高等数学

本书编委会 编

人民出版社

高等数学

主　编：贺利敏
副主编：李立红　冯素芬
编　委：（按姓氏笔画排序）
王淑清　冯素芬　杨　勇
李立红　赵　琳　赵光耀
贺利敏　高媛媛　韩建华

人民出版社

责任编辑：陈鹏鸣　李　峰
封面设计：苏　丹

图书在版编目（CIP）数据
高等数学 /《高等数学》编委会编.
–北京：人民出版社，2006
ISBN 7-01-005814-8

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 高…　Ⅲ. 高等数学 – 高等
学校 – 教材　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 107438 号

高等数学
GAODENG SHUXUE

《高等数学》编委会编

人民出版社 出版发行
（100706　北京朝阳门内大街 166 号）

北京泽明印刷有限责任公司印刷　新华书店经销
2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
开本：787 × 1092 毫米　1/16　印张：16.25
字数：406 千字　印数：1–10 000 册

ISBN 7-01-005814-8　定价：20.00 元
购书电话：010-62962557　62988474

前　言

本书是根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的。它力求体现高职高专教学“以必需、够用为度”和“掌握方法、强化应用”的原则,着重培养学生的数学思想,不断提高学生利用数学工具解决实际问题的能力。

本书共十一章,分别介绍了集合与函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分与定积分、多元函数微积分、常微分方程、级数、空间解析几何与向量代数、线性代数与线性规划初步及概率初步等内容。此外,本书的附录还给出了积分表和概率分布表。在授课过程中,教师可根据教学实际情况,遵循必需、够用的原则进行取舍。

本书在编写过程中,采纳了一些从事高职高专高等数学教学教师的建议,对教材结构进行了调整。例如,本书将不定积分与定积分合为一章,多元函数的微分与积分合为一章,以使结构更为紧凑、连贯;适当增加了概率论和数学规划方面的知识等。

由于编者水平所限,书中难免存在错误和疏漏,恳请广大教师、学生和其他读者批评指正,以便再版时进行修改,使之不断提高和完善。

编　者

2006 年 6 月

目　录

第一章　集合与函数

集合论是现代数学的一个重要分支,它的基本思想方法和符号已被运用到数学的各个领域. 函数是数学中的重要概念和通用语言，在自然科学、工程技术和某些社会科学中有着极其重要的应用. 函数的大部分内容在中学数学中已学过，本章的任务是对以前知识的复习、梳理与提高.

第一节　集　合

一、集合的概念与表示方法

1. 集合的概念

所谓集合，就是指具有某种共同属性或特征的对象的全体. 如下面几个例子：

例 1.1.1　太阳系的所有行星.

例 1.1.2　某大学计算机系的全体同学.

例 1.1.3　单位圆 $x^2+y^2=1$ 上所有的点.

例 1.1.4　平行四边形的全体.

例 1.1.5　我国的直辖市.

以上这些例子都是集合.

习惯上，集合常用大写字母 A, B, C, …等表示；构成集合的每一个对象称为该集合的元素，常用小写字母 a, b, c, x 等表示.

设 A 是一个集合，若 a 是 A 的元素，则 a 属于 A，记作 $a\in A$；若 a 不是 A 的元素，则 a 不属于 A，记作 $a\overline{\in}A$ 或 $a\notin A$.

注意　集合的元素具有确定性、互异性、无序性三个特征.

确定性是指构成集合的元素具有明确的特征，即某个元素在集合 A 中或不在集合 A 中二者必居其一，能够明确区分. 不能确定的对象不能构成集合. 例如，高个子学生，就不能构成集合. 这是因为没有规定多高才算是高个子，“高个子学生”不能确定.

互异性是指集合中不同的字母表示不同的元素，而同一元素在集合中不能重复.

无序性是指集合的构成与元素的顺序无关，构成元素相同而仅排列顺序不同的集合应认为是同一个集合.

2. 集合的表示法

(1) 列举法：将集合的所有元素按任意顺序列出，然后用“{}”括起来，要求元素不能重复、遗漏.

例如，例 1.1.5 所指的集合，若用列举法表示集合 A，则 $A=\{$北京，上海，天津，重庆$\}$.

