

数学问题论

S H U X U E W E N T I L U N

■ 汪文贤 著

研究出版社

数学问题论

S H U X U E W E N T I L U N

■ 汪文贤 著

研究出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学问题论 / 汪文贤著.
—北京: 研究出版社, 2007. 8
ISBN 978-7-80168-317-5

I. 数...

II. 汪...

III. 数学问题—研究

IV. 01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 125152 号

责任编辑: 童 星

责任校对: 严 赳

数 学 问 题 论

汪文贤 著

研究出版社出版发行

(北京 1746 信箱 邮编: 100017 电话: 010-63097512)

杭州余杭人民印刷有限公司印刷

开本: 850 毫米 × 1168 毫米 1/32

印张: 9 字数: 225 千字

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1-1000

ISBN 978-7-80168-317-5

定价: 18.00 元

本社版图书如有印装错误可随时退换

内容提要

本书内容包括数学问题的概念、性质、形式、意义和源泉,数学问题的提出、解决、发展和教育等十个部分.全书力求以辩证唯物主义为指导,以数学问题为核心,充分展示了数学问题在数学发展中的作用.在重视数学问题理论阐述的同时,还给出了大量的数学问题实例;并突出了“揭示数学问题的实质——探索数学问题的源泉——提出数学问题的方法——分析数学问题的形式——解决数学问题的教学——发展数学问题的质量——进行数学问题的教育”这样一条主线.

本书可作为师范数学教育专业学生相关课程的教材和中小学数学教师的参考书,也可供从事数学和数学教育研究的人员使用.

序

美国数学家“问题是数学的心脏”的名言，形象地说明了数学问题对于数学的重要性。可以说，一切科学都始于问题，但是，数学问题对于数学的发展的作用则更为明显。例如，著名数学家的23个数学问题，就影响了数学整整一个世纪；而且，这种影响在可预见的将来，也还会继续着。正是由于数学问题的重要作用，在科学和技术快速发展的今天，对它的研究，越来越受到人们的关注。

长时间来，我国数学工作者和数学教育工作者一直注意对数学问题的研究，尤其是20世纪70年代以来，取得了许多令人瞩目的成果。但是，据我所知，对数学问题作系统全面论述的著作和教材并不多见。

汪文贤先生长期从事数学教育工作，有丰富的教学实践经验，对数学问题的理论有深入的研究，以此为基础而成的《数学问题论》，比较系统全面地论述了数学问题研究的各个方面。我有幸先睹书稿，颇感受益匪浅。相信它的出版，对数学问题的继续深入研究，对开展数学问题教育都有积极的促进作用。

我对数学教育研究知之甚少，对数学问题的研究也不多。因此，汪先生嘱我写序，实感惶恐。而盛情难却，不敢违命，故做以上数语，是算为序。

于秀源

2007.2 于衢州

（序作者系原杭州师范学院副院长，浙江大学和山东大学博士生导师，数论和密码学专家）

前 言

数学问题论是研究数学问题的理论.其基本内容包括数学问题的概念和性质,数学问题的意义、形式、源泉、提出和解决,数学问题的发展、教育等.

数学的真正组成部分是问题和解,而问题是数学的心脏,美国数学家哈尔莫斯如是说.是的,问题是数学的心脏,是推动数学发展的真正动力.数学家存在的理由,就是不断提出新的数学问题,并设法解决这些问题.

科学巨匠爱因斯坦认为,发现一个问题往往比解决一个问题更重要.事实上,发现和提出数学问题,或判断一个问题是否属于数学问题,是解决数学问题的第一步.我国著名数学教育家张奠宙教授曾提到过这样一个例子:我国的一名留美学生在研究一个问题时找不到头绪,而一名美国学生判断出那是一个微积分问题,于是我国留学生很快利用微积分把它解决了.论文发表时美国学生的名字写在前面,因为他首先提出了解决问题的方向,没有他的判断,我国留学生的微积分再好也没有用武之地.这个例子说明了这样一个事实,即没有发现问题而只有解决数学问题的能力,只能给人家打下手.由此可知,研究讨论数学问题,具有重要的意义.而建立数学问题理论,则有助于数学问题研究的深入推进.

