工程基本程式

（電子計算機應用程式）

編著者■　林 聰 悟

新学識文教出版中心
電機工程編輯委員會　編行

(73.87)
71.221
LCW

工程基本程式

（電子計算機應用程式）

執筆者■ 林　聰　悟

編輯者■ 新學識文教出版中心
工專用書編輯委員會

●科技爲現代學術中心。

●工業爲國家圖存利器。

●工科大專爲科技與工業的接點；

●教學同仁于此接點散發無限光、熱！

●教材則爲發射光、熱的『能源』。

願

工科大專教學同仁

更多、更廣泛的參與我們合作編著、出版的行列：

「協力開發『能源』」，

「光探學術遠景」

「照亮國家前途！

新學識文敎出版中心
工專用書編輯委員會 謹啓

版權所有

翻印必究

行政院新聞局出版事業登記證

■局版臺業字第0980號■

工程基本程式

(電子計算機應用程式)

■執筆者：林　聽　悟

■發行人兼主編：李　畊

■出版者：新學識文敎出版中心

台北市新中街10巷7號
郵撥帳號：109262
電話：7656502　7656992

■特約經銷處：
台北・力行書局（重慶南路Ⅰ）
台中・大學書社（文華路73號）
台南・東華書局（博愛路72號）
高雄・超大書城（地下街一層）

■校勘者：林　聽　悟

■印刷所：新學識文教出版中心

中華民國 69 年 2月初版

基價 3元5角

編 輯 大 意

- 計算機的發明，爲近代工程之偉大歷史成就。其在記憶、比擬、計算、思考以至控制方面的功能，直接得自工程人員的精心設計；其在工程方面的應用，更直接、間接對包括計算機在內的工程技術之增進大有裨益。故計算機在工程方面的應用程式爲諸種應用程式中，最具潛能、最應重視之主要部分。然國內工專雖明訂有此課程標準、工科大學亦開有專門課程，但迄無中文理想教本。本人特以部頒課程標準爲經，另以在國內外研究、實作，及在台大土木系多年教學心得爲緯、著爲本書；藉供工科大專教學及工程從業人員參考之用。

- 本書內容包括一般工程分析常用之工具數學：非線性方程式之解、數值積分法、函數插值法、最小二乘方函數近似法、聯立線性方程式解法與實對稱矩陣之特徵向量解法等。

- 矩陣在工程分析中應用甚廣，因此本書專列一章介紹矩陣程式之有關技巧；包括矩陣動態分配、定寬帶矩陣之濃縮存法、變寬帶矩陣之濃縮存法與應用。各種存法之矩陣之分解運算程式則均詳列於討論聯立線性方程式之各節中，不但可做程式書寫之參考，並可直接運用於實際工程分析程式中。

- 電子計算機程式可視爲描述數學運算或演算法之既簡潔又嚴謹之有效工具

。如能多觀摩程式，卽可獲得其中奧秘。因此本書對各種數學運算或演算法大多僅做有關原理方法之介紹，雖部份輔以簡單實例，但仍無法以一概全。若欲深知實際演算詳情及對於各種特殊情況之處理，則以詳細研讀程式內容爲最佳途徑。

▨ 本書擬稿之初係以專科學校之教學爲對象，故未涉及微分方程及線性規劃問題。因第三、五等兩章與矩陣運算有關，內容較多；而第三章之9，10，11及14節與第五章之6、7、9及12節涉獵亦較廣泛，工專教學可酌予略去。