例 1.1.6　设 B 表示方程的根 $x^2+x-2=0$ 的根，则 B 可用列举法表示为 $B=\{-2, 1\}$.

(2) 描述法：设 A 是一个集合，a 是 A 中的任一元素，$P(a)$ 是 a 所具有的属性，则 $A=\{a|P(a)\}$. 这里，a 也可用其他字母来代替.

例如，例 1.1.6 中的 B 可用描述法表示为 $B=\{x|x^2+x-2=0\}$.

例 1.1.7 设 C 表示由大于等于 -3 而小于 6 的全体实数构成的集合，则 $C=\{x|-3\leqslant x<6\}$.

3. 集合的类型

(1) 有限集：含有有限个元素的集合称为有限集.

例 1.1.1、例 1.1.2、例 1.1.5、例 1.1.6 中的集合都是有限集.

(2) 无限集：含有无限个元素的集合称为无限集.

例 1.1.3、例 1.1.4、例 1.1.7 中的集合都是无限集.

不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$.

例 1.1.8 设 $A=\{x|x+2=x\}$，则 $A=\varnothing$.

二、集合之间的关系

1. 集合的相等

定义 1.1.1 若集合 A 与集合 B 是由完全相同的元素组成的，则称集合 A 与集合 B 相等，记为 $A=B$.

例 1.1.9 设 $A=\{x|2^x=1\}$，$B=\{0\}$，则 $A=B$.

注意不能将集合 $\{0\}$ 与空集 $\varnothing$ 相混淆，因为前者是含有单个元素“0”的集合，而后者是不含任何元素的集合.

2. 集合间的包含关系

定义 1.1.2 若集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 为集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$（读作 A 包含于 B），或 $B\supseteq A$（读作 B 包含 A）.

例 1.1.10 设 $A=\{x|0\leqslant x<20\}$，$B=\{x|0\leqslant x<10\}$，$C=\{x|x\leqslant 10\}$，显然 B 是 A 的子集，B 也是 C 的子集，即 $B\subseteq A$，且 $B\subseteq C$. 但 A 不是 C 的子集，C 也不是 A 的子集.

关于子集有以下结论：

(1) $A\subseteq A$，即任何集合都是其自身的子集；

(2) 对于任何集合 A，都有 $\varnothing\subseteq A$，即空集是任何集合的子集；

(3) 如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$，即集合的包含关系具有传递性；

(4) 如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$，则 $A=B$，即两个集合相互包含，则它们相等.

三、集合的运算

1. 并集

定义 1.1.3 由集合 A 与集合 B 中的所有元素汇总构成的集合，称为 A 与 B 的并集，记为 $A\cup B$.

例 1.1.11 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$，则 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$.

例 1.1.12 设 $A=\{x|0\leqslant x<3\}$，$B=\{x|-1<x\leqslant 2\}$，则 $A\cup B=\{x|-1<x<3\}$.

2. 交集

定义 1.1.4 由集合 A 与集合 B 中的公共元素所构成的集合，称为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$.

如，例 1.1.11 中 $A\cap B=\{2, 4\}$，例 1.1.12 中 $A\cap B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$.

3. 差集

定义 1.1.5 由属于集合 A 但不属于集合 B 的元素所构成的集合，称为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$.

例如，例 1.1.11 中 $A-B=\{1, 3, 5\}$，例 1.1.12 中 $A-B=\{x|2<x<3\}$.

读者不妨思考一下，例 1.1.10、例 1.1.11 中，$B-A=$？

集合及集合间的关系可以用图形直观地表示，这种表示方法称为文氏图（也叫韦恩图）表示. 文氏图是用一个简单的平面区域（通常用圆形区域）代表一个集合，集合中的元素用区域内的点表示. 图 1.1 给出了集合相等、包含、并、交、差关系的文氏图.