数学问题是什么样的问题呢?要回答这一问题,可以说既易又难.说易,那是因为我们可以顾名思义,说数学问题是关于数学科学的问题,也即具有数学性质的科学问题.这样回答基本上也就

差不多了.说难,那是因为数学问题从量上说无穷无尽,从质上看又千差万别.但是从逻辑上说,我们首先要搞清楚什么是问题,什么是科学问题,然后才能去讨论什么是数学问题,数学问题又具有怎样的性质.

数学的基本问题有哪些?这又是一个我们必须搞清楚,而又不易搞清楚的问题.

我们只要看最简单的数学——算术,就可以明白这一道理.算术,这是我们最早接触并学习的数学,是数学最基础的部分.关于算术,亚历山大洛夫在《数学——它的内容、方法和意义》中就提出如下这样一些问题:

1. 算术的抽象概念是怎样产生的?反映了现实世界中的什么东西?
2. 为什么算术结论如此令人信服和确定不移?
3. 为什么算术尽管概念是抽象的,却能有这样广泛的应用?
4. 数学发展的动力是什么?

将上述有关问题中的“算术”一词换为“数学”,我们就得到关于一般数学的普遍问题,且这些问题都是数学中的基本问题.

将这些问题特殊化,就得到如下一些问题.

如“1”的概念是怎样产生的?反映了现实世界中的什么东西?为什么“ $2+3=3+2$ ”是如此令人信服且确定不移?为什么乘法九九表如此抽象,但可以说无时无刻不用到它?等等.

以上诸多问题实际上涉及到数学问题的意义、形式、来源、提出和解决.而所有与这些内容有关的问题,都应该是数学问题论要研究和讨论的基本问题.本书作为教学讲义,在实践中试用,多有效果,但限于笔者的能力与水平,许多方面还很肤浅,且免不了有缺点错误,敬请读者批评指正,先致深切谢意!

本书作为浙江省新世纪教改项目的一部分,其出版得到了该项目和浙江工业大学浙西分校的资助;笔者所在学校——浙江工

业大学浙西分校的领导和同事给予许多关心和支持;于秀源教授认真审阅了本书文稿,提出了许多宝贵的意见和建议,还欣然为本书作序,且给予高度的评价,使我有勇气抛砖引玉,这自然是前辈对笔者的关爱和勉励.对此,一并表示衷心的感谢!

需要说明的是,本书在行文之中,对国内外许多作者的专著或文献中的观点或资料,采精撷英良多,也使笔者受益匪浅,在此一并致以诚挚的谢意!

汪文贤

2007年1月于衢江之畔

目 录

| | |
|--------------------------|------|
| 第一章 数学问题的概念 | (1) |
| 第一节 问题的概念 | (1) |
| 第二节 科学问题的概念 | (5) |
| 第三节 数学问题的概念 | (11) |
| 第二章 数学问题的性质 | (24) |
| 第一节 数学问题的首要性 | (24) |
| 第二节 数学问题的数学性 | (29) |
| 第三节 数学问题的探究性 | (34) |
| 第四节 数学问题的相对性 | (39) |
| 第五节 数学问题的链锁性 | (41) |
| 第三章 数学问题的形式 | (44) |
| 第一节 数学问题的疑问形式 | (44) |
| 第二节 数学问题的猜想形式 | (46) |
| 第三节 数学问题的悖论形式 | (48) |
| 第四章 数学问题的意义 | (59) |
| 第一节 数学问题是数学的重要组成部分 | (59) |
| 第二节 数学问题是数学发展的动力 | (62) |

