教育部高职高专规划教材

应用数学基础

（五年制）

上册

阎章杭　李月清　戴建锋　主编

化学工业出版社
教材出版中心

教育部高职高专规划教材

应用数学基础

（五年制）

上册

阎章杭　李月清　戴建锋　主编

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础.（五年制）.上册/阎章杭，李月清，
戴建锋主编.—北京：化学工业出版社，2004.4
教育部高职高专规划教材
ISBN 7-5025-5490-4

Ⅰ.应… Ⅱ.①阎…②李…③戴… Ⅲ.应用数
学-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 043165 号

教育部高职高专规划教材
应用数学基础
（五年制）
上册
阎章杭 李月清 戴建锋 主编
责任编辑：高 钰
文字编辑：孙凤英
责任校对：李 林 于志岩
封面设计：郑小红
*
化学工业出版社
教 材 出 版 中 心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029）
发行电话：(010) 64982530
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
北京市昌平振南印刷厂印刷
三河市东柳装订厂装订
开本 787mm×1092mm 1/16 印张 16¼ 字数 402 千字
2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-5490-4/G・1431
定 价：26.00 元

出版说明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作中的重要组成部分。改革开放以来，在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下，各地先后出版了一些高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999 年教育部组织制定了《高职高专教育专门课课程基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500 种，用5年左右时间完成。这500 种教材中，专门课（专业基础课、专业理论与专业能力课）教材将占很高的比例。专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量。专门课教材是按照《培养规格》的要求，在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上，充分吸取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位，调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础，突出了人才的创新素质和创新能力的培养。在有关课程开发委员会组织下，专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持。我们计划先用 2～3 年的时间，在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用 2～3 年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用。希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材，并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作，不断推动规划教材建设工作的发展与提高。

教育部高等教育司

2001 年 4 月 3 日

前　言

数学是五年制高等职业教育的一门必修课，是提高学生文化素质，学习有关专业知识、专门技术的重要基础。为了确保高等职业教育的培养目标及教学质量，为了逐步构建适合高职教育公共数学课程的教材体系，探索五年制高职教育数学教材建设的新路子、新思想，在教育部高职高专规划教材专家组的关怀和指导下，开封大学、包头职业技术学院、北京工业职业技术学院、洛阳大学、徐州建筑职业技术学院、石家庄职业技术学院、漯河职业技术学院、三门峡职业技术学院、黄河水利职业技术学院、吉林交通职业技术学院、黑龙江农业职业技术学院、商丘职业技术学院、天津渤海职业技术学院、石家庄邮电职业技术学院、开封教育学院、石家庄铁路职业技术学院、南阳理工学院等院校的教师和专家，结合当前我国五年制高职教育的新形式、新特点，经过长时间地酝酿和研究，认真编写了一套面向21世纪、比较符合当前我国五年制高职数学教学实际的系列教材，这套教材包括《应用数学基础》(上册)、(下册)，《应用数学基础习题课指导》(上册)、(下册)。

在该套教材的编写中，我们以国家教育部关于五年制高职教育数学教学大纲为重要的依据来组织教学内容，并广泛吸取同类教材的长处，力争使教材更具有科学性和实用性。

本套教材共设三篇，第一篇　初等数学；第二篇　一元函数微积分；第三篇　专业数学。

教材特点：

在该套教材的编写中，我们将努力遵循“拓宽基础，强化能力，立足应用”的原则。突出五年一贯制及职业教育的特色，具体如下。

① 在初等数学与高等数学的内容编排上，除了注意它们的共性规律外，还注意到它们不同的规律。初等数学部分强调其基础性、实用性、系统性，注意与初中数学知识的衔接；高等数学与专业数学部分，比较强调对综合素质和能力的培养，注重教材内容的应用性，注意与专业知识的结合。

② 在保证基础、重视素质教育的前提下，能突破传统教材体系，精选内容、主次分明、删减枝节、注意应用、讲究实效。对一些较繁的定理、公式及很明显的结论，有的只给出了结果，有的用几何直观予以说明，所选的例题和习题均以帮助学生理解概念、掌握方法为目的，删去单纯的技巧或是较难的题目，增加富有启发性或为专业服务的题目。

