普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学物理方程与特殊函数

于涛 主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

数学物理方程与特殊函数

于　涛　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书主要介绍了三类典型数学物理方程——波动方程、热传导方程和拉普拉斯方程的各种求解方法以及特殊函数的基础知识.

全书重点讲解了分离变量法、特征线法、行波法、平均值法、积分变换法、格林函数法等常用方法,探讨了贝塞尔函数及勒让德多项式的应用,简要介绍了变分法、近似解以及在工程实践中应用广泛的非线性偏微分方程及积分方程等内容.书中配有丰富的习题,并采用“专题问题”较为深入地研究某个具体现象,补充和扩展了正文的内容.

本书内容丰富,在注意科学性与严密性的同时,又注意了它的实用性与可读性,具有由浅入深、脉络清晰、便于学生自学的特点.可作为高等学校理工科各专业的教材或参考书,亦可供工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程与特殊函数/于涛主编.—北京:科学出版社,2008
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-03-021860-5

Ⅰ.数… Ⅱ.于… Ⅲ.①数学物理方程-高等学校-教材 ②特殊函数-高等学校-教材 Ⅳ.O175.24 O174.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 063593 号

责任编辑:李鹏奇 王 静 杨 然 / 责任校对:宋玲玲
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 7 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2008 年 7 月第一次印刷 印张:15
印数:1—4 000 字数:281 000

定价: 25.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈双青〉)

前　言

数学物理方程的研究对象是具有物理背景的偏微分方程(组)，它通过对三类具有典型意义的模型方程的深入剖析，阐明了偏微分方程的基本理论、解题的典型技巧以及它们的物理背景. 把物理规律、数学方法与工程实际这三者有机地结合在一起是本课程区别于其他课程的显著特点.

本书编写时，注意与大学数学基础课程内容的衔接，考虑了数学系列课程体系上的统一，保持了方法叙述和符号含义的一致，在读者熟悉的环境里展开新的讨论. 针对工科大学生的特点，在文字和内容上，我们力求理论脉络尽可能清晰，方法技巧尽可能拓宽，数学推演尽可能简洁. 为了达到易教易学的目的，本书不追求理论体系的完整性，而是注重内容的可读性与实用性.

只要具备高等数学、线性代数的基本知识，就能轻松地阅读本书. 我们将涉及较深理论的部分内容以及对正文的注释、补充等内容用小字编排，阅读时可以适当地选择，或者略去，或者借助于相关参考资料系统地学习. 在课后习题中，我们列举了几个专题问题，表面上是一个较长的习题，实质上是对某个具体问题较为系统的研究，是对正文内容的补充和扩展，其结果有一定价值或涉及相关的应用.

本书共分 9 章，前 6 章介绍本课程的经典内容，包括数学物理方程的一些基本概念及三类典型方程、分离变量法、特征线法、行波法、平均值法、积分变换法、格林函数法等，还探讨了贝塞尔函数及勒让德多项式的应用；后 3 章中，介绍了在工程实践中应用广泛的非线性偏微分方程及积分方程，并简要介绍了变分法、解析近似解及数值近似解等内容.

感谢哈尔滨工程大学教务处的支持. 感谢 1999～2004 级中那些踊跃提问的学生，你们智慧的火花指明了我写作的方向. 尤其要感谢廖振鹏院士、苏景辉教授，关于数学物理问题多次有趣的探讨，使我受益匪浅. 在本书的编写和出版过程中，得到科学出版社的鼎力支持，作者对此表示衷心的感谢.

本书可作为高等学校工科各专业的教材，也可供相关的理科学生、工程技术人员参考. 由于作者水平有限，不妥之处在所难免，欢迎读者批评指正.

编　者

2008 年 4 月 7 日

目 录

绪论 …… 1
第 1 章 典型方程的推导及基本概念 …… 3
1.1 弦振动方程与定解条件 …… 3
1.1.1 方程的导出 …… 3
1.1.2 定解条件 …… 7
1.2 热传导方程和定解条件 …… 9
1.2.1 方程的导出 …… 9
1.2.2 定解条件 …… 12
1.3 拉普拉斯方程与定解条件 …… 14
1.4 基本概念与叠加原理 …… 15
1.4.1 偏微分方程的基本概念 …… 15
1.4.2 定解问题及其适定性 …… 17
1.4.3 叠加原理 …… 20
1.5 二阶偏微分方程的分类 …… 21
习题 1 …… 28
第 2 章 分离变量法 …… 31
2.1 有界弦的自由振动 …… 31
2.1.1 分离变量法 …… 31
2.1.2 解的物理诠释 …… 36
2.1.3 分离变量法的应用 …… 41
2.2 非齐次弦振动问题的求解 …… 45
2.2.1 非齐次方程的固有函数法 …… 45
2.2.2 非齐次边界条件的处理 …… 49
2.2.3 特殊的非齐次边界条件 …… 52
2.3 有限长杆上的热传导问题 …… 57
2.3.1 无源热传导问题 …… 57
2.3.2 含源热传导问题 …… 61

