力,提高学生的素养,培养学生的人文精神和科学世界观起着不可替代的作用. 是高等院校工学类本、专科各专业的一门必修基础理论课.

随着我国国民教育的不断发展和普及,高等教育已由精英教育转型为大众化教育. 在大众化进程中,高等教育为适应多样化的社会需求而相应分化并形成了横向的不同类型和纵向的不同层次. 高校基本上分类为精英型大学与大众型大学. 其中,精英型大学与大众型大学主要表现为学术性和职业性这两种价值取向的类型的分化. 这既是社会发展的需要也是个体差异和个体发展的需要. 国家需要大学集中人才研究高深的学问以维持其长远发展,也需要大学在满足广大民众接受高等教育的求学愿望的基础上为社会经济和企业培养急需的职业技术人才以满足现实发展的需要. 作为大众型大学,其功能和职责是在"教育机会均等"的教育理念的支配下,为人的自由发展和价值实现提供各种选择机会和实现途径,为日益多样化的社会发展培养实用的各种应用型人才. 其教学重点是强化基础知识和基本技能,淡化技巧,侧重应用能力的培养和综合素质的提高. 为了使这一教育理念与培养目标贯穿于微积分教学并得以实现,编者结合多年教学研究和改革实践,参照最新的本科数学课程教学要求,借鉴当前国内外相关教材的优点,编写了这本适合培养应用型人才的高校工学类本、专科教学使用的微积分教材.

全书分上、下两册,共 9 章. 其中上册 4 章,主要内容为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程; 下册 5 章,主要内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数. 本书内容可在 160～180 学时内完成. 为了方便教学,本书还备有《微积分同步练习及其解答》和《微积分多媒体教学课件》.

本书在编排中,本着强基础,重应用,兼顾实验,兼顾数学素质的培养,不过分追求技巧的原则,按照理论、实验、综合应用为一体的编写模式,力求使学生接受全方位的学习和训练,逐步实现知识向能力和素质的转化. 具体体现如下:

1. 充分考虑学生的认知能力，因材施教．在内容的叙述和习题的选编上，力求深入浅出，由具体到抽象，数形结合，层次分明，通俗易懂，易教易学．同时为兼顾不同层次学生的需要，每章都配备了A、B两组不同层次的总复习题．A组为基本题，B组具有一定难度，多为历年考研题，初学者可以略去，仅供进一步提高者选做；书末附有习题答案，供读者参考．

2. 强调基础，适当渗透现代数学思想．注重对基本概念、基本定理和重要公式的几何意义和实际背景的介绍，突出微积分的基本思想和方法，加强对常用数学方法的分析和指导；尽量使用现代数学的概念和术语，为学习现代数学提供了一些接口．

3. 较一般教材增加了数学实验，每章都配备数学实验指导；书末附有Mathematica和MATLAB简介．以便训练学生借助数学软件消化理解微积分理论和解决复杂的微积分计算和应用问题．让他们充分感受到数学实验的重要性和优越性，体验Mathematica和MATLAB软件的突出的符号运算功能，强大的绘图功能、精确的数值计算功能和简单的命令操作功能，认识到当今如此称颂的"高技术"本质上是一种数学技术，是数学向一切应用领域的渗透．

4. 突出应用能力的培养，较一般教材增加了应用题的数量，扩大了应用实例的范围．

本书上册由宋明娟、王春编著，下册由宋明娟、张亚平、于海姝编著，全书由宋明娟统稿、定稿．

本书在编写过程中，得到了母丽华教授的大力支持和出版社编辑的热心指导，在此表示衷心感谢．

由于编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，恳请专家、同仁和读者批评指正．

编　者

2008年5月

CONTENTS

目录

预备知识

微积分研究的主要对象是函数.研究函数通常有两种方法：一种方法是代数方法和几何方法的综合.用这种方法常常只能研究函数的简单性质，有的做起来很复杂.初等数学中就是用这种方法来研究函数的单调性、奇偶性、周期性的.另一种方法就是微积分的方法，或者说是极限的方法.用这种方法能够研究函数的许多深刻性质，并且做起来相对简单.微积分就是用极限的方法研究函数的一门学问.因此，在介绍微积分之前，有必要先介绍函数的概念和有关知识.

1. 集合

(1) 集合的概念

在数学中，我们把具有某种特定性质的事物所组成全体称为一个集合(或简称集).组成这个集合的事物称为该集合的元素.

习惯上，用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素，则称 a **属于** A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就称 a **不属于** A，记作 $a\notin A$.一个集合，若其元素的个数是有限的，则称作**有限集**，否则就称作**无限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$.