▨ 本書各章內容均相當獨立，可以不照各章次序教學或研讀。若根據程式之難易程度，則可按1、7、6、2、4、3、5章之次序講授。

▨ 爲教學及研習之需，本書特從李昕教授編著之「計算機導論」一書中抽出二章符傳程式語法列於附編中，以供參考。

林聰悟 謹誌

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目錄

1

非線性方程式的解法

1—1 前　　言

在工程分析方面常會遇到解非線性方程式之問題。如在柱之屈曲問題上須求下列方程式之根。

$$\tan xL - xL = o \qquad (1\cdot1)$$

大部份非線性方程式均無法直接以解析方法求解，一般皆以反覆試算過程求解。本章將介紹幾種常用方法並附以符傳程式以供參考。

1—2 直接代入法

直接代入法爲反覆試算法中之最基本型式，大部份試算法皆可視爲直接代入法，故予最先討論。該法係將原來一般非線性方程式（1·2），改寫成式（1·3）之型式。

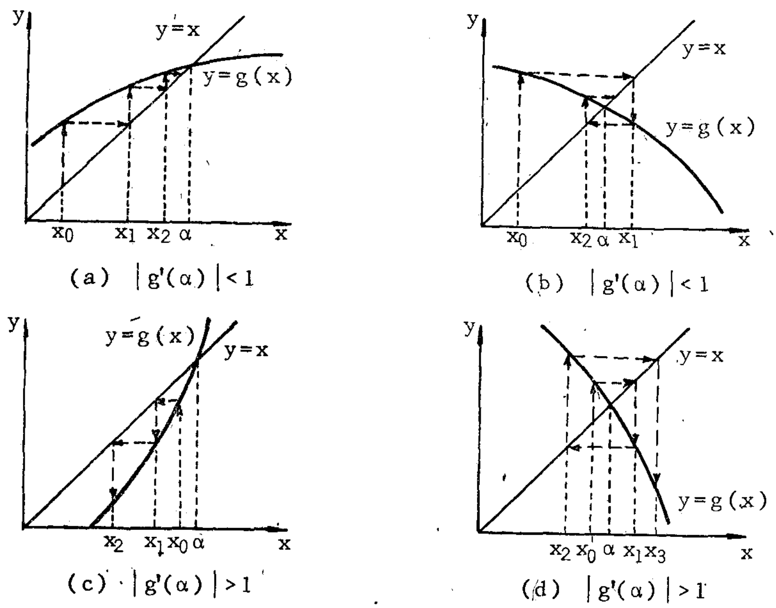
$$f(x)=o \qquad (1\cdot2)$$

$$x=g(x) \qquad (1\cdot3)$$

若 $x=a$ 爲方程式（1·2）之一根，則 $x=a$ 亦爲式（1·3）之一根，即 $f(a)=o$，$a=g(a)$。此 a 值即爲所欲求解之值，當然解題之前無法預知，不過我們可以循一定途徑，由一假設之值開始可逐步逼近所要之 a 值。首先假設 $x=x_0$ 爲起始值，代入式（1·3）等號右邊算得 $g(x_0)$ 之值，若 $g(x_0) \neq x_0$ 則 x_0 非爲所求之根，令其爲 x_1，即 $x_1=g(x_0)$。再以 $x=x_1$ 代入式（1·3）等號右邊算得 $x_2=g(x_1)$。如此重覆以下式計算，可連續算得 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n$ 之值。

$$x_i=g(x_{i-1}),\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1,\ n \qquad (1\cdot4)$$

若上述重覆計算最後可得 x_n 等於或近似等於 x_{n-1}，或 $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$，$\epsilon$ 爲一很小值，則 x_n 即等於或近似等於所欲求得之 a。亦即 x_n 可收斂至所求之根 a。上述重覆運算並不一定均能收斂至所求之根。參考〔圖 1－1〕各



〔圖 1－1〕直接代入法

情形，可知只有在 $\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} < 1$ 時，數列 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 才會收歛。

現舉一簡單實例說明直接代入法的應用，欲求 $\sqrt{3}$ 之值，相當於求下列方程式之根。

$$f(x) = x^2 - 3 = 0$$

上列方程式改寫成式（1.3）可有許多種不同型式，下列僅舉三種型式加以討論。

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) \qquad (1\cdot6a)$$

$$x = x^2 + x - 3 \qquad (1\cdot6b)$$

$$x = \frac{3}{x} \qquad (1\cdot6c)$$

試從 $x_0 = 2$ 爲起始值，由式（1·6a）可得 $x_1 = 1.75$，$x_2 = 1.73214$，$x_3 = 1.73205$，$x_4 = 1.73205$；