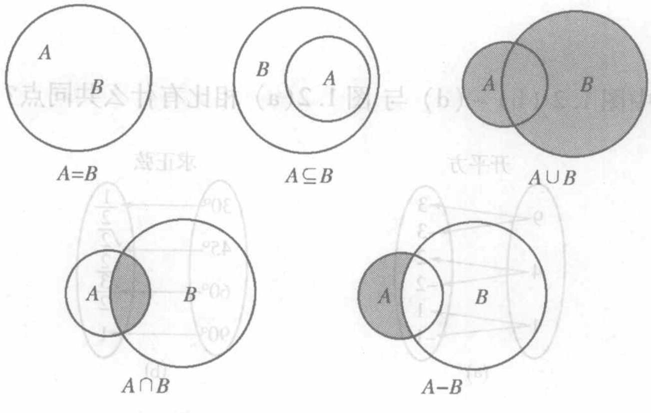


图 1.1

习题 1.1

基础部分

1. 设 $A=\{a, b, c\}$，$B=\{a, b\}$ 下列式子中哪些是正确的？

(1) $\varnothing\in A$；　(2) $\varnothing\subseteq A$；　(3) $A\subseteq A$；　(4) $A=B$；

(5) $A\supseteq B$；　(6) $a\in A$；　(7) $\{a\}\in A$；　(8) $a\subseteq A$；

(9) $\{a\}\subseteq A$；　(10) $c\notin B$；　(11) $\{c\}\in B$；　(12) $B<A$.

2. 设集合 $A=\{a, 1, 2, 5\}$，$B=\{2, 3, 4, b\}$，若 $A\cap B=\{2, 3, 5\}$，则 $a=$________，$b=$________.

3. 设 A 为任意集合，则 $A\cup A=$________，$A\cap A=$________，$A\cup\varnothing=$________，$A\cap\varnothing=$________，$A-A=$________，$A-\varnothing$________.

4. 已知 $\{1, 2\}\subseteq M\subseteq\{1, 2, 3, 4, 5\}$，那么这样的集合 M 共有（　）个.

A 6　　B 7　　C 8　　D 9

5. 如果 $A=\{x|3<x<5\}$，$B=\{x|x\geqslant 4\}$，求：

(1) $A\cup B$; (2) $A\cap B$; (3) $A-B$; (4) $B-A$.

6. 求集合 $A=\{a, b, c\}$ 的所有子集.

第二节 映射与函数

一、常量与变量

我们在研究实际问题的时候，会遇到不同的量. 这些量一般可以分为两种——常量和变量. 在某一过程中，始终取同一数值而保持不变的量称为常量，可以取不同数值而不断变化的量叫变量. 例如，一列从潍坊到北京的直达火车在行驶过程中，火车上的人数是保持不变的，是常量，潍坊到北京的路程也是常量；而火车的速度是变量，火车与北京之间的距离也是变量. 应当注意的是，一个量是常量还是变量，要依赖于研究这个现象所在的场合以及给定的条件，如一个人从小到大，身高是个变量. 而考察一个人在一个小时内的身高应该是个常量. 通常我们用小写字母 a, b, c 等表示常量，用字母 x, y, z 等表示变量.

二、映射的概念

1. 映射的定义

观察图 1.2，其中图 1.2 (b) ~ (d) 与 图 1.2(a) 相比有什么共同点？

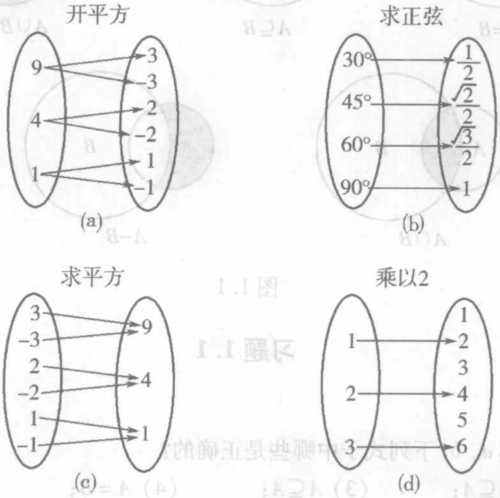


图 1.2

图 1.2(b) ~ (d) 的共同点是：对于左边的集合 A 中的任何一个元素，在右边集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫映射.

定义 1.2.1 一般地，设 A, B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素 x，在集合 B 中都有唯一的元素 y 和它对应，则称 f 是由集合 A 到集合 B 的映射，称 y 是 x 在映射 f 作用下的像，记作 $f(x)$，x 称做 y 的原像. 映射 f 可记作 f: $A\to B$.

所以图 1.2 中 (a) 不是映射，(b) ~ (d) 是映射.