2.3.3　非齐次边界条件的处理 ······ 64
2.4　二维拉普拉斯方程 ······ 67
2.4.1　矩形域上拉普拉斯方程的边值问题 ······ 67
2.4.2　圆形域上拉普拉斯方程的边值问题 ······ 70
2.4.3　固有函数法与特解法求解泊松方程 ······ 73
2.5　固有值与固有函数 ······ 77
习题 2 ······ 78
第 3 章　行波法与积分变换法 ······ 84
3.1　一阶线性偏微分方程的特征线法 ······ 84
3.1.1　方向导数与偏微分方程 ······ 84
3.1.2　特征线法求解偏微分方程 ······ 85
3.2　一维波动方程的初值问题 ······ 88
3.2.1　齐次方程与达朗贝尔公式 ······ 88
3.2.2　非齐次方程与齐次化原理 ······ 91
3.2.3　行波法与分离变量法 ······ 95
3.3　延拓法求解半无限长弦的振动问题 ······ 97
3.3.1　半无限长弦的自由振动 ······ 97
3.3.2　半无限长弦的强迫振动 ······ 99
3.3.3　非齐次边界条件的处理 ······ 101
3.4　高维波动方程的初值问题 ······ 102
3.4.1　三维波动方程的球对称解 ······ 102
3.4.2　三维波动方程的平均值法 ······ 103
3.4.3　降维法 ······ 105
3.4.4　泊松公式的物理意义 ······ 107
3.5　积分变换法 ······ 108
3.5.1　傅里叶变换的应用 ······ 108
3.5.2　拉普拉斯变换的应用 ······ 111
习题 3 ······ 113
第 4 章　格林函数 ······ 116
4.1　δ 函数 ······ 116
4.2　无界域中的格林函数 ······ 119
4.3　格林公式　有界域上的格林函数 ······ 120

4.4　格林函数的应用 …… 123
习题 4 …… 129
第 5 章　贝塞尔函数 …… 131
5.1　贝塞尔方程及求解 …… 131
5.1.1　贝塞尔方程的导出 …… 131
5.1.2　贝塞尔方程的求解 …… 133
5.2　贝塞尔函数的递推公式及其振荡特性 …… 137
5.2.1　递推关系 …… 137
5.2.2　振荡特性 …… 139
5.3　按贝塞尔函数展开为级数 …… 140
5.3.1　贝塞尔函数的正交性 …… 140
5.3.2　贝塞尔级数展开 …… 143
5.4　贝塞尔函数的应用 …… 145
5.5　圆柱冷却问题 …… 151
习题 5 …… 153
第 6 章　勒让德多项式 …… 156
6.1　勒让德方程的导出 …… 156
6.2　勒让德方程的求解 …… 158
6.3　勒让德多项式 …… 159
6.4　函数展开成勒让德多项式的级数 …… 162
6.5　连带的勒让德多项式 …… 168
习题 6 …… 170
第 7 章　变分法及应用 …… 172
7.1　泛函和泛函极值 …… 172
7.2　变分法在固有值问题中的应用 …… 178
7.3　伽辽金方法 …… 184
7.4　坐标函数的选择 …… 186
第 8 章　非线性偏微分方程与积分方程 …… 188
8.1　非线性偏微分方程简介 …… 188
8.2　简单非线性问题的求解 …… 191
8.3　积分方程简介 …… 193

第 9 章　数学物理中的近似解法 ······ 198
9.1　解析近似解 ······ 198
9.1.1　正则摄动法求解非线性偏微分方程 ······ 198
9.1.2　积分方程的近似解 ······ 200
9.2　数学物理方程的差分解法 ······ 202
9.3　积分方程的数值积分法 ······ 209
习题解答 ······ 211
参考文献 ······ 216
附录 1　双调和方程 ······ 217
附录 2　探讨定解问题的适定性——能量积分法 ······ 222