③ 采用了新颖的编排格式，如在主册正文，用冠以符号?、!的形式，分别对教材的重点、难点、疑点部分提出思考或指出内容的依据和出处，以利于学生学习。本套教材还加大了选修的内容，各院校可根据不同专业、不同的学生类别，按模块选学不同的内容，供选择的面较宽，而每块内容比较精炼，因而所用学时数较少。

④ 本套教材是文理兼用，它不仅优化了数学在物理方面的应用，而且还增加了数学在经济领域内的应用，这样有利于学生综合素质的提高。

⑤ 考虑到计算机已经越来越普及，以及 Mathematica 软件的广泛使用，本书以数学实验的形式，将 Mathematica 软件的应用穿插到有关章节中去，以供有条件的学校选用。

《应用数学基础》上册内容包括：集合与逻辑关系、函数、幂函数、指数函数、对数函

数、三角函数、平面向量、复数、空间图形、直线与二次曲线、极坐标与参数方程、数列、排列与组合等。标有*号的内容是供不同专业根据专业的需要选用。

与该书配套的还有辅助教材《应用数学基础习题课指导》。其内容包括：主册每章内容小结、常见问题分类及解题方法、典型习题解答与提示、备选习题。辅助教材为该门课程的习题课教学提供了必要的素材和条件。

该书由阎章杭总策划、负责组织实施。主编：阎章杭、李月清、戴建锋。副主编：郭海濂、杨瑞蕊、阎杰生。

参加该书编审人员的编审情况是（按章节顺序排名）：

白水周、李月清（第一、二章）；路世英、戴建锋、田德宇（第三、四章）；张建军、阎杰生、杨建法（第五、十章）；辛自力、杨瑞蕊、师韶琴（第六、七章）；牛普选、王凤霞、赵炳根（第八、九章）；王燕燕（第十一、十二章）。

从事初等数学教学研究达几十年的专家郭海濂，另外金家琦老师、郭成苇老师均对该书的内容进行了认真审核、修订。

在该套书编写过程中，曾得到有关学校领导、系部领导和有关专家的大力支持与帮助，杜跃鹏老师积极参与了利用 Mathematica 软件进行数学实验内容的编写，河南大学的教授、专家阎育华、王国胜曾对该套书的专业数学部分进行了认真的审核，并提出许多宝贵的建议，在此一并表示衷心的谢意！

由于我们水平有限，错误和不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正！

编者

2004 年 3 月

内 容 提 要

本教材的主要内容有：集合、不等式、简易逻辑、幂指数、指数函数、对数函数、任意角的三角函数、加法定理及其推论、反三角函数与简单三角方程、平面向量和复数、空间图形、直线、二次曲线、极坐标和参数方程、数列、排列与组合等。其内容涵盖了高职高专院校五年制文科、理科、工科各专业所必需的高中数学知识以及如何利用这些知识解决实际问题的方法。另外，本书还以数学实验的形式，增设了利用数学软件解决实际计算的内容，以供有条件的院校选用。

该教材突破传统教材体系，精选内容，主次分明，删减枝节，注重使用，讲究实效。

本教材可根据文、理、工不同专业，不同学生类别选学不同的内容，供选学的面宽。

所选的例题和习题均以帮助学生理解概念、掌握方法为目的，删除了单纯性技巧和难度较大的习题，增加富有启发性、应用性、为专业服务的题目。

在出版该教材同时，还编写并出版了与该教材配套的教材《应用数学基础习题课指导》，内容包括每章小结、常见问题分类及解法、习题答案及典型习题解答等。

本书可作为高职高专院校、成人高校和本科院校开办的二级院校五年制各专业的数学教材，对内容稍做处理，也可作为以初中毕业生为起点的中专、中职数学教材。

目　录

第一篇　初等数学

第一篇 初等数学

第一章 集合、不等式、简易逻辑

集合、不等式、简易逻辑是数学中最基本的知识，它们在数学的各个领域有着极其广泛的应用，本章将介绍集合的一些概念及有关符号、运算；介绍不等式的概念、性质以及几种类型的不等式的求解；然后阐述简易逻辑的基本知识.