2. 映射的特征

（1）两个集合有先后顺序：从 A 到 B 的映射与从 B 到 A 的映射是不同的映射.

（2）对应法则 f 的存在性：必须在 f 的作用下 A 中的元素才与 B 中的元素对应.

（3）A 中的任何一个元素都有像，并且像唯一.

（4）不要求集合 B 中每一个元素都有原像. 即 $f(A)\subseteq B$，A 中元素像的集合是 B 的子集.

3. 一一映射

定义 1.2.2 一般地，设 A，B 是两个集合，f: $A\to B$ 是集合 A 到集合 B 的映射. 如果在这个映射下，对于集合 A 中不同元素，在集合 B 中有不同的像，而且 B 中每一元素都有原像，那么 f: $A\to B$ 叫做 A 到 B 上的一一映射.

三、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.2.3 设有两个非空实数集合 D、B，如果对于数集 D 中的每一个数 x，按照确定的规则 f 对应着数集 B 中唯一的一个数 y，则称 f 是定义在集合 D 上的函数.

事实上，函数 f 就是集合 D 到集合 B 的一种映射.

D 称为函数的定义域，集合 $B_f=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的值域. 虽然 $B_f\subseteq B$.

我们把 x 称为自变量，y 称为因变量.

2. 函数的三要素

函数具有三要素，即定义域、值域和对应法则，对应法则是核心. 由于值域可由定义域和对应法则唯一确定，两个函数当且仅当定义域与对应法则分别相同时，才是同一函数.

3. 函数的表示法

（1）解析式法：把两个变量的函数关系，用一个等式来表示，这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式.

优点：函数关系清楚，容易从自变量求出对应的函数值，便于用解析式来研究函数性质，是数学中表示函数的主要方法.

如一次函数 $y=kx+b(k\neq 0,\ k,\ b$ 为常数)，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$.

（2）列表法：列出表格来表示两个变量的函数关系. 如数学用表中的平方表、三角函数表等.

优点：不必通过计算就可知道自变量取某些值时所对应的函数值.

（3）图像法：用函数图像表示两个变量之间的关系. 如温度曲线，二次函数图像等.

优点：能直观形象地表示出函数的变化情况.

例 1.2.1 已知 $y=f(x)=x^3+1$，求 $f(2)$，$f(a-1)$，$[f(x)]^2$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解 $f(2)=2^3+1=9$,

$f(a-1)=(a-1)^3+1=a^3-3a^2+3a$,

$[f(x)]^2=(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1$,

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3+1=\frac{1}{x^3}+1.$

求函数定义域时，要注意两点：① 在实际问题中，函数的定义域要由实际问题的意义确定. 例如前面提到的圆的面积 S 与半径 r 之间的函数关系 $S=\pi r^2$，圆的半径不能为零和负数，所以 $D(f)=(0,+\infty)$. ② 如果不考虑函数的实际意义，只研究用算式表达的函数，这时我们规定：函数的定义域是使函数表达式有意义时自变量所取的实数值的全体.

例 1.2.2 求函数 $y=\lg(1-x)+\sqrt{x+4}$ 的定义域.

解 因为负数和零没有对数，所以 $1-x>0$，即 $x<1$；又 $x+4\geqslant 0$，即 $x\geqslant -4$，故函数的定义域为 $-4\leqslant x<1$，用区间表示为 $[-4,1)$.

例 1.2.3 求函数 $y=\arcsin\frac{1}{x}$ 的定义域.

解 除 x 不能为零外，且须 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $|x|\geqslant 1$. 这个不等式已经把 $x=0$ 除外，所以函数的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

四、函数的性质

1. 函数的单调性

定义 1.2.4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，对于任意 $x_1<x_2$，x_1，$x_2\in(a,b)$.

(1) 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调增（或递增）函数，这时，(a,b) 为 $y=f(x)$ 的单调增区间；

(2) 若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调减（或递减）函数，这时，(a,b) 为 $y=f(x)$ 的单调减区间.

从几何图形上看，单调增函数的图形，表现为从左至右向上升的曲线；单调减函数的图形，表现为从左至右向下降的曲线，如图 1.3.