| | |
|-----------------------|-------|
| 第五章 数学问题的源泉 | (73) |
| 第一节 数学问题的首要源泉 | (74) |
| 第二节 数学问题的动力源泉 | (83) |
| 第三节 数学问题的主要源泉 | (93) |
| 第六章 数学问题的提出 | (109) |
| 第一节 提出数学问题的哲学思想 | (109) |
| 第二节 提出数学问题的基本方法 | (118) |
| 第七章 数学问题的欣赏 | (140) |
| 第一节 数学问题的形式美 | (140) |
| 第二节 数学问题的内容美 | (146) |
| 第八章 数学问题的解决 | (154) |
| 第一节 数学问题解决概述 | (154) |
| 第二节 数学问题解决中的问题 | (174) |
| 第三节 数学化归 | (189) |
| 第四节 数学解题 | (199) |
| 第九章 数学问题的发展 | (209) |
| 第一节 数学问题量的增长 | (209) |
| 第二节 数学问题质的提高 | (216) |
| 第十章 数学问题的教育 | (224) |
| 第一节 数学教育的问题 | (224) |
| 第二节 开设数学问题课 | (232) |

| | |
|---------------------------------|-------|
| 附 录..... | (254) |
| 附录 1:问题是数学的心脏 | (254) |
| 附录 2:希尔伯特 23 问题及其解决情况 | (264) |
| 附录 3:千禧年问题(21 世纪七大数学难题)简介 | (268) |

第一章 数学问题的概念

什么是数学问题？这是首先要问的问题。数学问题也是问题，但它是科学问题，是数学科学的问题，即是具有数学性质的科学问题。数学问题有平凡与不平凡（深奥），好与坏，呈现型、发现型和原创型等之分。

第一节 问题的概念

何为问题？一听似乎谁都能回答。因为谁都觉得自己随时都可能提出问题，其实不然。

一、问题的概念

平时我们每个人都会向人发问。如问：1. 你吃过了吗？2. 近来身体好吗？3. 为什么0不能作除数？4. 四色问题是什么问题？5. 张三是不是个好人？6. 一口能喝下多少克水？7. 数学是什么时候产生的？8. 怎样才能学好数学？9. 哥德巴赫(Goldbach, 1690—1764)猜想正确吗？10. 有没有奇完全数？等等。下面我们对这些问句作个简单分析，看看有什么不同。

在以上10个带问号的句子中，前两个对一般正常的人来说，谁都不会花费什么脑筋，就能回答，可以说对我们每个正常的人来说都不是问题。其提出也只是礼节性地问问，或表示一种关心；大多数情况下回不回答并没有实质性的东西，回答也多是出于礼貌。

第3、4个问句，则并不是一般人都能回答的。要回答它们，必

须具有比较好的数学常识.也就是说,它们对有的人来说的确是问题,因为不知道它们的答案.但对具有较好数学常识的人来说,则已经不是问题,只要把自己已知的答案报告给提问者即可.

第5、6个问句,则更是不同.首先,我们觉得这样提问甚至有点可笑,因为几乎每个人都有自己关于好人的标准,而不同的人一口能喝下水的量也往往是不同的,因此,两个问题让人都难以回答;其次,可以想象,即使回答了,一般地说,答案也不尽相同,见仁见智,恐怕没有标准答案.

第7、8个问句,与第5、6个问句相同的是,答案往往是不统一的.不同的是,要回答它们,需要数学的有关知识,并不是人人都能回答的.也就是说,比较具有专业性.

最后的两个问句,就更具有数学专业性.每个问句都表示了一个目前世界上顶尖的数学家也不能给你一个结论性的回答的问题,也就是说,对全世界每个人来说,它们都还是个问题.

从以上的例子我们可以看出:首先,问句并不一定是问题;其次,所谓问题是相对而言的;第三,有的问题,实际上并没有确切的答案;第四,有的问句的确是问题.