第一节 集 合

一、集合的概念

在人们的日常生活中，往往把具有某种特定性质的对象作为一个整体加以研究，例如：

（1）某校一年级的全体学生；　　（2）所有的直角三角形；

（3）方程 $x^2-1=0$ 的所有实数根；　　（4）某图书馆的全部藏书；

（5）某运输公司的所有汽车；　　（6）抛物线 $y=x^2$ 上的所有点.

这里所用的“全体”、“所有”、“全部”都是指具有某种特定性质的对象（学生、三角形、书、汽车等）的总体.

人们把具有某种特定性质的对象组成的总体叫做**集合**，简称集；集合里的每个对象叫做这个集合的**元素**.（$\boxed{!}$这是描述性的说明.）

例如，上面例子中的（1）是由这个学校一年级全体学生组成的集合，一年级的每一个学生都是这个集合的元素；（3）是由方程 $x^2-1=0$ 的所有实数根组成的集合，方程 $x^2-1=0$ 的每一个实根都是这个集合的元素；（5）是由这个公司的所有汽车组成的集合，公司里的每一辆汽车都是这个集合的元素等.（$\boxed{?}$您能否举出几个现实生活中有关集合的例子吗?）

习惯上，我们用大写字母 A、B、C、…表示集合，而用小写字母 a、b、c、…表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，记为“$a\in A$”，读作“a 属于 A”；如果 a 不是集合 A 的元素，则记为“$a\notin A$”（或“$a\overline{\in} A$”），读作“a 不属于 A”.

例如，上面例（3）中，用 A 表示方程 $x^2-1=0$ 的所有实数根的集合时，则 $1\in A$，$-1\in A$，$-2\notin A$，$0\notin A$.

由数组成的集合叫做数集. 数组成的集合通常如表 1-1 所示.

表 1-1　常用的数集

数集名	自然数集	整数集	有理数集	实数集
记号	**N**	**Z**	**Q**	**R**

（$\boxed{!}$注意：自然数集由 0 和全体正整数组成，即非负整数集.）

为了方便起见，也用 $\mathbf{Z}^{+}$（或 $\mathbf{Z}_{+}$）表示正整数集，$\mathbf{R}^{-}$ 表示负实数集等.

当一个集合给定时，这个集合的元素是确定的，于是可根据集合中的元素具有的特定性质，判断出哪些对象是集合的元素，哪些不是. 如对于数集 $\mathbf{N}$，根据自然数特定性质可知，$2\in\mathbf{N}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{N}$，$\frac{1}{2}\notin\mathbf{N}$ 等.（⊡集合中的元素两大特征是什么?）

如果集合所包含的元素个数为有限个，称这个集合为**有限集合**；如果集合所包含的元素个数为无限多个，称这个集合为**无限集合**.

例如，实数集 $\mathbf{R}$、有理数集 $\mathbf{Q}$ 等都是无限集合，而上面的例子中，(1)、(3)、(4)、(5) 都是有限集合.

二、集合的表示法

1. 列举法　把某一集合的每个元素不重复、不遗漏、不分次序地一一列举起来，写在花括号｛　｝内表示集合的方法叫做列举法.

例如，小于 5 的自然数的集合可表示为：

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 或 $\{0, 2, 1, 4, 3\}$ 等，但不能写成 $\{0, 1, 3, 2, 3, 4, 2\}$ 等.

当集合的元素很多，不需要或不可能一一列出时，也可只写出几个元素，其他的用省略号表示. 如，小于 1000 的自然数集合可表示为：$\{0, 1, 2, 3, \cdots, 999\}$；正偶数集合可表示为：$\{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$.

2. 描述法　把某一集合中的元素所具有的特定性质描述出来，写在花括号｛　｝内表示集合的方法叫做描述法.（⊡描述法是表示集合常用的方法.）

例如，(1) 所有的直角三角形组成的集合可表示为：{直角三角形}；

(2) 抛物线 $y=x^2$ 上的所有点组成的集合可表示为：$\{(x, y) \mid y=x^2\}$ 或 $\{(x, y): y=x^2\}$ 或 $\{(x, y); y=x^2\}$.

(2) 中的集合里，“|”或“:”或“;”的左边表示集合所含元素的一般形式，右边表示集合中的元素所具有的特定性质.

