普通高等教育“十一五”国家级规划教材

普通高等院校大学数学系列教材

微积分（上）

修订版

萧树铁　扈志明　编著

清华大学出版社

http://www.tup.com.cn

普通高等教 … 划教材

普通高等院校大学数学系列教材

微积分（上）

修订版

萧树铁　扈志明　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

全书分上、下两册.上册包括函数、函数的极限、函数的导数、微分与不定积分、定积分、空间解析几何 6 章内容和一个附录,附录包括初等代数中的几个问题、平面解析几何、集合与逻辑符号等内容.书中每节都配有适量的习题,每章配有部分具有一定难度的复习题,书末对大部分题目都给出了答案或提示.

本书结构严谨、例题与插图丰富、叙述直观清晰、通俗易懂,可供普通高等院校非数学专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分.上/萧树铁,扈志明编著.—修订版.—北京:清华大学出版社,2008.4
(普通高等院校大学数学系列教材)
ISBN 978-7-302-17209-3

Ⅰ.微… Ⅱ.①萧… ②扈… Ⅲ.微积分—高等学校—教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 034813 号

责任编辑:佟丽霞 王海燕
责任校对:刘玉霞
责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社 **地 址**:北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn **邮 编**:100084
社 总 机:010-62770175 **邮 购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62772015,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:北京国马印刷厂
经 销:全国新华书店
开 本:170×230 **印 张**:12 **字 数**:212 千字
版 次:2008 年 4 月第 1 版 **印 次**:2008 年 4 月第 1 次印刷
印 数:1~3000
定 价:17.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:010-62770177 转 3103 产品编号:029321-01

序

大学数学系列课程“微积分”、“线性代数”和“概率论与数理统计”是大学理工、管理等各专业的重要基础课程.随着我国经济的高速发展,高等教育的日益普及,需要培养出大批应用型工程技术人员.同重点大学相比,以培养应用型人才为主的普通高校在教学目标、教学内容、教学方式等方面都有很大的不同.而这类普通高校学生规模更大,但师资力量和教学条件却相对较弱.因此,编写高质量的面向此类高校的教材,对于促进教学改革,提高我国高等教育的教学质量,更具迫切性和非常重要的现实意义.

为此,我们组织清华大学、北京大学、哈尔滨理工大学、北京联合大学等高校的老师,编写了这套面向普通高校的“普通高等院校大学数学系列教材”,包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》及与每门课程主教材配套的教师用书(习题详细解答)、电子教案和学习指导.本套教材的作者均长期从事大学数学的教学工作,学术水平高,教学经验丰富,并编写出版过相关的教材,对大学数学系列课程的教学内容和课程体系改革有深入的研究.同时,来自于普通高校教师的参与使本套教材更有针对性,更符合当前这类高校培养目标的要求和基础数学教学的实际情况.

本套教材编写的主要原则是:强调各门课程整体的理念、基本方法和适当的应用.由于这三门课都属于基础课程,所以对其内容的改革应当慎重.这套教材内容涵盖了教育部发布的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”.在取材方面,不是简单地对内容进行增删,而是在努力深入的基础上尽量做到“浅出”.

本套教材的全部讲授时间大约为250学时,其中微积分

140 学时、线性代数 50 学时、概率论与数理统计 60 学时. 教师还可以根据本校的实际情况对课时作一定的增减，重要的是每门课都应配置适当学时(例如，总学时的 1/3 左右)的习题课.

清华大学出版社对本套教材的编写和出版给予了各方面的支持，佟丽霞编辑为本书做了大量的组织和文字工作.

尽管作者都有良好的愿望和多年的教学经验，但由于这一工作的难度较大，时间又比较仓促，各方面的问题肯定不少. 欢迎广大师生和各方人士提出宝贵意见，以便进一步修改.

萧树铁

2006 年 4 月

前言

本书自2006年出版以来已连续印刷了4次. 同时收到不少的意见和建议.

