数学小丛书

13

复数与几何

常庚哲　伍润生

科学出版社
www.sciencep.com

数学小丛书

13

复数与几何

数学小丛书 13

复数与几何

常庚哲　伍润生

科学出版社
北京

内 容 简 介

这本小册子通过许多的例子,说明了复数在平面上的几何学中的一些方便的、有趣的应用.第1节简单复习关于复数的基本知识.第2节列举了复数应用于几何学的一些一般性的例子.以下第3,4,5,6节分别说明复数在共线、共圆、共点,圆族,复数的分式线性变换,等速圆周运动等方面的应用.在说明这些应用的同时,介绍了一些数学上常用的思考方法.小册子中还附有习题和习题解答或提示,为读者提供练习的机会.

图书在版编目(CIP)数据

复数与几何/常庚哲,伍润生.—北京:科学出版社,2002
(数学小丛书)
ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ.复… Ⅱ.①常…②伍… Ⅲ.复数-应用-平面几何
Ⅳ.O123.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第010124号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码 100717
http://www.sciencep.com
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

2002年5月第 一 版 开本 787×960 1/32
2004年2月第二次印刷 印张 3 1/4 插页 1
印数 5 001—8 000 字数 48 000

全套书定价:99.00元(共18册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

馬克思说：「一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步」。恩格斯说：「要辯证而又唯物地了解自然，就必须熟悉数学」。在科教兴国，振兴中华的今天，向全社会普及数学，实在是一件刻不容缓的大事。

数学小丛書是由我国一些著名数学家撰写的一批数学普及读物精品。几十年来，我国几代科技人员中，不少人都曾得益于这套丛书。我衷心地祝賀数学小丛書的重版与補充，并预祝它取得更大的成功。

王元

二〇〇〇年四月

出版说明

1956年,为了向青少年传播数学知识,科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛,出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》. 在20世纪60年代初,这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作,被北京市数学会编成小丛书,相继由不同的出版社出版,并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品,曾激发一代青少年学习数学的兴趣. 书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想,促进了无数中学生在求学的道路上健康成长. 当年这套小丛书的许多读者,现在已经成为学有所成的科学技术工作者,国家建设的栋梁之才. 当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动,现在已经得到蓬勃的发展. 我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来,历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算π之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经300多年终于在20世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

目　　录

引　　言

从中学代数教科书中，读者已经学习过复数的基本概念和运算．但是，在那里学到的主要是复数的代数性质，例如，为了解决在实数范围内不可能解出的方程 $x^2+1=0$ 而引入了虚单位 i，后来又利用复数开出 1 的 n 次方根等等．读者可曾想到，在代数上起着重要作用的复数，在平面上的几何学中是否也能有方便的、有趣的应用？这本小册子的目的就是通过许许多多的例子来显示出复数在几何上的应用．

我们假定读者对于复数的定义和它的代数运算已经熟悉，但是，为了便于大家回忆，还是在第 1 节中简略地复述一下复数的基本知识．

我们希望读者尽可能地多做每节之后所附的习题，这对于掌握该节所介绍的方法大有好处．

1 复平面

每个复数 z 都具有 $x+\mathrm{i}y$ 的形式，其中 x 和 y 都是实数，分别称为 z 的实部和虚部，记成 $x=R(z)$，$y=I(z)$. i 称为虚单位，适合 $\mathrm{i}^2=-1$. 两个复数 z 与 z' 当且只当 $R(z)=R(z')$，$I(z)=I(z')$ 时 $z=z'$ 才成立.

我们可以在平面上表示复数. 在平面上取定一直角坐标系 OXY. 对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$，我们用平面上具有横坐标 $x=R(z)$ 与纵坐标 $y=I(z)$ 的点 $(x,y)=(R(z),I(z))$ 来表示（图 1.1）；反之，若给出平面上一点 (x,y)，我们取复数 $x+\mathrm{i}y$ 与这个点对应. 这样就建立了平面上所有的点和一切复数之间的一个一一对应. 正因为如此，我们就把复数和平面上的点完全等同起来，以后把具有坐标 $(R(z),I(z))$ 的

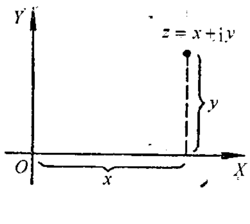

图 1.1

那点就用复数 z 来表示，说成点 z. 这样，平面上的每一点 z 都与一个确定的复数对应着，这个平面，就称之为**复平面**，OX 轴称为实轴，OY 轴称为虚轴，O 称为原点，它用复数 0 表示.