绪　论

18世纪,微积分产生之后,人们利用微分方程对力学、物理学中的一些问题和规律进行了深入探索.研究了质点的位移随时间的变化而发生改变的规律,电流电压与变化着的时间之间的关系,总结出了描绘这类现象内在规律的数学模型——常微分方程.在科学技术日新月异发展的过程中,用只含有一个自变量的常微分方程描述人们所研究的全部问题显然不行.例如,流动的物体,其内部的温度、密度等物理量不仅与时间有关,同时还和其所处的空间位置有关,因此要用含有多个自变量的函数来描述这类物理现象.这样,偏微分方程的理论就逐渐产生了.

我们把含有某未知多元函数的偏导数的方程称为偏微分方程.将表示物理量在空间或时间中变化规律的偏微分方程称为数学物理方程.

数学物理方程是以物理学、力学及工程技术中的具体问题为研究对象的,其基本任务有以下两个方面:

第一,建立描绘某类物理现象的数学模型,并提供这些问题的求解方法;

第二,通过理论分析,研究客观问题变化发展的一般规律.

通过对物理现象的分析,我们能得到表达某类物理现象共同规律的数学表达式——偏微分方程,也称之为泛定方程.偏微分方程只给出了未知函数(它可以是电场强度、磁场强度、电势、位移、温度等)在邻近点和邻近时间所取值之间的关系,即表明在一个物理过程中,物理量由一个时刻或某一个地点连续地变化到邻近时刻或邻近地点的规律.仅靠这些揭示"共性"的方程无法确定一个完整的物理过程,因此我们还要分析伴随这一过程发生的具体条件,一般情况下要考查初始条件与边界条件,我们称之为定解条件.泛定方程表达同一类物理现象的共性,是解决问题的依据;定解条件反映的是具体问题的个性,是确定具体现象的准则.泛定方程加定解条件就构成了数学物理中的定解问题.在本课程中,我们主要介绍各种定解问题的求解方法.

数学物理方程有如下两个显著的特点:

(1) 它广泛地运用数学诸多领域的成果.自然现象是复杂的、多样的,数学物理方程中所研究的问题也是复杂的、多样的,所以要应用不同的数学工具来解决性质不同的问题.

(2) 数学物理方程源于工程实际问题,自然现象本身所蕴含的内在规律,对人们寻求解决问题的思路有着重要的启迪.数学物理方程中的许多重要求解方法,都可以在自然现象中找到它们的来源.

本课程范围广泛，内容复杂，综合性强，我们力求做到陈述简单、条理清晰，对许多基本理论采取述而不证的方式. 我们采用粗线条的直观分析，着重于探讨和阐明理论概念和方法技巧的渊源与作用，在介绍经典理论的同时，适当地介绍一些现代的数学物理研究方法.

第 1 章　典型方程的推导及基本概念

数学物理方程是以物理规律为基础，以数学方法为工具来研究实际问题的学科，它的主要研究对象来自数学物理问题中的偏微分方程. 本章首先从具体的物理模型推导出三类典型的数学物理方程，以及相关的定解条件；然后介绍偏微分方程的基本概念及二阶线性偏微分方程的分类.

1.1　弦振动方程与定解条件

用微分方程描述工程实际问题，实质就是从定性的物理问题导出定量的数学物理方程. 首先，我们分析实际问题遵循的物理规律，并用数学概念表达相关的物理量，再运用数学方法推导出数学物理方程. 数学上可采用两种不同的推导方法，即局部微元法和整体积分法.

局部微元法是指在所研究的物体中，任取一个微小的体积（微元），在其上建立相应物理量的平衡关系，然后令微元的直径趋向于零，使微小的体积紧缩成一个点，则得到区域内任意一点的数学物理方程. 整体积分法是在物体内部任取一个子区域，在其上建立相应物理量的平衡关系，得到一个积分等式，根据积分区域的任意性，通过被积表达式就可得到数学物理方程. 这两种方法本质上是相同的. 下面，我们通过推导有界弦的振动方程引入这些具体内容.

1.1.1　方程的导出

一根线密度为 ρ、长为 l 的均匀细弦，拉紧之后使它在平衡位置做振幅微小的横振动，求弦上各点位移随时间变化的规律. 本问题是现实生活中弦乐器的弦振动现象的简化，振动现象是一个复杂的物理过程，在建立描述弦振动过程的数学模型时，必须忽略一些次要因素，做一些合理的假设与近似.