那么,什么样的问句才能算是问题呢?我们先看人们对问题这一概念的解释.现代汉语词典对问题是这样解释的:问题是指要求回答或解释的题目,或是须要研究讨论并加以解决的矛盾、疑难.第一种解释,是我们平常所谓的问题,特别是教学中常用这一概念;第二种解释,则是科学研究中的问题的概念.题目或习题,作为问题,其特点是答案已经存在,即从整个人类的意义上说,已不再是问题了,但对于人类的个体,答案却是未知的.待解决的矛盾、疑难,作为问题,其特点是,对于整个人类来说,其答案尚在未知之中,有待人们去探索寻求.

在英语中,问题常用 question 或 problem,其中 question 的含义,就相当于我们现代汉语词典中问题的含义,而 problem 则含义

比较狭窄,仅指现代汉语词典中后一种解释。

《牛津大词典》的解释是:指那些并非可以立即求解或较困难的问题,那种需要探索、思考和讨论的问题,那种需要积极思维活动的问题。

以上的讨论,只是对问题含义作些必要的解释.下面我们来看如何给问题下一定义。

事实上,最简单的理解,困难的事物就是问题.但这种说法并不严密,因为困难的东西并不一定能构成问题.如,让人1小时走完10千米路程,显然是个困难,但这又能算是什么问题呢?因此,进一步,人们把尚未认识而又想认识的事物,就认为是问题.尚未认识,说明没有答案;又想认识,说明具有动机.这两个条件缺一不可.有了能理解的正确答案,说明已经认识清楚,自然不再是问题;虽没认识,但不想认识,对这样的人,自然也没有问题。

我们都有这样的体会,当我们面临一项要完成的任务而又缺乏必要的直接手段时,就会觉得产生了所谓的问题.这告诉我们,并非所面临的任何任务都会成为问题的.事实上,一项要完成的任务要成为问题需具备以下三个要素:一是给定,即要给定完成任务的条件;二是目标,即任务的指定结束状态;三是障碍,即从给定到目标,并不具有直接方法.确切地说,就是从已知条件出发,完成任务的主体必须通过间接的思维活动,才能找到达到指定结束状态的方法,这样的任务就是问题。

从信息论的角度看,给定的条件就是已有的信息,欲达到指定的目标就是信息的输出.因此,问题就是输入已有的信息到欲输出的信息之间的差距。

二、问题的分类

问题有哪些类型?

对应于现代汉语词典对问题的两种解释,我们可把问题分为:简单问题和科学问题。

如果所谓的问题,是指要求回答或解释的题目,则就称为简单问题,也就是平时我们所谓的题目或习题;如果问题是指须要讨论或解决的矛盾、疑难,则称之为科学问题。很显然,这样的分类,是从提问人对所提问题知识背景的了解,或是对面临问题者对所面临问题知识背景的了解而言的。根据我们对问题的定义,以后说的问题,如无特别说明,则指科学问题。

简单问题产生于对科学背景知识的无知。值得指出的是,有许多问题虽然是由于无知而提出的,但有的也是当前科学所不能回答的,因而有些简单问题也有发展为科学问题的可能。科学问题的提出产生于对科学知识背景分析的基础之上,这类问题的提出本身就是一种“发现”。

三、问题的性质

问题有些什么样的性质呢?根据问题的定义,问题基本上有以下性质。

1. 疑难性。有疑才问,遇难而进。疑难性(或矛盾性)是问题的基本性质。事实上,这一点完全可由人们对问题的解释和所下的定义中所认清。而疑难性则是问题能激发人的好奇心,启动人思维的基本原因。难怪爱因斯坦(Einstein, 1878—1955)会给予问题如此高的评价:提出一个问题往往比解决一个问题更重要。显然,疑难性蕴含着问题的探究性。