集合的表示方法有两种：**列举法和描述法**.列举法就是把集合中的所有元素一一列出来，写在一个花括号内.如 $A=\{-1,1\}$，$B=\{0,1,2\}$ 等.描述法就是在花括号内指明该集合中的元素所具有的确定性质.如 $C=\{x\mid x^2-1\geqslant 0\}$，$D=\{x\mid \sin x=0\}$ 等.

一般，用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集，用 $\mathbb{Z}$ 表示整数集，用 $\mathbb{Q}$ 表示有理数集，用 $\mathbb{R}$ 表示实数集.

对于集合 A 和 B，若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素，即若 $a\in A$，则 $a\in B$，这时就称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$，读作“A 含于 B”(或“B 包含 A”).若 $A\subset B$，且存在 $b\in B$，使得 $b\notin A$，则称 A 是 B 的一个真子集.

规定：$\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subset A$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A,B 相等，记作 $A=B$.此时 A 中的元素都是 B 中的元素，反过来，B 中的元素也都是 A 中的元素，即 A,B 中的元素完全一样.

(2) 集合的运算

设 A 和 B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$；由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$；由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A\setminus B$.有时我们

把研究某一问题时所考虑的对象的全体叫做全集，记作 I，并把差集 $I\backslash A$ 特别称为 A 的**余集或补集**，记作 A^c.

集合的并、交、余运算满足如下运算律：

交换律 $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$；

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

对偶律 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

以上这些运算律都容易根据集合相等的定义验证.

在两个集合之间还可以定义直积. 设 A,B 是任意两个集合，则 A 与 B 的直积，记作$A\times B$，定义为如下的由有序对(a,b)组成的集合：

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

例如，$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}$即为 xOy 平面上全体点的集合，$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 常记作$\mathbb{R}^2$. 两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域，例如

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid x\in[a,b],y\in[c,d]\}$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域，其相邻两边各自平行于 x 轴与 y 轴，并且在 x 轴与 y 轴上的投影分别为区间$[a,b]$和$[c,d]$.

(3) 区间与邻域

设 $a,b\in\mathbb{R}$，且 $a<b$，记$(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathbb{R}\}$，称为开区间；记$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbb{R}\}$，称为闭区间；记$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbb{R}\}$，称为左闭右开区间；记$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbb{R}\}$，称为左开右闭区间；$a,b$ 称为区间的左端点和右端点见图 1.

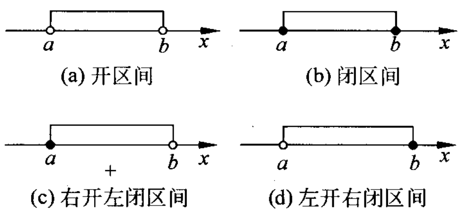


图 1

另外，还记$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$，$(-\infty,b)=\{x\mid x<b,x\in\mathbb{R}\}$，$(a,+\infty)=\{x\mid x>a,x\in\mathbb{R}\}$，等等.

定义 1 以 a 为中心的开区间$(a-\delta,a+\delta)(\delta>0)$称为 a 的 δ **邻域**，δ 称为此邻域的**半径**，通常记作 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\},$$

或写作

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

而$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta,x\in\mathbb{R}\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，称为 a 的**去心δ 邻域**（见图 2）.

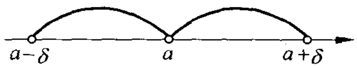


图 2

在不强调邻域半径的情况下，也可用$U(a)$，$\mathring{U}(a)$表示点 a 的邻域或点 a 的去心邻域.

2. 函数

(1) 概念

定义 2 设 D 是一个非空实数集合，若存在一个法则 f，按照它，对于每一个实数 $x\in D$ 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

D 称为函数的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，y 与 x 的对应关系 f 称为**函数关系**.

一般来说，函数的定义域是由所考虑问题的实际意义确定的. 但在数学上作一般讨论时，常常只给出函数的表达式，而没有说明实际背景，这时函数的定义域就是使表达式有意义的自变量的变化范围. 如 $y=\dfrac{\ln(x^2-1)}{x(x+2)}$的定义域就是$|x|>1$ 且 $x\neq-2$.

函数完全由对应法则和定义域所确定. 两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则这两个函数相同. 如两函数 $f(x)=x^2+1$，$g(t)=t^2+1$ 是同一个函数；而 $y=\dfrac{x^2}{x}$，$g(x)=x$ 就不是同一个函数，因为它们的定义域不同，前者是 $x\neq0$ 的所有实数，后者是$(-\infty,+\infty)$.