由式（1·6b）可得 $x_1 = 3$，$x_2 = 9$，$x_3 = 87$，$x_4 = 7653$，……；

由式（1·6c）可得 $x_1 = 1.5$，$x_2 = 2$，$x_3 = 1.5$，$x_4 = 2$，……。

顯然可見，由式（1·6a）可以很快求得 $\sqrt{3}$ 之值，而由式（1·6b）及（1·6c）則均無法收歛至 $\sqrt{3}$。此點可以由各式右邊函數 g（x）之導數在 $\sqrt{3}$ 附近之值確知。

直接代入法之符傳程式十分簡單，下列爲一通用之直接代入法符傳主程式，該程式首先讀入一起始值 $X = x_0$ 及 $EPS = \epsilon$，$N = n$。程式內計算 $g(x_i)$ 係呼叫使用者自寫函數 G（X）運算之。依序利用式（1·4）計算 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ 至 x_n 爲止而停止運算，其間若發覺 $|x_i - x_{i-1}| < \epsilon$，則不再運算至 x_n，並印出 x_{i-1} 及 x_i 做爲所求之解。主程式後所附自寫函數係以式（1·6a）爲例寫成，可做爲書寫其他函數之參考。

```
   READ(5,15) X,EPS,N
15 FORMAT(2F10.2,I5)
   DO 20 I=1,N
   XOLD=X
   X=G(X)
   IF(ABS(X-XOLD).LE.EPS) GO TO 40
```


试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

```
20 CONTINUE
   WRITE(6,35) N,EPS,XOLD,X
35 FORMAT(16HONOT CONVERGE IN,I4,19H ITERATIONS, WITHIN,1PE10.3/
  *,37H THE LAST TWO SUCCESSIVE X VALUES ARE,2E13.6/
  *,35H TRY ANOTHER TYPE OF G(X) FUNCTION.)
   STOP
C**
40 WRITE(6,45) I,EPS,XOLD,X
45 FORMAT(26HOTHE SEQUENCE CONVERGES IN,I4
  *,19H ITERATIONS, WITHIN,1PE10.3/
  *,37H THE LAST TWO SUCCESSIVE X VALUES ARE,2E13.6)
   STOP
   END
   FUNCTION G(X)
   G=0.5*(X+3.0/X)
   RETURN
   END
```

1—3 牛頓—瑞福生法 (NEWTON RAPHSON METHOD)

牛頓-瑞福生法解方程式(1·2)之根，相當於在直接代入法中選擇

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (1\cdot7)$$

亦即以下式做重覆運算以求解。

$$x_i=x_{i-1}-\frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \qquad (1\cdot8)$$

牛頓-瑞福生法一般收斂很快。因爲函數g(x)之導函數爲：

$$g'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \qquad (1\cdot9)$$

當x=a時，f(a)=o，若f'(a)不等於o，則g'(a)=o， 故式(1·8)在根x=a之附近必然會收斂。〔圖1－2〕說明牛頓-瑞福生法之反覆運算過程及收斂情形。

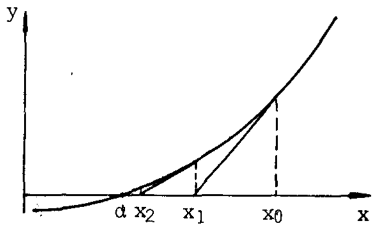
前節所列符傳主程式亦可用來以牛頓-瑞福生法求式(1·1)之根。只要自寫一函數G(x)用以計算x－f(x)／f'(x)之函數值即可。以式(1·1)之非線性方程式爲例，

$$g(x)=x-\frac{\tan xL-xL}{(\sec^2 xL-1)L}=\frac{x}{\sin^2 xL}-\frac{\cos xL}{L\sin xL} \qquad (1\cdot10)$$

其符傳函數可寫成如下，其後爲輸入資料及計算結果。

```
FUNCTION G(X)
REAL L
DATA L/10.0/
XL=X*L
CS=COS(XL)
SS=SIN(XL)
G=X/(SS*SS)-CS/(L*SS)
RETURN
END

0.43        0.00001       10
```