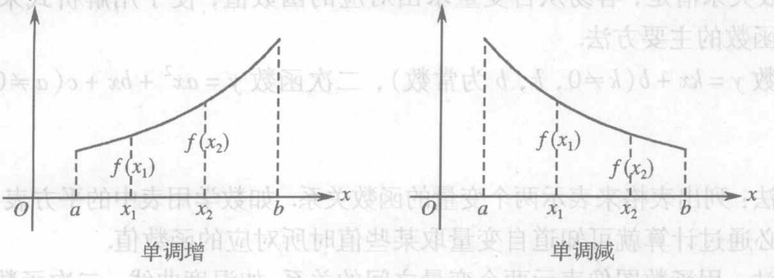


图 1.3

单调增函数和单调减函数统称为单调函数；使函数为单调函数的自变量的变化区间称为单调区间.

如函数 $y=x^3$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内都是单调增加的；函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，而在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的.

2. 函数的奇偶性

定义 1.2.5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对任意 $x\in D$，

(1) 若 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数；

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

例 1.2.4 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x(x+\sin x)$；(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；(3) $y=x^3+2$.

解 (1) 因为 $f(-x)=(-x)[(-x)+\sin(-x)]=-x(-x-\sin x)=x(x+\sin x)=f(x)$，所以 $y=x(x+\sin x)$ 是偶函数.

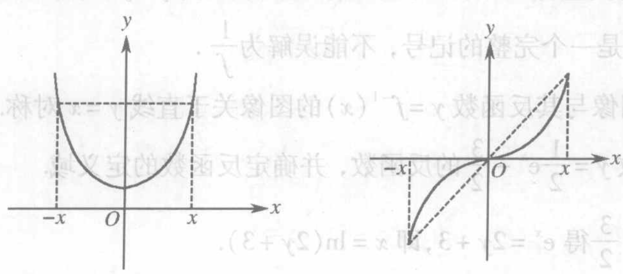
(2) 因为 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-f(x)$，所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(-x)=(-x)^3+2=-x^3+2$，既不等于 $f(x)$，也不等于 $-f(x)$，所以 $y=x^3+2$ 为非奇非偶函数.

事实上，我们可以计算 $f(x)+f(-x)$ 来判断奇偶性，尤其当函数为奇函数时最为有效. 此时 $f(x)+f(-x)=0$，如例 1.2.4 中的 (2)，$f(x)+f(-x)=\ln(x^2+1-x^2)=\ln 1=0$，所以函数为奇函数.

一般地，两个奇函数的和为奇函数，两个偶函数的和为偶函数，一个奇函数与一个偶函数的和既不是奇函数,也不是偶函数.

显然，偶函数的图形关于 y 轴对称，而奇函数的图形关于原点对称，如图 1.4.



偶函数　　奇函数

图 1.4

3. 函数的周期性

定义 1.2.6 设 T 为一个不为零的常数，如果函数 $y=f(x)$ 对于任意 $x\in D$，且 $x+T\in D$，都有 $f(T+x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是周期函数. 使上述关系式成立的最小正数 T，称为函数 $y=f(x)$ 的周期，或者说函数 $y=f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

如函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的特点：周期函数的图形可由该函数在定义域内长度为 T 的区间上的图形平移而

得到.

4. 函数的有界性

定义 1.2.7 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对任意 $x\in(a,b)$，不等式 $|f(x)|\leqslant M$ 或 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$ 恒成立，则称 $y=f(x)$ 是有界函数，即 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界；如果这样的正数 M 不存在，则称 $y=f(x)$ 是无界函数，即 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界.

注意 上述定义也适合于闭区间、半开区间和无限区间.

有界函数的特点：有界函数的图形介于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的（对于任意实数 x，不等式 $|\sin x|\leqslant 1$ 总成立，这里 $M=1$）.

又如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,2)$ 内是无界的（不存在这样的正数 M，使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于区间 $(0,2)$ 内的一切 x 值都成立）. 但函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,3]$ 内是有界的（可取 $M=1$，对于区间 $[1,3]$ 内的一切 x 值，不等式 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 都成立）.

五、反函数

定义 1.2.8 设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 Z. 如果对于任意 $y\in Z$，都可以从关系式 $y=f(x)$ 中确定唯一的值 $x\in D$ 与之对应，那么所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 反函数的定义域为 Z，值域为 D.

习惯上，函数的自变量都以 x 表示，反函数也可表示为 $y=f^{-1}(x)$.