最近在北京、南京、广州等地召开的有关普通高等院校微积分教学的研讨会上，也围绕这本教材进行了讨论. 在此基础上，我们对第一版进行了修订.

在本书第一版的“前言”中，我们提到了有关本书内容安排的原则. 在教学中如何具体地体现这些原则，当然有赖于使用本教材的广大师生的创造. 乘本书修订之机，这里再多说几句.

微积分这门课程，是一般大专院校绝大多数学生的必修课. 对其中一部分学生来说，也许是他们大学阶段惟一的一门数学课. 而在当今时代，数学修养已经是衡量一个人潜在能力的重要标志. 因此我们的重点应该是在这门课的教学中，力求使学者通过清晰的直觉和必要的推理，比较全面地、形象地理解这门课的基本内容，而不只是孤立地、表面地、形式地背诵一些结论.

本书的对象是普通高等院校的学生. 在现行的教育体制下，他们的入学分数一般是中等，入学后数学课的学时偏少. 因而需要把数学教学的内容作适当的精简. 但在精简中必须注意不能削弱对学生“清晰的直觉和必要的推理”这方面的训练；也不能把理应启发、引导学生思维的教材变成只剩下一堆彼此不相干的定理、公式和“题型”的堆砌.

为了落实这种理念，在本版中，我们进一步强调了基本内容之间的联系，即弄清新知识和原有知识之间的逻辑关系以及新知识彼此间的联系. 前者如初等数学和微积分之间的异同（不同之处在于有理数中的有限运算和实数中的无穷运算，

而其中很多运算规则又是相同的)，一元微积分和二元微积分之间的异同；后者如可导与可微，导数与积分(都是利用无穷小化不均匀为均匀，但一个是无穷小之商，另一个是无穷小的无穷和)，以及各种积分(一维定积分，二维曲线积分，二重积分等)的牛顿-莱布尼茨公式等. 此外，本书还尽可能从多种角度来阐明一些基本概念和方法，例如求定积分时不同微元的选取，求多元函数极值中必要条件的引出等. 希望这些安排能有助于学者对微积分的全面理解.

清晰的直觉除了有助于得到真正的知识以外，也是记住这些知识的重要方法. 微积分是一门以极限为主要工具，以函数的各种性质为主要研究对象的基础课. 应该尽可能使学者学完后，在头脑中留下一些比较鲜明的形象. 所以本书增加了一些曲线和曲面的图形，把一些通过推理所得的函数的重要性质体现于典型的图像之中(诸如曲线的升降、对称、凹凸、弯曲、连续、光滑、微分和积分中值公式等). 对一些一般书中往往只给出定义的梯度、散度和旋度这些重要的概念，本书也说明了它们的几何与物理意义.

为了便于读者自学，在本版中，还增加了一批比较简明的例题和习题. 在内容方面，增加了一节“广义积分”.

对于对本书提出意见的读者，编者在此表示诚挚的谢意，并希望更多的读者对本书提出批评和建议.

编　者

2007 年 12 月

第一版前言

微积分（上）

本书是为普通高等院校非数学专业的学生编写的. 考虑到这类院校学生的特点，这本教材从内容上作了一些改动. 由于微积分这门课程已有近 300 年的历史，经过长时期的锤炼，对内容作重大精简的空间已经很小了. 故所作的改动主要是相对当前流行的教材而言的.

时下国内流行的教材基本上是在 20 世纪 50 年代前苏联各类“高等数学”教材的基础上加工精练而成的，其内容大致都包括两部分：微积分及数学分析，前者已被历史证明是一个强有力的工具，后者主要为前者奠定一个坚实的理论基础，其自身已发展为数学的一个强大的分支. 在一般情况下，它们各有其重要性，但从教学的角度来看，作为教学内容，对不同的学习者，二者之间的分寸的确不易把握.

