科学计算及其软件教学丛书/石钟慈主编

计算几何教程

王仁宏 李崇君 朱春钢◎编著

科学出版社
www.sciencep.com

科学计算及其软件教学丛书

计算几何教程

王仁宏　李崇君　朱春钢　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统介绍计算几何的理论与方法. 内容包括计算几何的数学基础、曲线曲面的基本理论、Bézier 曲线曲面、B 样条曲线曲面、有理 Bézier 曲线曲面与 NURBS 方法、细分方法以及径向基函数等.

本书可作为高等院校信息与计算科学专业的本科生教材, 也可作为计算数学学科硕士生、博士生相关课程的教材或参考书. 本书还可供从事计算机辅助几何设计、计算机图形学、图像处理及相关领域的科学技术工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

计算几何教程/王仁宏, 李崇君, 朱春钢编著 —北京: 科学出版社, 2008

(科学计算及其软件教学丛书)

ISBN 978-7-03-021486-7

I. 计… II. ①王… ②李… ③朱… III.计算几何-高等学校-教材 IV.O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 040730 号

责任编辑: 李鹏奇 李晓鹏 / 责任校对: 赵桂芬
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 6 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2008 年 6 月第一次印刷 印张: 24
印数: 1—4 000 字数: 456 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

《科学计算及其软件教学丛书》编委会

(以姓氏笔画为序)

《科学计算及其软件教学丛书》序

随着国民经济的快速发展，科学和技术研究中提出的计算问题越来越多，越来越复杂．计算机及其应用软件的迅猛发展为这些计算问题的解决创造了良好的条件，而培养一大批以数学和计算机为主要工具，研究各类问题在计算机上求解的数学方法及计算机应用软件的专业人才也越来越迫切．

1998 年前后，教育部着手对大学数学专业进行调整，将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹与控制专业合并，成立了“信息与计算科学专业”．该专业成立之初，在培养目标、指导思想、课程设置、教学规范等方面存在不少争议，教材建设也众说纷纭．科学出版社的编辑曾多次找我，就该专业的教材建设问题与我有过多次的讨论．2005 年 11 月在大连理工大学召开的第九届全国高校计算数学年会上，还专门讨论了教材编写工作，并成立了编委会．在会上，编委会就教材编写的定位和特色等问题进行了讨论并达成了共识．按照教育部数学与统计学教学指导委员会起草的“信息与计算科学专业教学规范”的要求，决定邀请部分高校教学经验丰富的教师编写一套教材，定名为“科学计算及其软件教学丛书”．该丛书涵盖信息与计算科学专业的大部分核心课程，偏重计算数学及应用软件．丛书主要面向研究与教学型、教学型大学信息与计算科学专业的本科生和研究生．为此，科学出版社曾调研了国内不同层次的上百所学校，听取了广大教师的意见和建议．这套丛书将于今年秋季问世，第一批包括《小波分析》、《数值逼近》等十余本教材．选材上强调科学性、系统性，内容力求深入浅出，简明扼要．

丛书的编委和各位作者为丛书的出版做了大量的工作，在此表示衷心的感谢．我们诚挚地希望这套丛书能为信息与计算科学专业教学的发展起到积极的推动作用，也相信丛书在各方面的支持与帮助下会愈出愈好．

石钟慈

2007 年 7 月

前 言

计算几何是 20 世纪 40 年代现代计算机出现后, 在计算机辅助设计、计算机辅助制造、计算机图形学以及图像处理等一系列重大应用驱动下, 逐步形成的一门几何分支学科.

计算几何是计算数学、逼近论、微分几何、代数几何以及计算机科学相互交叉的几何学分支. 它不仅在几何学上有重要的理论意义, 而且在计算机辅助设计与制造、计算机图形学、图像处理及其他相关领域有重要的实用价值.

本书较系统地介绍了迄今国际上较常用的计算几何方法. 包括 Bézier 曲线曲面、B 样条曲线曲面、有理 Bézier 曲线曲面与 NURBS 方法、细分方法以及径向基函数等. 为方便读者掌握这些方法, 本书还扼要介绍了一些相关的数学理论和方法. 它们为读者将来能够独立地提出新理论与新方法提供必要的前提.