〔圖 1 - 2〕牛頓—瑞福生法

```
THE SEQUENCE CONVERGES IN   8 ITERATIONS, WITHIN 1.000E-05
THE LAST TWO SUCCESSIVE X VALUES ARE 4.493471E-01 4.493409E-01
```

1—4 半區間法

若方程式（1·2）僅有一單根介於 x_A 與 x_B 之間，且函數 $f(x)$ 在 x_A 與 x_B 之間連續，則 $f(x_A)$ 與 $f(x_B)$ 必爲異號值。令 $x_C=(x_A+x_B)/2$，並計算 $f(x_C)$，再根據 $f(x_C)$ 之正負，做下列之判斷：

Ⅰ）若 $f(x_C)$ 與 $f(x_B)$ 同號，根必介於 x_A 與 x_C 之間，可改令 x_B 等於 x_C，並重覆上述運算。

Ⅱ）若 $f(x_C)$ 與 $f(x_A)$ 同號，根必介於 x_B 與 x_C 之間。則改令 x_A 等於 x_C，並重覆上述運算。

不管 $f(x_C)$ 與何者同號，根之可能範圍即縮小一半。若前述步驟共進行 n 次，則根之誤差將小於 $|x_B-x_A|*2^{-n}$，因此可以根據 x_A 與 x_B 之差值，適當選擇 n 值而達到所要求之精度。

若根之範圍不能確定在某一區間時，可從一指定之最小值 x_{min} 開始，以 δx 爲一區間，搜尋每一區間是否有根存在。意即首先判斷 x_{min} 與 $x_{min}+\delta x$ 之間，$f(x)$ 是否變號，如未變號，則判斷 $x_{min}+\delta x$ 與 $x_{min}+2\delta x$ 之間，$f(x)$ 是否變號。依此類推，直至某一區間 $f(x)$ 變號爲止。再以前述半區間法

求得較精確之根。如欲求較多之根，可用已求得之根之右側值爲 x_{min}，繼續搜求較多之根。

δx 之決定應注意兩項原則：一爲 δx 愈大則搜求速度快，但需做較多次之半區間判斷；二爲 δx 須小於最靠近之兩個根之差值，否則在搜尋過程中，可能會漏掉所要之根。

〔表 1 － 1〕即爲以半區間法求根之一通用副程式。該副程式能從 XMIN 開始以 DX 爲一區間搜尋至有根之區間後改以半區間法求更精確之根。所得根之誤差小於 $DX * 2^{-M}$ 。如果搜尋至 XMAX 仍無根時，則回到呼叫程式。

▨〔表 1 - 1〕　半區間法副程式

```
      SUBROUTINE SEARCH(X,FX,F,XMIN,XMAX,DX,ICUT,FLMT)
C**
      FA= 1.0
      FB=-1.0
      X=XMIN
      IR=0
      GO TO 55
C**
   50 IF(X.GT.XMAX) GO TO 77
      X=X+DX
      IE=IR+ICUT
C**
   55 FX=F(X)
      IR=IR+1
      IF(ABS(FX).GE.FLMT) RETURN
      IF(FX) 65,80,70
C**
   65 XA=X
      FA=FX
      IF(FB) 50,80,75
C**
   70 XB=X
      FB=FX
      IF(FA) 75,80,50
C**
C**   FOLLOWING STATEMENT FOR HALF INTERVAL METHOD
   75 X=(XA+XB)*0.5
C**
C**   FOLLOWING STATEMENT FOR FALSE POSITION METHOD
C  75 X=XA-FA*(XB-XA)/(FB-FA)
C**
      IF(IR-IE) 55,55,80
C**
   77 PRINT 78,XMIN,XMAX
   78 FORMAT(16H NO ROOT BETWEEN,F10.2,5H  AND,F10.2)
C**
   80 RETURN
      END
```