以上所述的列举法和描述法是集合的两种不同表示方法，实际运用时究竟用哪种方法，要看具体问题而定. 有些集合两种方法都可使用. 如，方程 $x^2-1=0$ 的所有实数根组成的集合可表示为：$\{x \mid x^2-1=0\}$，又可表示为：$\{-1, 1\}$.

例 1　用列举法或描述法表示下列集合.

(1) 大于 3 小于 17 的偶数；(2) 不等式 $x^2-4<0$ 的整数解.

解　(1) 用列举法可表示为：$\{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$；用描述法可表示为：$\{x \mid x=2n, 2\leqslant n\leqslant 8, n\in\mathbf{N}^{+}\}$.

(2) 用列举法可表示为：$\{-1, 0, 1\}$；用描述法可表示为：$\{x \mid x^2-4<0, x\in\mathbf{Z}\}$.

三、几种特殊的集合

1. 点集　由点组成的集合叫做**点集**；如抛物线 $y=x^2$ 上的所有点的集合就是一点集.（⊡点集 $\{(1, 2)\}$ 不能写成 $\{1, 2\}$ 或 $\{x=1, y=2\}$!）

2. 解集　满足方程（组）或不等式组的所有解组成的集合叫做方程（组）或不等式组的**解集**.

点集、数集、方程（组）或不等式组的解集是人们经常研究的集合.

3. 单元素集　只含有一个元素的集合叫做**单元素集**. 如方程 $x+1=0$ 的解集 $\{-1\}$ 就是单元素集.

4. 空集　不含有任何元素的集合叫做**空集**. 如方程 $x^2+1=0$ 的实数解集就是一个空集，空集常用符号"$\varnothing$"表示."$\varnothing$"也叫平凡子集.

为方便起见，我们把至少含有一个元素的集合叫做**非空集**.

应该注意：($\boxed{!}$理解这几种特殊集合!)

(1) 空集"$\varnothing$"与集 $\{0\}$ 以及数"0"是三个不同概念；

(2) 单元素集 $\{a\}$ 与单个元素 a 是两个不同的概念. $\{a\}$ 表示由 a 组成的集合，而 a 表示一个元素 a.

四、子集、真子集、集合的相等

1. 子集　对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 为集合 B 的**子集**. 记作 $A\subseteq B$（也可写成 $A\subset B$），或 $B\supseteq A$（$B\supset A$）. 读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".（$\boxed{!}$集合 A 不包含于集合 B 用 $A\nsubseteq B$ 表示.）

例如，集合 $\{1, 2, 3\}$ 与集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$，由定义可知，$\{1, 2, 3\}$ 是 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集，记作 $\{1, 2, 3\}\subseteq\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 或 $\{1, 2, 3, 4, 5\}\supseteq\{1, 2, 3\}$.

对任一集合 A，因它的任何一个元素都属于集合 A 本身，所以 $A\subseteq A$，也就是说，任何一个集合是它本身的子集.

由于空集不含任何元素，所以空集可看作任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

2. 真子集　对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$ 则称集合 A 是集合 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

例如，$\{1, 2, 3\}\subsetneqq\{1, 2, 3, 4, 5\}$；$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}$ 等，显然，空集是任何非空集的真子集.

为形象地说明集合之间的包含关系，通常用圆（或任何封闭曲线围成的图形）表示集合，而用圆中的点表示该集合的元素，这样的图形称为**文氏**（Venn）**图**.

如图 1-1，表示 A 是 B 的真子集.

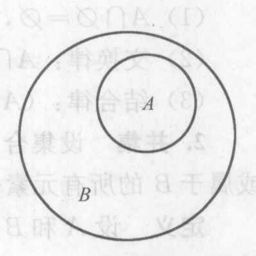


图 1-1　A 是 B 的真子集

例 2　写出集合 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集，并指出哪些是真子集.

解　集合 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集有：

$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$，$\{2, 3\}$，$\{1, 2, 3\}$；除 $\{1, 2, 3\}$ 外，其余都是已知集合的真子集.（$\boxed{!}$子集个数$=2^n$；真子集个数$=2^n-1$，n 为元素个数.）

3. 集合的相等　对于两个集合 A 和 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则称集合 A 和集合 B **相等**，记作 $A=B$.