我们还可以把复数看成**平面向量**，所谓向量，是指既有方向又有长短的量. 给出一复数 z，以原点 O 为起点，以点 z 为终点，可以连成一条有方向的线段，这就是一个向量，用 $\overrightarrow{Oz}$ 表示. 反之，画出一个由 O 点起的向量，它的终点便惟一地确定了一个复数. 这样看来，平面上所有从原点出发的向量与一切复数之间也有了一个一一对应. 正因为如此，我们就可以把平面上的向量和复数完全等同起来. 今后就用复数 z 来表示向量 $\overrightarrow{Oz}$，并且约定可以写成

$$z = \overrightarrow{Oz}.$$

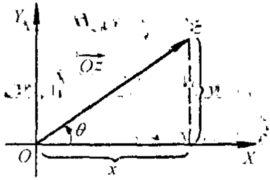

图 1.2

向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度用记号 $\|\overrightarrow{Oz}\|$ 表示. 令 $\rho = \|\overrightarrow{Oz}\|$，由图 1.2 可以看出

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

这个公式解决了向量长度的计算. 那么，如何表示出向量的方向呢？显然可以用 $\overrightarrow{Oz}$ 与实轴正

方向之间的夹角 θ 来表示，不过，我们要规定 θ 的正负号. 当 z 在包括实轴在内的上半平面时，θ 取非负值并满足 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$；当 z 在不包括实轴在内的下半平面时，θ 取负值，并且适合 $-\pi < \theta < 0$. 只有 $z = 0$ 是例外，这时无法规定 θ 的值. 事实上，这时向量 $\overrightarrow{Oz}$ 缩成了一个点，它的长度为零，当然谈不上有什么确定的方向，这种向量称为零向量.

仍由图 1.2 可见

$$x = \rho\cos\theta, \ y = \rho\sin\theta.$$

利用这个公式，对于任意异于零的复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 都可表成如下的形式

$$z = \rho\cos\theta + \mathrm{i}\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

为简便起见，我们把 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 用一个记号 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 来记，亦即置

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

于是就有

$$z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

这个表达式，很明显地指出了复数的向量性质：ρ 表示长短，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 管方向，它们各司各职，而复数 z 作为它们的乘积，就是一个既有长短又有方向的量——亦即为一向量了.

我们令$|z|=\rho$,称为 z 的**模**.满足条件 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的 θ 称为 z 的**辐角**,记成 $\theta=\arg z$.

例
$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},$$
$$\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}},$$
$$-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi},$$
$$\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}},$$
$$\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

读者已经知道,若 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则 z_1+z_2 是指复数
$$(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2).$$
我们来看看,这种加法运算具有什么样的几何解释.

以 $\overrightarrow{Oz_1}$ 和 $\overrightarrow{Oz_2}$ 为两邻边作一平行四边形 Oz_1zz_2.

由图 1.3 可见
$$R(z)=x_1+x_2=R(z_1+z_2),$$
$$I(z)=y_1+y_2=I(z_1+z_2).$$

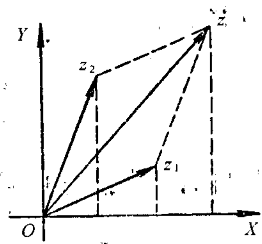

图 1.3

由复数相等的定义可知

$$z = z_1 + z_2.$$

我们也可以将此公式改写为

$$\overrightarrow{Oz} = \overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{Oz_2},$$

这正是向量加法的平行四边形规则.

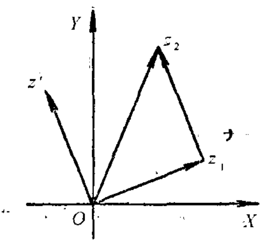

图 1.4

前面已经说过,一个向量的要素只有两个,即长短和方向,至于其他的一切东西,例如起点的位置,都是无关紧要的.如果有两个向量,它们的长短和方向相同,我们就说这两个向量是相等的.于是我们就可以考虑起点不在原点的向量,比如起点是 z_1 终点是 z_2 的向量 $\overrightarrow{z_1 z_2}$(图 1.4),将它的起点搬到原点去而不改变它的方向,就得到另一向量 $\overrightarrow{Oz'}$,根据向量相等,应当有

$$\overrightarrow{z_1 z_2} = \overrightarrow{Oz'}.$$

但是由向量加法的定义,又有

$$\overrightarrow{Oz'} + \overrightarrow{Oz_1} = \overrightarrow{Oz_2}.$$

从而

$$\overrightarrow{z_1 z_2} = \overrightarrow{Oz'} = \overrightarrow{Oz_2} - \overrightarrow{Oz_1} = z_2 - z_1 .$$

这就是说,起点在 z_1 终点在 z_2 的向量,如果把它平行地移动使起点落到原点,那么这个向量就可以用复数 $z_2 - z_1$ 表示. 这个看法请读者务必搞清楚,因为在这本小册子中一再地利用了这个事实. 例如起点在 -1 终点在 i 的那个向量可用 $i-(-1)=1+i$ 来表示(图 1.5).