注意 这里的 f^{-1} 是一个完整的记号，不能误解为 $\dfrac{1}{f}$.

函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.2.5 求函数 $y=\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{3}{2}$ 的反函数，并确定反函数的定义域.

解 由 $y=\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{3}{2}$ 得 $e^x=2y+3$，即 $x=\ln(2y+3)$.

将上式中的 x，y 互换，因此得到函数 $y=\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{3}{2}$ 的反函数为 $y=\ln(2x+3)$，反函数的定义域为 $\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

习题 1.2

基础部分

1. 已知映射 $f: A\to B$，其中集合 $A=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$，集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的像，且对任意的 $a\in A$，在 B 中和它对应的元素是 a^2，则集合 B 中元素的个数是（　　）.

A 2　　B 3　　C 4　　D 5

2. 已知函数$f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$的定义域是A，函数$g(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}$的定义域是$B$，则$A$，$B$的关系是（　　）.

A　$A=B$　　B　$A\subset B$　　C　$A\supset B$　　D　$A\cap B=\varnothing$

3. 函数$y=\sqrt{3x-x^2}$的定义域是（　　）.

A　$(-\infty, 0)$　　B　$(0, 3]$　　C　$[0, 3]$　　D　$[-3, 0]$

4. 设$f(x)$的定义域是$[0, 4]$，则$f(x^2)$的定义域是（　　）.

A　$[-16, 16]$　　B　$[-2, 2]$　　C　$[0, 2]$　　D　$[0, 16]$

5. 下列各函数中，图形关于原点对称的是（　　）.

A　$y=\sqrt{x^3}$　　B　$y=\sqrt{1+x^2}$　　C　$\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$　　D　$y=x|x|$

6. 下列各组函数中，互为反函数的是（　　）.

A　$y=x^3$，$y=\sqrt[3]{x}$　　B　$y=a^x$，$y=a^{-x}$

C　$y=\tan x$，$y=\cot x$　　D　$y=e^x$，$y=\lg x$

7. 下列各函数中在其定义域内为有界函数的是（　　）.

A　$y=\ln x$　　B　$y=\tan x$　　C　$y=\dfrac{1}{1+x^2}$　　D　$y=\sqrt{1+x}$

8. 已知集合$A=\mathbf{R}$，$B=\{(x, y)|x, y\in\mathbf{R}\}$，$f$: $A\to B$是从A到B的映射，f: $x\to(x+1, x^2+1)$，则B中的元素$\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{4}\right)$的原像为________.

9. 已知$f(2x)=3x-1$，且$f(a)=4$，则$a=$________.

10. $f(x)=ax^2+ax-1$，若$f(x)<0$在$\mathbf{R}$上恒成立，则a的取值范围是________.

11. 函数$y=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$的定义域是________.

12. 若函数$f(x-1)$的定义域是$[0, 2]$，则函数$f(x+1)$的定义域是________.

13. 二次函数$y=x^2-2x$的单调增加区间是________.

14. 已知$f(x)$是一次函数．若$f(f(x))=9x+3$，求$f(x)$.

15. 将长6cm的铁丝围成一个一边长为x的矩形，试将此矩形的面积y表示成x的函数.

16. 设$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，求$f[f(x)]$和$f\{f[f(x)]\}$.

17. 设$f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1+\dfrac{1}{x^2}$，求$f(x)$.

18. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=2x^3-3x+1$；　　（2）$y=x\cos x-\sin x$；

（3）$y=\dfrac{x(a^x-1)}{a^x+1}$；　　（4）$y=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$.

19. 设$f(x)$是以4为周期的奇函数，且$f(3)=2$，求$f(5)$的值.

应用部分

根据下列应用题所给的条件，建立函数关系式：

1. 以直的河岸为一边围成一块矩形的土地，除河岸的一边外，其余的三边均筑起篱笆，现有36m长的篱笆，试将场地的面积S表示为河岸一边的边长x的函数.

2. 某车间要生产一批带盖的圆柱形铁桶，要求每个桶的容积为定值V，试找出桶的表面积S与桶底半径r的函数关系.

3. 某工厂有一水池，其容积为 $100m^3$，原有水为 $10m^3$. 现在每 10 分钟注入 $2m^3$ 的水，直到灌满为止，试将水池中水的体积 V 表示为时间 t 的函数，问需多少分钟水池才能灌满?