两个集合相等就表示这两个集合的元素完全相同.

例 3　设集合 $A=\{x|x^2+3x+2=0\}$，$B=\{x|x=-2$ 或 $x=-1\}$，证明 $A=B$.

证明　对于 $x\in A$，有 $x^2+3x+2=0$，于是 $x=-2$ 或 $x=-1$，故 $x\in B$，即 $A\subseteq B$.

又对于 $x\in B$，有 $x=-2$ 或 $x=-1$，代入 $(x+1)(x+2)=0$，即有 $x^2+3x+2=0$ 成立，那以 $x\in A$，即 $B\subseteq A$，故 $A=B$.

五、集合的运算

1. 交集 设集合 $A=\{2,3,5\}$，$B=\{2,5,7\}$，$C=\{2,5\}$，容易看出，集合 C 是由既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合，对于这样的集合，我们定义如下.

定义 设 A 和 B 是两个集合，既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，读作"A 交 B"，即：

$$A\cap B=\{x \mid x\in A,\text{且 } x\in B\}$$

这里，"$\cap$"是求两个集合的交集的运算符号.

集合 A 与集合 B 的交集 $A\cap B$，可用图 1-2 中的阴影部分表示.

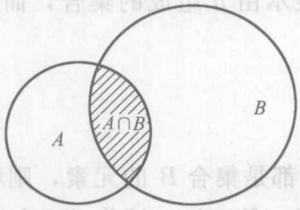


图 1-2 交集 $A\cap B$

例 4 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d,e\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{a,b,c\}\cap\{b,c,d,e\}=\{b,c\}$.

例 5 设点集 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}$，点集 $B=\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$，求 $A\cap B$.

解 因点集 A 表示直线 $4x+y=6$ 上的点的集合，点集 B 表示直线 $3x+2y=7$ 上的点的集合，故 $A\cap B$ 表示这两直线交点的集合.

即：$A\cap B=\{(x,y)\mid 4x+y=6 \text{ 且 } 3x+2y=7\}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{matrix}4x+y=6\\3x+2y=7\end{matrix}\right\}=\{(1,2)\}$.

例 6 设 $A=\{x \mid x>-2\}$，$B=\{x \mid x<3\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x \mid x>-2\}\cap\{x \mid x<3\}=\{x \mid -2<x<3\}$.

例 7 设 $A=\{\text{正奇数}\}$，$B=\{\text{正偶数}\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{\text{正奇数}\}\cap\{\text{正偶数}\}=\varnothing$.

对于任何集合 A、B、可证明下列结论成立：

(1) $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap A=A$，$A\supseteq A\cap B$，$B\supseteq A\cap B$；

(2) 交换律：$A\cap B=B\cap A$；

(3) 结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

2. 并集 设集合 $A=\{2,3\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{2,3,4,6\}$，容易看出集合 C 是由属于 A 或属于 B 的所有元素合并在一起而组成的集合，对于这样的集合，我们定义如下.

定义 设 A 和 B 是两个集合，属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的**并集**（或和集）.

记作：$A\cup B$，读作"A 并 B"，即：

$$A\cup B=\{x \mid x\in A,\text{或 } x\in B\}$$

这里，"$\cup$"是求两集合的并集的运算符号.

集合 A 与 B 的并集，可用图 1-3 中的阴影部分表示.

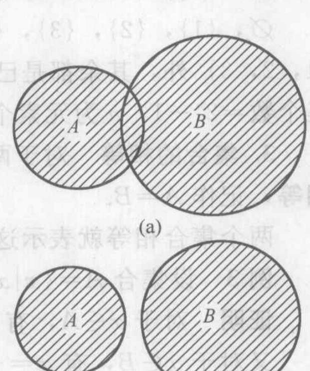


图 1-3 并集 $A\cup B$

例 8 设 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{0,-1,-2\}$，求 $A\cup B$.

解 $A\cup B=\{0,1,2\}\cup\{0,-1,-2\}=\{-2,-1,0,1,2\}$.

例 9 设 $A=\{\text{有理数}\}$，$B=\{\text{无理数}\}$，求 $A\cup B$.