我们感谢科学出版社《科学计算及其软件教学丛书》的帮助, 感谢国家自然科学基金委员会 20 多年来的一贯资助与帮助, 特别是近年来的多项相关资助 (如 No. 60533060, 10271022, 10171042, 60373093, 19871010, 69973010, 10726067, 10726068 等), 使我们得以长期坚持相关的研究工作并顺利完成本书的写作. 我们还要感谢大连理工大学对我们科研创新团队的支持与帮助. 没有以上的支持与帮助, 本书是难以面世的. 另外, 大连理工大学计算几何讨论班的博士生与硕士生为书稿的校对付出了辛勤的劳动, 作者也向他们表示诚挚的感谢.

本书的选材或内容难免会有不妥之处, 敬请专家、读者不吝指教, 编者将不胜感激.

编 者

2008 年 1 月于大连理工大学

数学科学研究所

目 录

第 1 章　计算几何的数学基础

计算几何, 计算机图形学, 计算机辅助几何设计间虽有一些共同点和联系, 但计算几何偏向于从几何学的角度来研究相关的几何问题. 计算几何是一门新兴的几何学, 它是与微分几何, 代数几何, 计算数学, 逼近论以及计算机科学相互交叉的一门学科.

本章介绍与计算几何有关的一些数学理论基础, 包括 Weierstrass 定理、最佳一致逼近、平方逼近、多项式插值、一元样条以及多元样条等内容. 有关计算几何基础的其他知识, 读者可以参阅文献 [1], [2].

1.1　Weierstrass 定理

在数学分析中, 最重要的函数类之一是连续函数类 $C[a,b]$ 与连续的周期函数类 $C_{2\pi}$. $C[a,b]$ 表示定义在某一闭区间 $[a,b]$ 上的一切连续函数的集合.

人们很早就注意这样的一个问题: 设 $f(x)\in C[a,b]$, 对于任给的 $\varepsilon>0$, 是否存在这样的多项式 $p(x)$, 使得

$$|p(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切 $a\leqslant x\leqslant b$ 一致成立? 1885 年 Weierstrass 证明了 $p(x)$ 的存在性. 1912 年, Bernstein 将满足这种条件的多项式构造出来. 为了介绍著名的 Weierstrass 定理, 首先给出以下引理.

引理 1.1.1　$\sum\limits_{k=0}^{n}(nx-k)^2\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x).$

证明　显然

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}x^k(1-x)^{n-k}\equiv[x+(1-x)]^n\equiv 1.$$

经简单计算, 可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}x^k(1-x)^{n-k}\\
=&\sum_{k=0}^{n}(n^2x^2+k^2-2nkx)\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}x^k(1-x)^{n-k}\\
=&\,n^2x^2+\sum_{k=0}^{n}k^2\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}x^k(1-x)^{n-k}-2nx\sum_{k=0}^{n}k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}x^k(1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$= n^2x^2 + \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + (1-2nx) \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= n^2x^2 + n(n-1)x^2 + (1-2nx)nx = nx(1-x).$$

定理 1.1.1(Weierstrass 定理)　*设 $f(x) \in C[a,b]$, 那么对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在这样的多项式 $p(x)$, 使得*

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Weierstrass 定理说明, $[a,b]$ 上的任何连续函数都可以用多项式来一致逼近. 关于这个著名的定理现在有很多不同的证法, 下面介绍 Bernstein 的构造性证明.

证明　不妨设定义区间 $[a,b] = [0,1]$. 事实上, 通过简单的线性变换 $t = (b-a)x + a$ 就可将 x 的定义区间 $[0,1]$ 变换成变量 t 的定义区间 $[a,b]$, 因此关于变量 x 的连续函数变成了关于变量 t 的连续函数. 因此只须在 $C[0,1]$ 上证明 Weierstrass 定理即可.