第三节 初等函数及其图形

一、基本初等函数

基本初等函数是最常见、最基本的一类函数. 基本初等函数包括常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 在这一节中,我们将给出这些函数的简单性质.

1. 幂函数 $y=x^a$(a 为任何实数)

幂函数的定义域随 a 的不同而不同. 但无论 a 取何值，它在 $(0,+\infty)$ 内都有定义，而且图形都经过 $(1,1)$ 点.

当 a 为正整数时，x^a 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 a 为偶（奇）数时，x^a 为偶（奇）函数.

当 a 为负整数时，x^a 的定义域为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$.

2. 指数函数、对数函数

指数函数 $y=a^x$($a>0$, 且 $a\neq1$)

指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，它严格单调增加；当 $0<a<1$ 时,它严格单调减少. 函数的图形都经过 $(0,1)$ 点.

对数函数 $y=\log_a x$($a>0$, 且 $a\neq1$)

对数函数 $\log_a x$ 是指数函数的反函数，它的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，它严格单调增加；当 $0<a<1$ 时，它严格单调减少. 函数的图形都经过 $(1,0)$ 点.

在高等数学中，常用以 e 为底的指数函数 e^x 和以 e 为底的对数函数 $\log_e x$（记作 $\ln x$）. $\ln x$ 称为自然对数. 这里 $e=2.718\,281\,8\cdots$，是一个无理数.

3. 三角函数、反三角函数

常用的三角函数有正弦函数 $y=\sin x$；余弦函数 $y=\cos x$；正切函数 $y=\tan x$；余切函数 $y=\cot x$.

正弦函数和余弦函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，值域都是 $[-1,1]$，它们都是以 2π 为周期的有界函数. 正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数.

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为除去 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$($n=0$, ±1, ±2, $\cdots$) 以外的实数，余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为除去 $x=n\pi$($n=0$, ±1, ±2, $\cdots$) 以外的实数，它们都是以 π 为周期的奇函数，并且在其定义域内都是无界函数.

三角函数还包括正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$. 其中 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$. 它们都是以 2π 为周期的周期函数，并且在开区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内都是无界函数.

反三角函数是三角函数的反函数.

反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，它是奇函数，在定义域 $[-1,1]$ 上单调增加.

反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，它是非奇非偶函数，在定义域 $[-1,1]$ 上单调减少.

反正切函数 $y=\arctan x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，它是奇函数，在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$，它是非奇非偶函数，在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

4. 复合函数、初等函数

1）复合函数

先看一个例子. 由物理学知，物体的动能 E 是速度 v 的函数：

$$E=\frac{1}{2}mv^2.$$

式中 m 是物体的质量. 如果考虑物体上抛运动，把一个质量为 m 的物体以初速度 v_0 垂直向上抛出，由于地球引力的作用，它就不断减速，这时，$v=v_0-gt$，于是物体的动能 E 通过速度成为时间的函数：

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2.$$

$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$ 可以看成由 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=v_0-gt$ 复合而成的函数. 下面给出复合函数的定义：

定义 1.3.1 设有两个函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$，如果对于 x 所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 有定义，则 y 通过 u 也是 x 的函数，那么称这个函数是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

其中 x 是自变量，y 是因变量，u 叫做中间变量.

例如，由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成的复合函数是 $y=\sqrt{1-x^2}$，其定义域是 $[-1,1]$.

利用复合函数不仅能将若干个简单的函数复合成一个函数，还可以把一个较复杂的函数分解成几个简单的函数，这对于今后掌握微积分的运算是很重要的.

例 1.3.1 $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 由 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$ 复合而成.

例 1.3.2 $y=\sin^2(x+1)$ 由 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=x+1$ 复合而成.

例 1.3.3 $y=\cos 2^{x-1}$ 由 $y=\cos u$，$u=2^v$，$v=x-1$ 复合而成.

其中 u，v 为中间变量.

注意 不是任何两个函数都能复合成一个复合函数. 如 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 对于 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中的任何 x 值所对应的 u，都不能使 $|u|\leqslant 1$ 成立，所以 $y=\arcsin(2+x^2)$ 没有意义.