下面介绍几种特殊的函数.

例 1 常数函数

$y=3$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\{3\}$.

例 2 绝对值函数

$y=|x|$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$[0,+\infty)$.

例 3 取整函数

设任意实数 x，记$[x]$表示不超过 x 的最大整数，称 $f(x)=[x]$为取整函数，它的定义域是$\mathbb{R}$，值域是整数集，如图 3. 如$[3.2]=3$，$[-2.3]=-3$，$[2]=2$.

例 4 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

定义域是$\mathbb{R}$，值域是$\{-1,0,1\}$. 如图 4 所示，该函数也是一个分段函数.

(2) 复合函数及反函数

定义 3 若 $y=f(u)$的定义域为 U，而 $u=\varphi(x)$的定义域为 X，值域为 U^*，且 $U\cap U^*\neq\varnothing$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，称它为由 $f(u)$，$\varphi(x)$构成的**复合函数**，记作 $f[\varphi(x)]$，u

称为**中间变量**.

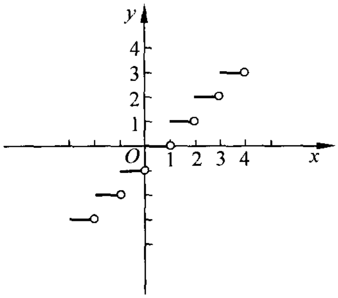


图 3

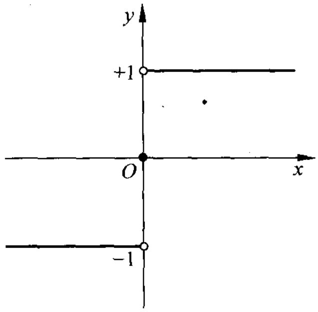


图 4

注意，函数经复合后，其自然定义域未必是中间函数的自然定义域，如函数 $y=\arcsin x^2$ 可看作由 $y=\arcsin u, u=x^2$ 复合而成，但是 $u=x^2$ 的自然定义域是 $(-\infty,+\infty)$，相应的值域 $[0,+\infty)$ 并没有完全包含在 $y=\arcsin u$ 的自然定义域 $[-1,1]$ 内，只有当 $u=x^2$ 的自变量 x 在 $D=[-1,1]$ 内取值时，u 的对应值才属于 $y=\arcsin u$ 的定义域，因此复合函数 $y=\arcsin x^2$ 的定义域是 $D=[-1,1]$. 还要注意两个函数能够复合的条件，例如 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数，因为表达式 $y=\arcsin(2+x^2)$ 对任何实数都没有意义.

例 5 设 $f(x)=\ln x, g(x)=\sin x$，求 $f[g(x)]$.

解 将 $f(x)$ 中的 x 用 $g(x)$ 来代替，得 $f[g(x)]=\ln(\sin x)$.

例 6 设 $f(x)=\ln(x-2), g(x)=\sin x$，求 $f[g(x)]$.

解 将 $f(x)$ 中的 x 用 $g(x)$ 来代替，得 $f[g(x)]=\ln(\sin x-2)$，但由于 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以 $\sin x-2<0$，故函数的定义域为空集，所以不能构成复合函数.

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 W. 若对每个 $y\in W$，存在唯一的 $x\in D$ 与之对应且满足 $y=f(x)$，则 x 是定义在 W 上以 y 为自变量的函数，记此函数为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in W.$$

并称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

显见 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数，且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域和定义域. 注意到在 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 是因变量，但是习惯上，常用 x 作为自变量，y 作为因变量. 因此，$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 常记为

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in W.$$

容易证明，若 $f(x)$ 为定义在 D 上的单调函数，则 $f(x)$ 是从定义域 D 到值域 $f(D)$ 的一一映射，其反函数必定存在，且 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 有相同的单调性. 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在同一坐标平面上是关于直线 $y=x$ 对称的.

(3) 函数的基本性质

单调性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对任意 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，若有 $f(x_1)\leqslant$

$f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是**单调增加**的；反之，若 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是**单调减少**的. 单调增加和单调减少统称为**单调**，若去掉"等号"，则称为**严格单调**.

奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若 $\forall x \in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 内的**偶函数**；而若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 内的**奇函数**.

奇函数的图形关于原点对称，而偶函数的图形关于 y 轴对称.