解 $A\cup B=\{\text{有理数}\}\cup\{\text{无理数}\}=\mathbf{R}$

对于任何集合 A、B、C，可以证明下列结论成立：

(1) $A\cup\varnothing=A$，$A\cup A=A$，$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$；

(2) 交换律：$A\cup B=B\cup A$；

(3) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

(4) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

例 10　设 $A=\{1,2,4,5,9\}$，$B=\{3,6,7,8,10\}$，$C=\{3,5,7\}$，求：(1) $A\cup B$；(2) $A\cap B$；(3) $A\cup(B\cap C)$.

解　(1) $A\cup B=\{1,2,4,5,9\}\cup\{3,6,7,8,10\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$；

(2) $A\cap B=\{1,2,4,5,9\}\cap\{3,6,7,8,10\}=\varnothing$；

(3) 因为　$B\cap C=\{3,6,7,8,10\}\cap\{3,5,7\}=\{3,7\}$，

所以　$A\cup(B\cap C)=\{1,2,4,5,9\}\cup\{3,7\}=\{1,2,3,4,5,7,9\}$.

3. 全集和补集　在研究集合与集合之间的关系时，我们所研究的集合常常都是某个给定集合的子集，这个给定的集合称为**全集**，记作 Ω，也就是说全集包括了此时我们所研究的集合的全部元素.

例如，在求方程 $x^2-2=0$ 的实数解集时，实数集 $\mathbf{R}$ 就是一个全集，而方程的实数解集只是 $\mathbf{R}$ 的一个子集.

在图 1-4 中，长方形表示全集 Ω，圆表示它的一个子集 A，长方形中除圆外的阴影部分表示的集合，我们给出下面定义.

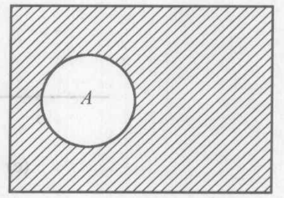


图 1-4　补集$\complement_\Omega A$

定义　设 Ω 为全集，A 为 Ω 的子集，由 Ω 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称为集合 A 在集合 Ω 中的**补集**或**余集**，记作 $\complement_\Omega A$（或 $\Omega\setminus A$），读作“A”补，即

$$\complement_\Omega A=\{x\mid x\in\Omega\text{ 且 }x\notin A\}$$

由补集的定义易知：

$$A\cup(\complement_\Omega A)=\Omega,\ A\cap(\complement_\Omega A)=\varnothing,\ \complement_\Omega\Omega=\varnothing,\ \complement_\Omega\varnothing=\Omega,\ \complement_\Omega(\complement_\Omega A)=A.$$

补集是相对全集而言的，同一个集合，由于所取的全集不同，它的补集也不同.

（牢记集合间的“交”、“并”、“补”运算定义以及各运算符号的表示．A 的补集采用$\complement_\Omega A$.）

例如，设 $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3,5\}$，则$\complement_\Omega A=\{2,4\}$；若 $\Omega=\{1,3,5,7,9\}$，则$\complement_\Omega A=\{7,9\}$.

例 11　设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，求证：(1) $\complement_\Omega(A\cup B)=(\complement_\Omega A)\cap(\complement_\Omega B)$；(2) $\complement_\Omega(A\cap B)=(\complement_\Omega A)\cup(\complement_\Omega B)$.

证明　(1) 因为　$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，所以　$\complement_\Omega(A\cup B)=\{7,8,9,10\}$.

又$\complement_\Omega A=\{2,4,6,7,8,9,10\}$，$\complement_\Omega B=\{1,3,5,7,8,9,10\}$，所以　$\complement_\Omega A\cap\complement_\Omega B=\{7,8,9,10\}$.

因此，$\complement_\Omega(A\cup B)=\{\complement_\Omega A\}\cap(\complement_\Omega B)$.

(2) 因为　$A\cap B=\varnothing$，所以　$\complement_\Omega(A\cap B)=\complement_\Omega\varnothing=\Omega$.

又$(\complement_\Omega A)\cup(\complement_\Omega B)=\{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}=\Omega$，

因此，$\complement_\Omega(A\cap B)=(\complement_\Omega A)\cup(\complement_\Omega B)$.

顺便指出，上例的结果对于任意两个集合 A、B 都成立.