为了便于讨论，我们以弦的平衡位置为 x 轴建立坐标系，弦的一端置于坐标原点，用 $u(x,t)$ 描述时刻 t、弦上横坐标为 x 的点在纵方向 u 轴上的位移.

我们考虑一根理想化的柔软细弦，其横截面的直径与弦的长度相比非常小，因此可以把弦看作是质点的一维分布；柔软意味着整个弦可以任意变形，反抗弯曲所产生的力矩可以忽略不计，其内部的张力总是沿着弦的切线方向.

振幅微小，不仅指振动的幅度很小，同时认为切线的倾角也很小；横振动是指振动发生在一个平面内，且弦上各点的运动方向垂直于平衡位置.

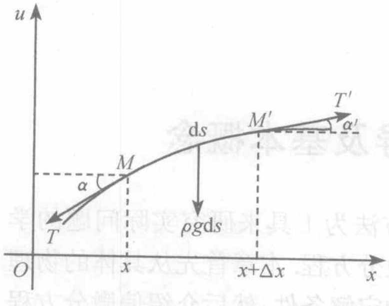

图 1.1

下面,我们先采用局部微元法推导弦做微小横振动的数学规律. 在振动过程的任一时刻 t,弦的形状是一条曲线,在其上任选一小段弦 $[x,x+\Delta x]$,其每一点的位置如图 1.1 所示,其中,x 点处的张力为 T,它与 x 轴的夹角为 α,$\tan\alpha=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$,$x+\Delta x$ 点处的张力为 T',它与 x 轴的夹角为 α',$\tan\alpha'=\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$,记弧 $\overset{\frown}{M'M}$ 的长度为 $\mathrm{d}s$.

现在建立位移 $u(x,t)$ 所应满足的方程. 首先,我们将弦段 $|M'M|$ 上的运动,近似认为一个质点的运动,它满足牛顿运动定律,$F=ma$.

首先,由于是微小的振动,所以 $\alpha\approx\alpha'\approx 0$,则

$$\sin\alpha\approx\tan\alpha=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\quad \sin\alpha'\approx\tan\alpha'=\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x},$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\approx\Delta x.$$

这样我们可以认为弦线没有伸长,也就是说,弦在 x 轴方向没有位移.

在 x 轴方向,弦段 $|M'M|$ 受力总和为

$$F_x=-T\cos\alpha+T'\cos\alpha'$$

因为弦只做横向振动,在 x 轴方向没有位移,因此合力为 0,即

$$-T\cos\alpha+T'\cos\alpha'=0, \tag{1.1.1}$$

又由于是微小振动,因此 α,α' 近似为 0,根据泰勒公式

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots,$$

当略去高阶无穷小时,有

$$\cos\alpha\approx\cos\alpha'\approx 1,$$

代入式(1.1.1)可以得到

$$T=T'.$$

这表明,弦上点点处张力相等,是一个常数.

在 u 轴方向上,弦段 $|M'M|$ 受力的总和为

$$F_u=-T\sin\alpha+T'\sin\alpha'-\rho g\,\mathrm{d}s,$$

同时,弦段 $|M'M|$ 在 t 时刻,沿 u 方向运动的加速度近似为 $\dfrac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}$,其中 $\bar{x}$ 为弧

段$|M'M|$的质心，位于点 $x, x+\Delta x$ 之间. 于是成立

$$-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\,\mathrm{d}s = \rho\,\mathrm{d}s\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}$$

即

$$T'\tan\alpha' - T\tan\alpha - \rho g\,\mathrm{d}s = \rho\,\mathrm{d}s\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2},$$

$$T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] - \rho g\,\Delta x = \rho\,\Delta x\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2},$$

由微分中值定理可得

$$T\left[\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\right]\Delta x - \rho g\,\Delta x = \rho\,\Delta x\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2},$$

令 $\Delta x \to 0$，则有 $x+\theta\Delta x \to x, \bar{x} \to x$，得到

$$\rho\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho g,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + g = \frac{T}{\rho}\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

通常情况下，弦绷得很紧，张力较大，导致弦振动速度变化很快，即$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$比 g 远远大，所以 g 可以略去. 令 $a^2 = \frac{T}{\rho}$，得到

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1.1.2}$$

称方程(1.1.2)为弦振动方程，未知函数 u 只含有两个变量 x, t，其中 t 表示时间，x 表示空间位置. 表示空间位置的变量只有一个，因此该方程又叫一维波动方程.