有界性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 M，使得对任意的 $x \in D$，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 D 内有界，或称 $f(x)$ 在 D 内为**有界函数**；否则称 $f(x)$ 在 D 内为**无界函数**.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在数 A，使得对任意的 $x \in D$，都有 $f(x) \leqslant A$（或 $f(x) \geqslant A$）成立，则称 $f(x)$ 在 D 内有上界（或下界），A 称为一个上界（或下界）.

函数有界的充要条件是函数既有上界又有下界. 如果函数有界，其界不唯一.

周期性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T \neq 0$，使得对任意的 $x \in D$，有 $x \pm T \in D$，且 $f(x \pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

（4）基本初等函数

定义 5 常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

① 幂函数

幂函数 $y=x^{\alpha}$，α 是常数，定义域与 α 有关. α 为正整数时，定义域为 $\mathbb{R}$；α 为负整数时，定义域为 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$；$\alpha=\dfrac{1}{n}$，$n$ 为正整数，若 n 为奇数，定义域为 $\mathbb{R}$，n 为偶数，定义域为 $[0,+\infty)$，等等（见图 5）.

② 指数函数

指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a \neq 1)$，定义域为 $\mathbb{R}$，值域为 $(0,+\infty)$，图形都经过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 单调减少. 指数函数的图像均在 x 轴上方（见图 6）. 经常用的是 $y=\mathrm{e}^x$，其中 $\mathrm{e}=2.718\,281\,828\,459\cdots$.

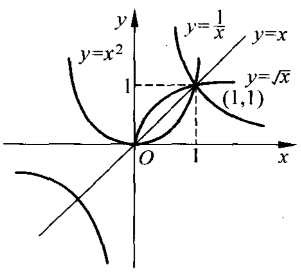


图 5

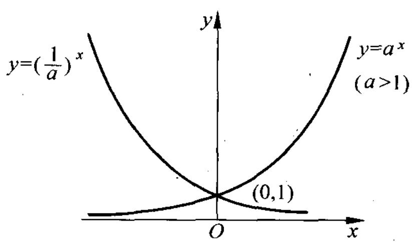


图 6

③ 对数函数

对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，故由原函数与反函数的关系知，对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $\mathbb{R}$，图形经过点 $(1,0)$，当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 单调减少. 对数函数的图形均在 y 轴的右方（见图 7）. 常用的对数函数是 $y=\ln x$，即 $a=\mathrm{e}$，称为自然对数.

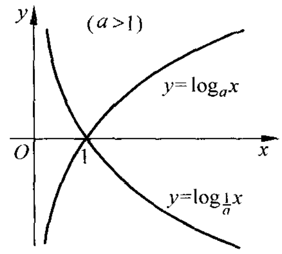
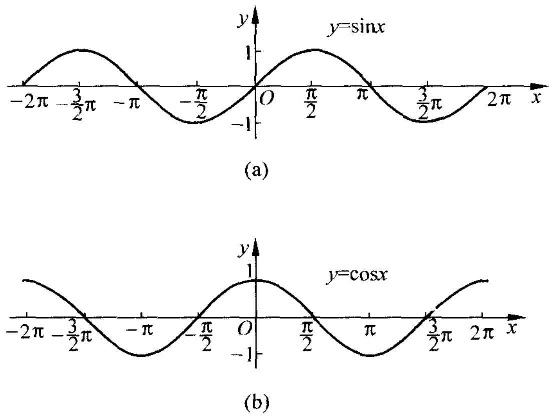


图 7

④ 三角函数

正弦函数和余弦函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，定义域为 $\mathbb{R}$. 正切函数和正割函数 $y=\tan x$，$y=\sec x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 而余切函数和余割函数 $y=\cot x$，$y=\csc x$ 的定义域为 $x\neq k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 其中 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数（见图 8）.



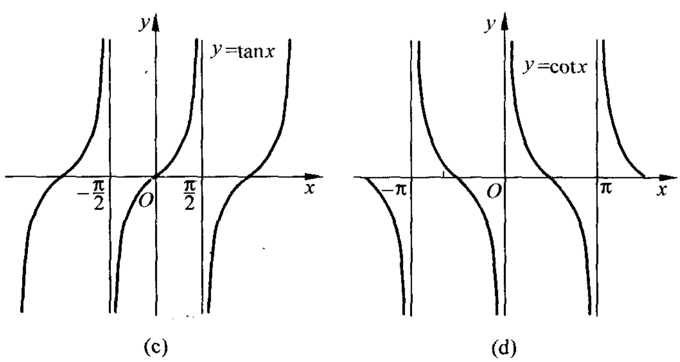


图 8