笛卡儿曾经说过，只有两种方法使人们得到真正的知识：清晰的直觉和必要的推理. 这句话对微积分的教学很有现实意义. 直觉必须尽可能“清晰”，这是对微积分教材的基本要求，尽管做到这一点的难度很大；而推理则应根据不同的对象确定其“必要”的程度. 总的来说，应该在教学内容的安排上，尽可能使学者都能体会到这两者的作用. 通过学习，能把微积分看成一个整体. 所谓必要的推理，就是根据它们在整体中所处的地位给它一个合适的安排，而不是使学生只知道一些名词、一些彼此孤立的定理及其证明.

本书力图按此原则来安排内容. 首先，对本书的核心内容——微分和积分基本上使其“返璞归真”. 例如，为了描述不均匀（非线性）变化和不规则几何图形的某些性质，引入无穷小量及线性逼近的概念（微分）是很直观很自然的，但它的合理性则需要大量的推理，这就是极限理论. 本书强调了前

者，而对极限理论只作了我们认为是起码必要的推理．同样，在积分部分我们没有从黎曼-达布和出发而直接从微分的反运算入手引入了定积分并推出了牛顿-莱布尼茨公式，这样不仅节省了课时，而且突出了微积分的统一性，突出了微积分应用的有力工具——微元法．

对于微积分早期描述函数性态的一些直观性较强的命题，本书尽可能加以证明，以完成一个从直观到理性的认识过程，例如罗尔定理，微分和积分的中值定理，微积分基本定理，等等；有一些属于数学分析范畴的命题则只给出直观的描述而不加证明，例如闭区间上连续函数的某些性质等；还有少数直观性不强，但很有用的内容，例如洛必达法则，也给出了必要的推理说明．此外，在进行推理前，应说明这种推理的必要性，例如极限的惟一性，泰勒公式等．

人们得到的知识还必须在使用中得到巩固和深化，尤其是像微积分这种基础性的知识，因此计算和应用应该是不可缺少的内容．除了较多的例题之外，本书还附有大量的习题，这就需要有相应的习题课加以配合．近年来基本上取消习题课的消极后果已经有所体现，应当很好总结一下．

书中带 * 号的小字部分是供学生阅读的，不必在课堂上讲授．

编写本书的目的，只是试图为普通高等院校的学生提供一本比较合适的教材．由于我们自己在这方面的经验也很缺乏，因此特别需要广大师生的批评帮助，以期能不断改进．

编　者

2006 年 1 月

目录

微积分（上）

函　数

第1章

在中学数学中，我们所学的内容基本上是一些确定性的、有限步骤的、有理数的四则运算及其反运算（解方程）；还有与此相关推理的逻辑合理性. 在大学的基础数学课（微积分、线性代数、随机数学）中，我们将要学习的主要思想是：有关无穷的运算、数学结构的研究和随机性的研究. 其中微积分的主要内容是无穷变动的量的研究.

首先从我们研究的基本量——数开始. 我们知道，如果 p,q 是两个正整数，那么分数 $\frac{p}{q}$ 就表示一个有理数. 任何分数都可以在十进制中表示为有限小数或无穷循环小数，例如 $\frac{1}{4}=0.5$，$\frac{1}{3}=0.333\cdots$. 反过来，任何有限或无穷循环小数也都可以表示为分数，例如，$1.234=\frac{1234}{1000}$，$0.1616\cdots=\frac{16}{99}$. 由于有理数就是分数，所以任何有理数一定可以表示为有限或无穷循环小数.

* 有限小数可以看成是无限循环小数的一种特例. 例如：$0.123=0.122999\cdots=\frac{123}{1000}$.

在初等数学中，我们已经熟知正负有理数和 0 之间的有限次四则运算. 现在就面临两个问题：一个是有理数是否足以表示任何量？另一个问题是有理数经过无限（无穷）次的四则运算，所得的结果是否仍是有理数？为此看下面三个例子.