对于给定的函数 $f(x) \in C[a,b]$, 作如下的一串多项式:

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{1.1}$$

显然 $B_n^f(x)$ 为 n 次多项式.

对于 $[0,1]$ 中的每一固定的 x 及任一固定正整数 n, 令

$$\varepsilon_n(x) = \max \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|,$$

上式右端代表当 k 取所有合乎条件

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| < \left(\frac{1}{n}\right)^{1/4}$$

的正整数时所取得的最大差数. 根据 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的一致连续性, 可见必存在一串 $\varepsilon_n > 0$, 使得

$$\varepsilon_n(x) < \varepsilon_n \downarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

记

$$f(x) - B_n^f(x) = \sum{}' \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \lambda_{n,k}(x) + \sum{}'' \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \lambda_{n,k}(x),$$

其中, $\sum{}'$ 和 $\sum{}''$ 分别表示对满足如下条件的一切 k 所取和:

$$|k - nx| < n^{3/4}, \quad |k - nx| \geqslant n^{3/4},$$

而

$$\lambda_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

令

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|,$$

显然有

$$\begin{aligned}\left|f(x) - B_n^f(x)\right| &< \sum{}' \varepsilon_n \lambda_{n,k}(x) + 2M \sum{}'' \lambda_{n,k}(x) \\ &< \varepsilon_n + 2M \sum{}'' \lambda_{n,k}(x),\end{aligned}$$

而且利用引理 1.1.1, 可知

$$n^{3/2} \sum{}'' \lambda_{n,k}(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \lambda_{n,x}(x) = nx(1-x) \leqslant \frac{n}{4},$$

因此, $\sum'' \lambda_{n,k}(x) \leqslant \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/2}$, 则可得

$$\left|f(x) - B_n^f(x)\right| < \varepsilon_n + \frac{M}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}.$$

上列不等式的右端与 x 无关, 而且随着 n 的无限增大而趋于 0. 这就证明了多项式序列 $B_n^f(x)$ 对于 $f(x)$ 的一致收敛性. 因此, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总可以找到充分大的 N, 当 $n \geqslant N$, 并令 $p(x) = B_n^f(x)$, 则恒有

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x) - f(x)| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left|B_n^f(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

证毕.

定理 1.1.1 又称为 Weierstrass 第一定理, 它实际上正好解决了利用多项式组成的函数项级数来表示连续函数的问题. 在 Bernstein 的证法中, 不仅证明了近似多项式序列 $\{p_n(x)\}$ 的存在性, 而且还给出了构造 $\{p_n(x)\}$ 的具体方法. 事实上, $B_n^f(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 构成了函数 $f(x)(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 的一个近似多项式序列, 这种证明方法称为构造性的证明方法, 它比一般数学意义上纯粹的存在性证明方法更有价值.Weierstrass 第二定理阐述了 $C_{2\pi}$ 上的三角多项式逼近问题, 感兴趣的读者可以参考有关书籍.

1.2 一致逼近

上节所述的 Weierstrass 定理指出了有界闭区间上的连续函数可用多项式序列一致逼近. 大量的理论与实际问题要求人们研究如下问题: 对于指定的非负整数 n,

在次数不超过 n 的实系数多项式集合

$$\mathbb{P}_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,|\forall i, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

中寻求多项式 $p(x)$, 使得它与给定函数 $f(x) \in C[a,b]$ 的偏差

$$\Delta(p) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - p(x)|$$

尽可能的小. 这个问题称为 Tchebyshev 逼近问题或最佳一致逼近问题, 称 $\Delta(p)$ 为 $p(x)$ 与 $f(x)$ 的偏差. 显然 $\Delta(p)$ 非负, 则当 p 取遍 $\mathbb{P}_n$ 中所有的多项式时, 相应 $\Delta(p)$ 的集合必有下确界

$$E_n(f) = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \Delta(p) = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - p(x)|.$$

$E_n(f)$ 称为给定函数 $f(x)$ 的最小偏差或最佳逼近, 显然有

$$E_n(f) \geqslant E_{n+1}(f) \geqslant \cdots.$$

由 Weierstrass 定理, $E_n(f) \downarrow 0 (n \to \infty)$.