在振动过程中，如果弦上还受到一个与振动方向平行的外力，t 时刻弦上 x 点处的外力密度为 $F(x,t)$，方向垂直于 x 轴，则在上述推导过程之中，弦段$|M'M|$在 u 轴方向上所受的合力为

$$F_u = -T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\,\mathrm{d}s + F(x,t)\,\mathrm{d}s,$$

即

$$T'\sin\alpha' - T\sin\alpha - \rho g\,\mathrm{d}s + F(x,t)\,\mathrm{d}s = \rho\,\mathrm{d}s\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2},$$

则得到描述弦受外力强迫振动的方程

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1.1.3}$$

其中，$f(x,t)=\dfrac{1}{\rho}F(x,t)$，表示 t 时刻单位质量的弦在 x 点处所受的外力.

方程中与函数 $u(x,t)$ 无关的项 $f(x,t)$ 又称为自由项. 含有非零自由项 $f(x,t)$ 的方程称为非齐次方程，若 $f(x,t)=0$，则称之为齐次方程. 因此方程(1.1.2)称为齐次一维波动方程，方程(1.1.3)称为非齐次一维波动方程.

下面我们运用整体积分法作一个简单的推导，学习一下这个方法的思想及具体应用. 为此，我们在弦上任选一段$[x_1,x_2]$，在 u 轴方向上，惯性力

$$F=ma=\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}(ma)=\int_{x_1}^{x_2}(\mathrm{d}m)a=\int_{x_1}^{x_2}(\rho\mathrm{d}s)a=\int_{x_1}^{x_2}\rho\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}s.$$

已经证明张力 T 为常数，故弦段$[x_1,x_2]$的张力在 u 轴方向的分量是

$$\begin{aligned}T\sin\alpha'-T\sin\alpha&=T\tan\alpha'-T\tan\alpha\\&=T\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=x_2}-T\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}\\&=T[u_x(x_2,t)-u_x(x_1,t)]\\&=T\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此，弦段$[x_1,x_2]$上力的平衡关系为

$$T\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x+\rho g\,\mathrm{d}s=\int_{x_1}^{x_2}\rho\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}s,$$

则对一切弦段$[x_1,x_2]$成立

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[-\rho\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}+T\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+\rho g\right]\mathrm{d}x=0,$$

故可得

$$\rho\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}+T\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+\rho g=0,$$

经过整理及合理的假设，略去 g，得到偏微分方程

$$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}.$$

如果我们研究外力作用下平面薄膜的微小振动，则会得到二维波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t).$$

同样的分析方法，我们可以得到描述外力作用下体振动的三维波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t).$$

方程(1.1.2)是一个重要的偏微分方程，各种弹性振动，如建筑物的剪振动、潮汐波、地震波等都可以用这个方程来描述，这些物理现象的共同特征是振动产生波

的传播. 该方程于 1752 年由 d'Alembert 首先建立，后来，Euler(1759 年)和 D'Bernoulli(1762 年)对声波的研究过程中，分别推广建立了二维波动方程和三维波动方程.

1.1.2 定解条件

仅有微分方程还不足以确定实际问题中物理现象的具体变化，因为泛定方程表达的是同一类物理现象的共同规律，当学习了后续内容时，我们会了解到不同长度的杆的纵振动，电磁波沿同轴线传播等问题，都可归结为方程(1.1.2)描述的数学模型. 为了得到具体问题的变化规律，还须考虑物理现象所处的特定环境及历史演变. 所谓的特定环境，实质就是分析实际问题通过边界和外部环境发生的关系，这种关系的数学描述就称之为边界条件. 历史演变就是要知道物理现象从何种状态转移到如今的状态，这就需要了解问题变化刚开始的状态，对这种状态的描述称之为初始条件. 定解条件即是初始条件和边界条件的统称.

所以，一根弦线的特定振动状态还依赖于弦初始时刻的状态和通过弦线两端所受外界的影响. 为了确定一个具体的弦振动的规律，除了列出方程外，还需要给出它满足的定解条件，即初始条件和边界条件.