六、区间

变量一般都有一定的变化范围，数学中常用“区间”表示变量的变化范围．下面介绍几种常用的区间与记号.

设 a、b 为任意两个实数，且 $a<b$. 我们规定：

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合 $\{x|a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)；

(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$；

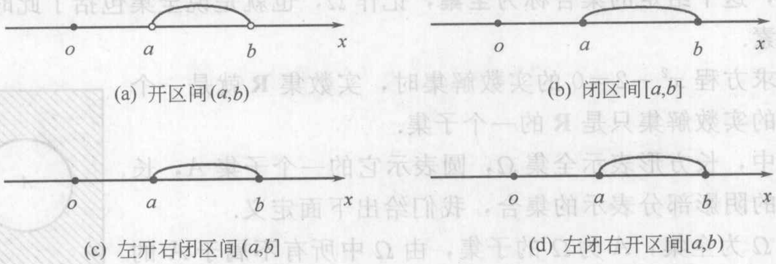
(3) 满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 称为**左开右闭区间**，记作 $(a,b]$；

(4) 满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的集合 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 称为**左闭右开区间**，记作 $[a,b)$.

(🄸牢记各种区间的记号.)

左开右闭区间与左闭右开区间统称为**半开半闭区间**，这里的实数 a、b 分别称为区间的左、右端点.

在数轴上，这些区间都可以用一条以 a 和 b 为端点的线段表示. 端点间的距离叫做**区间的长**. 上述四种区间分别表示如下，图 1-5 中，区间闭的一端标以实心点，开的一端标以空心点.



(a) 开区间 (a,b)　(b) 闭区间 $[a,b]$

(c) 左开右闭区间 $(a,b]$　(d) 左闭右开区间 $[a,b)$

图 1-5　区间示意

区间长有限的区间，叫做**有限区间**，上述四种区间都是有限区间；区间长为无限的区间叫做**无限区间**.

无限区间有如下几种：

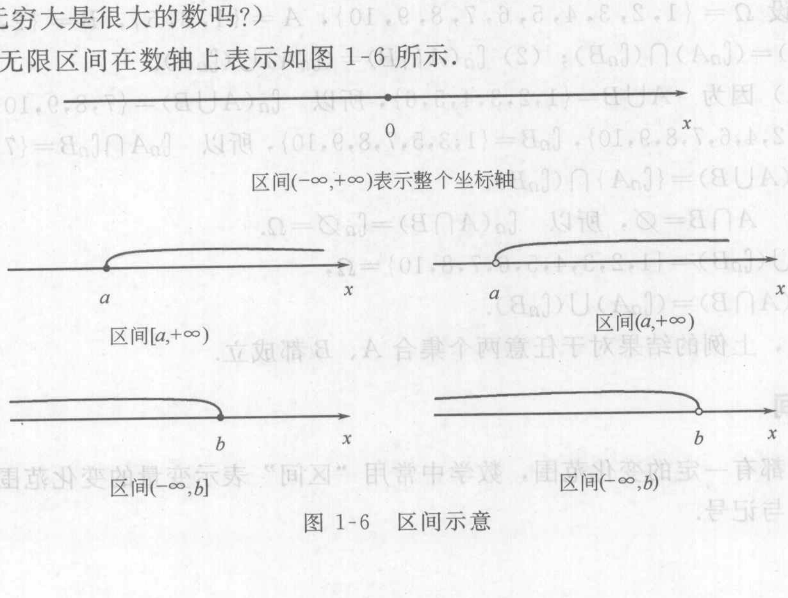
(1) 区间 $[a,+\infty)$ 表示数集 $\{x|x\geqslant a\}$；　(2) 区间 $(a,+\infty)$ 表示数集 $\{x|x>a\}$；

(3) 区间 $(-\infty,b]$ 表示数集 $\{x|x\leqslant b\}$；　(4) 区间 $(-\infty,b)$ 表示数集 $\{x|x<b\}$；

(5) 区间 $(-\infty,+\infty)$ 表示数集 **R**.

在这里，记号"∞"读作"无穷大"，它不表示一个确定的实数，只表示某变量变化时，绝对值越变越大，无止境. "$+\infty$"表示某变量沿正方向无限变化，"$-\infty$"表示沿负方向无限变化. (🄿无穷大是很大的数吗?)