现在的问题是: 是否存在 $p^*(x) \in \mathbb{P}_n$, 使得

$$\Delta(p^*) = E_n(f)?$$

进一步, 如果存在, 那么它是否唯一? 关于存在性问题, 下述 Borel 存在定理给出了明确的回答.

1.2.1　Borel 存在定理

定理 1.2.1(Borel 存在定理)　*对任意给定的 $f(x) \in C[a,b]$, 总存在 $p^*(x) \in \mathbb{P}_n$, 使得*

$$\Delta(p^*) = E_n(f).$$

证明　由于 $E_n(f)$ 为 $\Delta(p)(\forall p \in \mathbb{P}_n)$ 的下确界, 因此对任给的 $\varepsilon > 0$, 必有 $p_\varepsilon(x) \in \mathbb{P}_n$ 使得

$$E_n(f) \leqslant \Delta(p_\varepsilon) < E_n(f) + \varepsilon.$$

特别地, 取 $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$($m$为正整数), 则存在 $p_m(x) \in \mathbb{P}_n$, 使得

$$E_n(f) \leqslant \Delta(p_m) < E_n(f) + \frac{1}{m}. \tag{1.2}$$

因此, 如果能证明多项式序列 $\{p_m\}$ 或它的某一子列一致收敛于某多项式 $p^*(x) \in \mathbb{P}_n$, 则于上式中令 $m \to \infty$, 即可证明

$$\Delta(p^*) = E_n(f).$$

下面证明可于 $\{p_m\}$ 中选取收敛的子列.

由 (1.2) 式可知 p_m 有界, 即

$$|p_m(x)| \leqslant |p_m(x) - f(x)| + |f(x)| \leqslant (E_n(f) + 1) + \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|.$$

进而可证

$$p_m(x) = a_{0,m} + a_{1,m}x + \cdots + a_{n,m}x^n$$

中的各系数 $a_{0,m}, a_{1,m}, \cdots, a_{n,m}$ 皆有界. 在 $[a,b]$ 中任取 $n+1$ 个互异点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, 并考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{0,m} + a_{1,m}x_0 + \cdots + a_{n,m}x_0^n = p_m(x_0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{0,m} + a_{1,m}x_n + \cdots + a_{n,m}x_n^n = p_m(x_n). \end{cases}$$

由 Cramer 法则, 可推出

$$a_{i,m} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & p_m(x_0) & \cdots & x_0^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & p_m(x_n) & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & x_0^i & \cdots & x_0^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & x_n^i & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}} = \frac{1}{\prod\limits_{t>s}(x_t - x_s)} \sum_{j=0}^{n} p_m(x_j) Q_j,$$

其中, Q_j 为分子行列式按第 $j+1$ 列展开时, 关于元素 $p_m(x_j)$ 的代数余子式. 从而可知 $a_{i,m}$ 有界, 即存在非负实数 $A \geqslant 0$, 使得

$$|a_{i,m}| \leqslant A, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

于是由 Bolzano-Weierstrass 定理, 可逐次选出 $n+1$ 个同时收敛的子序列 $\{a_{i,m_j}\}(i = 0, 1, \cdots, n)$, 使得

$$\lim_{j \to \infty} a_{i,m_j} = a_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

构造多项式

$$p^*(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

显然, 当 $j \to \infty$ 时, 多项式 $p_{m_j}(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $p^*(x)$. 由 $p^*(x) \in \mathbb{P}_n$, 则有

$$\Delta(p^*) \geqslant E_n(f),$$

如果还能证明

$$\Delta(p^*) \leqslant E_n(f),$$

则可以得到

$$\Delta(p^*) = E_n(f).$$

由 $p_{m_j}(x)$ 的取法, 可知

$$\Delta(p_{m_j}) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - p_{m_j}(x)| < E_n(f) + \frac{1}{m_j},$$

但是

$$\begin{aligned}\Delta(p^*) &= \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - p^*(x)| \\ &\leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - p_{m_j}(x)| + \max_{a \leqslant x \leqslant b} |p_{m_j}(x) - p^*(x)| \\ &< E_n(f) + \frac{1}{m_j} + \varepsilon_j.\end{aligned}$$

令 $j \to \infty$ 得到

$$\Delta(p^*) \leqslant E_n(f),$$

因此

$$\Delta(p^*) = E_n(f).$$

这就证明了定理.