例 1.1　$\sqrt{2}$不是有理数.

解　现在来看一个特定的量 x，它代表边长为 1 的正方形的对角线长度. 根据勾股定理，表示这个量的数 x 满足方程

$x^2=1^2+1^2=2$，所以 $x=\sqrt{2}$（长度总是正数）. 下面我们来证明 x 不是一个有理数. 也就是要证明以下的命题：

"对任意两个除了 1 以外没有公因数的正整数 p,q，都有 $x\neq\frac{p}{q}$".

我们利用反证法来证明. 也就是要证明下列命题：

"如果有正整数 p,q 满足 $x=\frac{p}{q}$，则 p,q 必有 1 以外的公因数".

证明如下：

设存在正整数 p,q 满足 $x=\frac{p}{q}$，即 $x^2=\frac{p^2}{q^2}=2$. 于是 $p^2=2q^2$，即 p^2 是一个偶数，从而 p 本身也是一个偶数，记为 $2r$. 这样就有 $4r^2=2q^2$，或 $q^2=2r^2$；这说明 q^2 是一个偶数，从而 q 也是一个偶数. 这样，p,q 都是偶数，它们就以 2 为公因数. 证完.

由此可见，$x=\sqrt{2}$不是一个有限或无限（无穷）循环小数，它只能是一个无限（无穷）非循环小数. 即它可以表示为 $a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，其中对任意一个 $n(n\neq 0)$，a_n 都可以确定为 $0,1,2,\cdots,9$ 中的某一个数.

* 一个无限非循环小数都可以看成是无穷多个有理数之和，例如

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots.$$

一个无限非循环小数叫做**无理数**，我们常见的如$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}+1$，π 等都是无理数. 有理数和无理数一起，总称为**实数**.

有很多方法可以计算 $x=\sqrt{2}$. 当然，用任何方法算出来的必然是一个无限非循环小数. 通常我们取它的小数点后 n 位数（是一个有理数）来近似地表示，并称为 x 的有理近似值. 例如取 $n=4$，x 的有理近似值就是 1.4142，取 $n=8$，这个有理近似值就是 $x=1.41421356$. 小数点后面的位数取得越多就越精确. 我们虽然不知道 x 确切的值，但利用 $x^2=2$，可以看出有理近似值的精确程度. 例如 $1.4142^2=1.9999$，$1.41421356^2=1.99999999$，后者与 2 之差不超过 10^{-8}. 理论上说，如果取$\sqrt{2}$小数点后 n 位数 $1.a_1a_2\cdots a_n$ 作为它的近似值，只要取 n 充分大，那么这二者之差的绝对值可以要多小就有多小. 这种现象通常用下面的术语来概括："当 n 趋于无穷（无限增大）时，有限小数（有理数）$1.a_1a_2\cdots a_n$ 以实数$\sqrt{2}$为其极限". 后面我们将讨论这句话的确切含义.

有理数之间的四则运算是我们熟知的，而实数之间的四则运算就以它们的有理近似值来进行.

微积分以研究实数的四则运算为基础，并在此基础上着重研究函数的运算.

例 1.2（刘徽的割圆术） 我们知道，半径为 1 的圆（单位圆）的面积是 $\pi=3.141592\cdots$，已经证明它是一个无理数. 早在公元 3 世纪的魏晋时代，刘徽就对它给出了一个算法，称为“割圆术”. 他的想法是用圆内接正多边形来近似地表示单位圆的面积，用现代初等数学的语言介绍如下.

如图 1.1，从单位圆的内接正 6 边形开始，接着对正 12 边形，正 24 边形，…，正 3×2^n 边形求其面积.