如欲求方程式（1·1）介於1.0至100.0間之10個根，可用〔表1－2〕之主程式及對應之函數程式，配合〔表1－1」之副程式求得。

▩〔表1－2〕 半區間法主程式

```
      EXTERNAL F
      XMAX=100.0
      XMIN=1.0
      DX=0.1
      ICUT=20
      FLMT=1000.
      DO 30 I=1,10
   20 CALL SEARCH(X,FX,F,XMIN,XMAX,DX,ICUT,FLMT)
      IF(ABS(FX).GE.FLMT) WRITE(6,35)
      WRITE(6,25) I,X,FX
   25 FORMAT(3H0I=,I3,7H, X(I)=,1PE13.6,7H, F(X)=,E13.6)
      XMIN=X+DX/10.0
      IF(X.GT.XMAX) STOP
   30 CONTINUE
      STOP
   35 FORMAT(39H0FOLLOWING MAY BE A DISCONTINUOUS POINT)
      END
```

```
      FUNCTION F(X)
      REAL L
      DATA L/1.0/
      XL=X*L
      F=SIN(XL)/COS(XL)-XL
      RETURN
      END
```

〔表1－3〕爲上列程式之輸出結果，注意其中第1,3,5,7,9等五個x所對應之f（x）分別爲2066.7，－2528.5，－4769.0，4952.2,3032.9皆相當大，可知並非f（x）＝o之根。實際上f（x）在這五個x值處爲不連續，x值兩側之f（x），一邊趨近於正無窮大，另一邊趨近於負無窮大。因此在利用半區間法時，應校核最後算得之f（x）以判斷所得之x是否爲所要之根。

▩〔表1－3〕 半區間法輸出結果

```
FOLLOWING MAY BE A DISCONTINUOUS POINT

I=   1, X(I)= 1.570313E+00, F(X)= 2.066731E+03

I=   2, X(I)= 4.493410E+00, F(X)= 4.768372E-07

FOLLOWING MAY BE A DISCONTINUOUS POINT

I=   3, X(I)= 4.712785E+00, F(X)=-2.528509E+03
```

```
I=  4, X(I)= 7.725253E+00, F(X)= 2.908707E-05
FOLLOWING MAY BE A DISCONTINUOUS POINT
I=  5, X(I)= 7.854003E+00, F(X)=-4.768958E+04
I=  6, X(I)= 1.090412E+01, F(X)= 2.956390E-05
FOLLOWING MAY BE A DISCONTINUOUS POINT
I=  7, X(I)= 1.099537E+01, F(X)= 4.952158E+03
I=  8, X(I)= 1.406620E+01, F(X)= 1.859665E-04
FOLLOWING MAY BE A DISCONTINUOUS POINT
I=  9, X(I)= 1.413713E+01, F(X)= 3.032878E+04
I= 10, X(I)= 1.722076E+01, F(X)= 1.983643E-04
```

習　題 1

1. 求方程式 $x^3-2x-5=0$ 之實根。
2. 求方程式 $\cosh x \cos x+1=0$ 之最小根。
3. 在牛頓一瑞福生法中若 $f'(x)$ 不易求得，則式(1・8)中之 $f'(x_{i-1})$ 可以用下列差微分近似之，一般稱此法爲割線法(Secant Method)：

$$f'(x_{i-1})\simeq\frac{f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{x_{i-1}-x_{i-2}}$$

試按上述方法寫一符傳程式。

2

數值積分法

2—1 前　　言

許多數學積分式很難甚或無法以解析方法求得其確切積分解，因此必須以數值方法計算。數值積分法一般並不陌生，最簡單的數值積分法爲習用之梯形面積法，其次爲辛蒲生法（Simpson's Rule），但程式中則以倫伯各積分法（Romberg Table）最常被採用。倫伯各積分法主要以梯形面積法爲基本，連續利用外插值法以獲得較準確的積分值。

2—2 梯形面積法

如欲計算下列積分 I

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{2·1}$$

可將 a，b 間分爲 n 等分，則每一等分之間隔爲 h＝（b－a）／n 。將每一間

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com