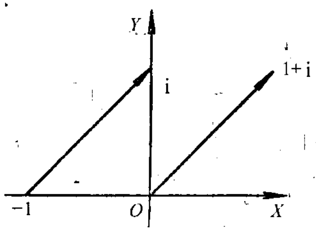

图 1.5

现在再来复习复数的乘法,设

$$z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}, \quad z = \rho e^{i\theta} .$$

所以

$$\begin{aligned} z_0 z &= (\rho_0 e^{i\theta_0})(\rho e^{i\theta}) \\ &= \rho_0 \rho (\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \rho_0 \rho [(\cos\theta_0 \cos\theta - \sin\theta_0 \sin\theta) \\ &\quad + i(\sin\theta_0 \cos\theta + \cos\theta_0 \sin\theta)] \\ &= \rho_0 \rho [\cos(\theta_0 + \theta) + i\sin(\theta_0 + \theta)] \\ &= \rho_0 \rho e^{i(\theta_0 + \theta)} . \end{aligned}$$

我们不对这个公式作一般的几何解释,只注意它的两个重要的特殊情况.

1）当 $\rho=|z|=1$ 时，$z=e^{i\theta}$，于是

$$zz_0=e^{i\theta}z_0=\rho_0 e^{i(\theta_0+\theta)}=|z_0|e^{i(\theta_0+\theta)}.$$

这表明，用 $e^{i\theta}$ 去乘任一个复数 z_0，并不改变 z_0 的模，但是使 z_0 的辐角增加了 θ. 从几何上来看，用 $e^{i\theta}$“作用”(乘)到向量 z_0 上去，得到了一个与 z_0 长短相同的向量，它的方向是由 z_0 的方向转动一个角度 θ 而得到. 这里须加一点说明，由于 θ 可正可负，当 $\theta>0$ 时，把 z_0 沿反时针方向转动 θ 就得到了向量 $z_0e^{i\theta}$；若 $\theta<0$ 时，把 z_0 沿顺时针方向转动 $-\theta$ 才得到向量 $z_0e^{i\theta}$. 特别，因为

$$iz_0=e^{i\frac{\pi}{2}}z_0,\quad -iz_0=e^{-i\frac{\pi}{2}}z_0,$$

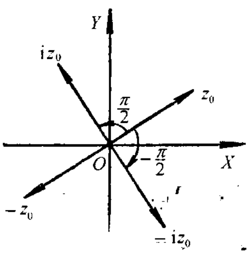

图 1.6

可知向量 iz_0 和 $-iz_0$ 是把 z_0 分别沿反时针方向和顺时针方向转一直角而得. 由 $-z_0=(-1)z_0=e^{i\pi}z_0$，可知 $-z_0$ 的方向正好和 z_0 的方向相反，这两个向量互为逆向量(图 1.6).

2）当 $\theta=0$ 时，$z=\rho>0$，即此时 z 为一正实数，因此

$$zz_0=\rho z_0=(\rho\rho_0)e^{i\theta_0}.$$

这表明，用正实数 ρ 去乘复数 z_0，不改变 z_0 的辐角，只使它的模乘上了 ρ 倍. 从几何上来看，用正实数 ρ "作用"(乘)到向量 z_0 上去，并不改变 z_0 的方向，只是使 z_0 的长短"拉长"(当 $\rho<1$ 时实际上是缩短)了 ρ 倍. 根据这点说明，特别地，由图 1.7 可见，z_1 与 z_2 连线的中点可以用复数$\frac{1}{2}(z_1+z_2)$来表示.

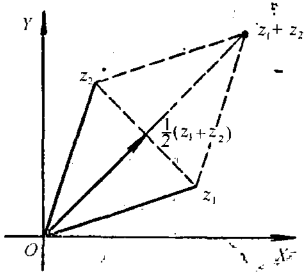

图 1.7

由于乘法的公式已经得到，于是对于

$$z_1=\rho_1 e^{i\theta_1},\quad z_2=\rho_2 e^{i\theta_2},$$

有

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}.$$

对于这个公式应当特别理解的是 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ 表示由向量$\overrightarrow{Oz_1}$转到$\overrightarrow{Oz_2}$所扫过的有向角度，即带有一定正负号的角度. 如果$\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)>0$，表示这转动的角度是沿反时针方向(图 1.8). 如果 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)<0$，表示是沿顺时针方向转动的角度