1.2.2 最佳逼近定理

由 Borel 存在定理, 对任意给定的 $f(x) \in C[a,b]$, 总存在多项式 $p(x) \in \mathbb{P}_n$, 使得

$$\Delta(p) = E_n(f) = \inf_{q \in \mathbb{P}_n} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |q(x) - f(x)|.$$

这样的多项式 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 于 $\mathbb{P}_n$ 中的最佳逼近多项式.

以下探讨最佳逼近多项式的本质特征. 记

$$\varepsilon(x) = p(x) - f(x).$$

由于 $\varepsilon(x) \in C[a,b]$, 于是存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得

$$|\varepsilon(x_0)| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\varepsilon(x)| = \Delta(p),$$

x_0 称为 $p(x)$ 关于 $f(x)$ 的偏离点. 特别地, 如果 $\varepsilon(x_0)=\Delta(p)$(或 $-\Delta(p)$), 则称 x_0 为关于 $f(x)$ 的正 (或负) 偏离点.

如果 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的最佳逼近多项式, 则它关于 $f(x)$ 的正、负偏离点必同时存在. 采用反证法. 不妨假定最佳逼近多项式 $p(x)$ 无负偏离点存在. 于是存在一个足够小的正数 h, 使得

$$-E_n(f)+h\leqslant p(x)-f(x)\leqslant E_n(f),\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

因而在 $[a,b]$ 区间上, 有

$$-E_n(f)+h/2\leqslant[p(x)-h/2]-f(x)\leqslant E_n(f)-h/2,$$

这表明 $\Delta(p-h/2)<\Delta(p)$, 它与 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的最佳逼近多项式矛盾.

为了给出最佳逼近多项式的本质特征, 首先给出如下的 Vallée-Poussin 定理.

定理 1.2.2(Vallée-Poussin) *设 $f(x)\in C[a,b], p(x)\in\mathbb{P}_n$, 且 $\varepsilon(x)=p(x)-f(x)$ 于 $[a,b]$ 中的点列*

$$x_1<x_2<\cdots<x_N$$

上取异于零的正负相间值 $\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,(-1)^{N-1}\lambda_N$(不妨设诸 $\lambda_j>0$), 且 $N\geqslant n+2$, 则对任一 $q(x)\in\mathbb{P}_n$, 均有

$$\Delta(q)\geqslant\min\{\lambda_1,\cdots,\lambda_N\}.$$

证明 采用反证法. 假设结论不成立, 即存在某 $q(x)\in\mathbb{P}_n$, 使

$$\Delta(q)<\min\{\lambda_1,\cdots,\lambda_N\}. \tag{1.3}$$

考察

$$\eta(x)=p(x)-q(x)=[p(x)-f(x)]-[q(x)-f(x)].$$

因为

$$\Delta(q)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|q(x)-f(x)|<\min\{\lambda_1,\cdots,\lambda_N\}.$$

从而

$$\mathrm{sign}\eta(x_j)=\mathrm{sign}(p(x_j)-f(x_j)),$$

即 $\eta(x)$ 于点列 $x_1<x_2<\cdots<x_N$ 上交错变号. 由连续函数的介值定理, $\eta(x)$ 于 $[a,b]$ 内至少有 $N-1\geqslant n+1$ 个零点, 但 $\eta(x)\in\mathbb{P}_n$, 所以 $\eta(x)\equiv 0$, 即 $p(x)\equiv q(x)$. 这与反证法假设 (1.3) 式矛盾. 定理得证.

下面给出著名的 Tchebyshev 最佳逼近定理, 它刻画了最佳逼近多项式的本质特征.