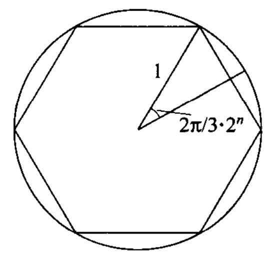

图 1.1

从图上可以看出，正 3×2^n 边形的面积是

$$A_n = 3\times 2^n\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3\times 2^n}=\frac{\pi\sin\dfrac{2\pi}{3\times 2^n}}{\dfrac{2\pi}{3\times 2^n}}$$

$$=\frac{\pi\sin x_n}{x_n},$$

其中 $x_n=\frac{2\pi}{3\times 2^n}$，仿照例 1.1 的说法，当 n 无限增大时它以 0 为极限。在本书的后面可以看到：当 n 无限增大时，x_n 趋于 0，而 $\frac{\sin x_n}{x_n}$ 则趋于 1，所以 A_n 以 π 为极限.

这又是一个牵涉到无穷运算的问题. 按刘徽的说法是：“割之弥细（n 取得越大），失之弥少（圆面积与内接正 n 边形面积之差越小）. 割之又割（n 不断增大），以至于不可割（理论上这点办不到）：则与圆合体，而无所失矣”.

例 1.3（芝诺的悖论） “一个人想从一点 A 沿直线走到 B 是永远不可能的.”

芝诺争辩说：无妨假定 A，B 之间的距离为 1. 一个人从 A 出发，在到达 B 以前，一定先要经过 A，B 之间的中点，也就是先要走完 $\frac{1}{2}$ 的距离；然后从此中点出发再往 B 点走；而在到达 B 以前，又必须先经过这一半路程的中点，也就是再要先走完 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 的距离；然后再往前走，又必须先走完 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ 的距离。依此类推，此人在到达 B 点之前，必须先走完 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ 这么多距离. 注意：这是一个无穷的步骤. 人生有限，所以终其一生，此人永远到不了 B 点.

* 这是古希腊哲学家芝诺(Zeno)所提的有名的悖论. 在中国古代的《庄子—天下篇》中也有"一尺之捶,日取其半,万世不竭"的类似记载.

在现实中当然不会出现这种情况,但这种论点在逻辑上也说得通. 问题就出在"无穷"这个概念上:"无穷多个有理数之和"是什么意思? 如果把无穷多个有理数$\frac{1}{2}$加起来,结果是什么? 又如果把无穷多个数$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$加起来,结果又会是什么?

要回答这个问题,还得从"有限"多个有理数之和入手. 在第一种情况下,n个$\frac{1}{2}$加起来之和是$\frac{n}{2}$,而在第二种情况下,n个数$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^n}$之和$\Bigl($这是一个等比数列,公比为$\frac{1}{2}\Bigr)$就是$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2}\left(\dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right)=1-\frac{1}{2^n}$.

第一种情况的和$\frac{n}{2}$当n增大时也增大,而且它可以任意地大,只要n足够大. 而后一种情况的和数当n增大时虽然也增大,但它不能任意地大,因为不论n有多大,这个和数永远不会超过1,而且n越大,这个有限和数与有限数1之差越小. 或者说,这二者之差的绝对值可以"要多小就有多小",只要取n足够大. 按例1.1中的说法,当这个有限和的项数n无穷增长时,有限和的极限是1. 也就是说,在芝诺的悖论中,在任意给定的精确度范围内,此人所走过的距离不过是1. 所以如果他以无论多小的常速度v来走,他总可以在所要求的精度范围内走完全程.

这三个例子都牵涉到无穷(无限)的运算. 其对象都是有两组变动着的数,第二组数由第一组数确定(例如例1.2中的正多边形的边长和多边形的面积;例1.3中所走的次数和每次所走的距离),而要求的都是当第一组数按某种规律无穷变动时,第二组数变动的规律. 这里所说的"对象"和"规律"就是微积分研究的两个基本内容:函数和极限.

1.1 函数的概念与图形

1.1.1 函数的概念

在中学课本中,经常出现各种"公式",它们是一种表示某些数量之间关系的数学式子. 例如在运动学的等速直线运动(速度为常数v)中,质点所走的距