2. 探究性。探究性是问题的又一基本性质。问题的存在,让人们产生了心理的不平衡。为了恢复这种心理的平衡,人们就会产生解决问题的强烈愿望。而要解决问题,势必要对问题进行积极的探究。因此,问题的探究性与问题共生同存。从这里,我们也可以看出,客观问题具有某种主观性因素,因为由问题产生出的探究性,使人产生一种探究它的主观愿望。

3. 客观性。首先,对于我们尚未认识的事物,它是客体,针对这种客体而提出问题,势必具有客观性;其次,对人类而言,客观世界

总存在我们尚待认识的事物,这就是说问题永远客观存在,这也是问题的客观性.虽然我们坚信,问题是能解决的,世界也总是能被认识的,但同时,总是有我们尚未解决的问题存在,世界上总有我们还未认识的事物.这就是问题的客观性.

4. 主观性. 首先,对于尚未认识的客观事物而言,作为主体的人又想认识该事物,即主体具备想认识客体的动因(或愿望),因此问题就具有主观性;其次,对这些未认识的事物,对有愿望认识它的人是问题,而对另一些不想认识它的人,则可以无视这此问题存在,就是说,只有主体的主观选择才使问题成其为问题,这也是问题的主观性.这说明,问题的确具有主观性.

5. 相对性. 一般而言,问题总是相对的. 首先,对一些人是问题,对另一些人就不见得是问题. 如对学生来说是问题,对教师来说,一般就不是问题了;其次,某一问题,对于今天来说是问题,到明天就不一定是问题了,问题总是能被解决的;再次,对于客观存在的问题,有的人并没有要想搞清楚它的愿望,因此,对于这种人,事实上,这一问题虽然从客观上说是问题,但从主观上说,这一问题已没有意义,或者说不再是问题.

第二节 科学问题的概念

并非任何所提的问题都是有意义和有价值的. 那么什么样的问题才是有意义和有价值的呢? 谁都可以随便提出一个问题来,有的问题没有任何意义和价值,但有的问题对于科学的发展具有积极的意义. 要能提出科学问题并非一件简单的事情.

一、科学问题的概念

关于科学问题,基本上可以从三个方面去界定:

1. “愿望”说. 认为问题就是一种智力的愿望.
2. “冲突”说. 认为问题就是背景知识中固有的预期与其所提

出的观察或假说等新发现之间的冲突。

3. “差距”说. 认为问题就是解释理想与目前能力的差距,或是给定过程的当前状态与所要求的目标状态之间的差距。

以上三种说法都有其可取的一面,如“愿望”说揭示了问题的动力性,“冲突”说提出了问题的矛盾性,“差距”说则表明了问题的科学性,等等。

从科学认识角度来讲,所谓科学问题,是指科学认识主体已有的科学知识背景与其所确立的科学认识目标之间的差距。

若这个目标整个人类都尚未认识,则它就构成一种原创性探索目标,这样的问题是真正的科学问题,可称之为原创性科学问题。但已经被人类所认识了的科学目标,人类个体并不能都认识,这对个体就构成一种继承性探究目标。这种继承性探究问题,虽然对整个人类而言,已不是问题,但就个体学习来说,仍然是问题,仍有必要去认识。它是一种继承性认识目标,可称之为继承性科学问题。一个科学问题的组成要素是问题和解。

二、科学问题的分类

科学问题是怎么分类的?对科学问题的分类,随分类标准的不同而不同。我们这里给出的分类,是按发现性程度的不同而得到的。按发现性程度的不同,可将科学问题分为:呈现型问题、发现型问题和原创型问题。

1. 呈现型问题. 所谓呈现型问题,是指一些给定的问题。这种问题常由教师或由教科书给出,其答案往往是现成的,求解的思路也是现成的。问题解决者只要按图索骥,照章办事,就能获得与标准答案相同的结果,不需要也无机会去想象或创造。其发现性程度几乎等于零。

呈现型问题,不具什么应用价值,更不具有科学研究的价值,其思维教育的价值也不大。

首先,对人类来说,呈现型问题名为问题,实已不再是问题,因