初始条件，即初始时刻 $t=0$ 时，弦上各点的位移和速度.

$$u(x,t)\Big|_{t=0}=\varphi(x)\quad(0<x<l), \tag{1.1.4}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\quad(0<x<l), \tag{1.1.5}$$

其中，$\varphi(x)$，$\psi(x)$为已知函数，当 $\varphi(x)=\psi(x)=0$ 时，称之为齐次初始条件.

边界条件，即弦的端点所遵循的条件. 由物理学可知，弦在振动时，其端点(以 $x=l$ 表示这个端点)所受的约束情况通常有以下三种.

(1) 固定端. 即弦在振动过程中，该端点始终固定不动，位移是 0. 对应于这种状态的边界条件为

$$u(x,t)\Big|_{x=l}=0\quad \text{或}\quad u(l,t)=0.$$

更一般的情况是，弦的端点不固定，而是按照某种规律 $w(t)$运动，则边界条件为

$$u(x,t)\Big|_{x=l}=w(t),$$

这样的边界条件称为第一类边界条件.

(2) 自由端. 即弦的这个端点可以在垂直于 x 的轨道上自由滑动，不受垂直方向的外力，从而该端点在位移方向上的张力为零. 由前述推导过程可知对应于这种状态的边界条件为

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0,$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0.$$

一般情况下，若此端点受垂直方向的外力，t 时刻外力大小为 $g(t)$，则有

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=g(t).$$

整理，令 $\mu(t)=\dfrac{g(t)}{T}$，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=\mu(t),$$

这样的边界条件称为第二类边界条件.

(3) 弹性支承端. 即弦的一个端点固定在弹性支承上，弹性支承伸缩符合胡克定律，如果弹性支承原来的位移为 $u=0$，则 $u\big|_{x=l}$ 表示弹性支承在该点的伸长. 此时弦对支承的拉力，在垂直方向的分量为

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l},$$

大小应该等于 $ku\big|_{x=l}$，即

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=-ku\big|_{x=l},$$

或

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\bigg|_{x=l}=0,$$

其中，$\sigma=k/T$，k 为弹性支承的倔强系数.

一般情况下，此端点还受垂直方向的外力，t 时刻外力大小为 $g(t)$，则有

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=-ku\big|_{x=l}-g(t),$$

令 $\mu(t)=-\dfrac{g(t)}{T}$，$\sigma=\dfrac{k}{T}$，有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\bigg|_{x=l}=\mu(t),$$

这样的边界条件称为第三类边界条件.

我们不考虑具体的物理模型,从数学的角度出发,将描述一维波动方程的边界条件,抽象推广为用于描述任意现象的边界条件.

若在边界 Γ 上直接给出未知函数 u 的数值,即

$$u\Big|_{\Gamma}=\mu_1(t),$$

这种形式的边界条件称为第一类边界条件.

若在边界 Γ 上直接给出未知函数 u 沿 Γ 的外法线方向的方向导数,即

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=\mu_2(t),$$

这种形式的边界条件称为第二类边界条件.

同样,我们称如下形式的边界条件为第三类边界条件:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Big|_{\Gamma}=\mu_3(t).$$

若 $\mu_i(t)=0(i=1,2,3)$,则称这种边界条件为齐次边界条件,否则就称之为非齐次边界条件.

1.2 热传导方程和定解条件

众所周知,如果空间某物体 G 内各点处的温度不同,热量就会从温度较高的点向温度较低的点流动,这种现象就叫热传导. 由于热量的传导过程表现为温度随时间和点的位置不同而变化,因此热传导问题的解决实质上就是求出物体内部温度分布的函数.

1.2.1 方程的导出

我们在三维空间中建立一个模型,来描述一个均匀的、各向同性物体的热传导过程. 用 $u(x,y,z,t)$ 表示物体 G 内部某点 $M(x,y,z)$ 在 t 时刻的温度,然后我们利用整体积分法,推导温度函数 $u(x,y,z,t)$ 满足的数学物理方程.

热的传播符合傅里叶实验定律:物体在无穷小时段 dt 内流过一个无穷小面积 dS 的热量 dQ,与时间 dt、曲面的面积 dS 以及物体的温度 u 沿曲面 dS 的法线方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 三者成正比,即

$$dQ=-k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt, \tag{1.2.1}$$

其中,$k=k(x,y,z)$ 称为物体在点 (x,y,z) 点的热传导系数. 当物体为均匀且各向同性的导体时,k 取常数. 由于热量的流向与温度的梯度方向相反,所以式(1.2.1)