上述 5 种无限区间在数轴上表示如图 1-6 所示.



区间 $(-\infty,+\infty)$ 表示整个坐标轴

区间 $[a,+\infty)$　区间 $(a,+\infty)$

区间 $(-\infty,b]$　区间 $(-\infty,b)$

图 1-6　区间示意

例 12　用区间表示不等式组$\begin{cases}7x-8>6\\5x+1\leqslant 26\end{cases}$的解集.

解　原不等式组可化为$\begin{cases}7x>14\\5x\leqslant 25\end{cases}$. 解得，$\begin{cases}x>2\\x\leqslant 5\end{cases}$即 $2<x\leqslant 5$，用区间可表示为：$(2,5]$.

(!解集可用“区间”、“不等式”、“集合”三种中任一种表示!)

本节关键词

集合　表示法　子集　真子集　运算　区间

习 题 1-1

1. 用列举法或描述法表示下列集合.

(1) 大于 2 小于 14 的奇数；　(2) 能被 3 整除的自然数；

(3) 方程 $x^2+5x+6=0$ 的解集；　(4) 直线 $y=2x+1$ 上的所有的点；

(5) 数轴上介于 1 与 3 之间的点的集合.

2. 用适当的符号 $\in$、$\notin$、$\subsetneqq$、$\subseteq$、$=$ 填空.

(1) -2 ______ $\mathbf{N}$，　2 ______ $\mathbf{N}$，　0 ______ $\mathbf{Z}^{+}$，

$\sqrt{3}$ ______ $\mathbf{Q}$，　$\sqrt{3}$ ______ $\mathbf{R}$，　$-\dfrac{3}{2}$ ______ $\mathbf{Q}$；

(2) a ______ $\{a\}$，　$\varnothing$ ______ $\{0\}$，　$\{a\}$ ______ $\{a,b\}$，

$\mathbf{Z}$ ______ $\mathbf{Q}$，　a ______ $\{b,c,d\}$；

(3) $\{2,3\}$ ______ $\{3,2\}$，　$\{a\}$ ______ $\{a\}$，　$\{a,b\}$ ______ $\{a,b,c\}$.

3. 设集合 $A=\{1,3,5,7,9\}$，写出 A 的所有子集，并指出哪些是真子集.

4. 讨论下列集合间的包含关系.

(1) $A=\{$正偶数$\}$，$B=\{4$ 的正整数倍数$\}$；　(2) $A=\{$长方形$\}$，$B=\{$平行四边形$\}$.

5. 填空.

(1) 已知两个非空集 $A\neq B$，则：

$A\cap B$ ______ A，　$A\cap B$ ______ $B\cap A$，　$A\cup B$ ______ A，　$A\cap B$ ______ $A\cup B$；

(2) 在全集 Ω 中，设 $A\subseteq B\subset\Omega$，则：

$\complement_{\Omega}(A\cap B)=$ ______，　$\complement_{\Omega}(A\cup B)=$ ______，　$A\cap(\complement_{\Omega}B)=$ ______；

(3) 设 $A=\{2,3,4,5\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，则：

$A\cup B=$ __________，$A\cap B=$ __________.

6. 设 $A=\{x\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，并在数轴上表示出来.

7. 设 A 表示某校全体学生的集合，B 表示该校全体教工的集合，C 表示该校全体男学生的集合，D 表示该校全体女学生的集合，指出下列集合是怎样的集合？

(1) $A\cup B$；　(2) $A\cap C$；　(3) $C\cup D$.

8. 设 $\Omega=\{$小于 10 的正整数$\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6,7\}$，求$\complement_{\Omega}A$，$\complement_{\Omega}B$，$A\cup(\complement_{\Omega}B)$，$(\complement_{\Omega}A)\cap B$.

9. 某居民区的住户中，订日报的有 136 户，订晚报的有 57 户，其中两报都订的有 32 户，试计算该居民区中至少订一种报纸的住户数.

10. 将下列数集用区间表示.

(1) $\{x\mid -1\leqslant x<5\}$；　(2) $\{x\mid x\geqslant 0\}$；　(3) $\{x\mid x<1\}$.