



全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数

Xianxing Daishu
Xuexi Zhidao

学习指导

连 坡 主编

 中国农业出版社



清华大学出版社 清华大学出版社

线性代数 学习指导

清华大学出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数学习指导

连 坡 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数学习指导/连坡主编. —北京: 中国农业出版社, 2007. 8

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-11869-0

I. 线… II. 连… III. 线性代数-高等学校-教学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 120422 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100026)

责任编辑 杨金妹 陈 璿

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月北京第 1 次印刷

开本: 720mm×960mm 1/16 印张: 10

字数: 171 千字

定价: 15.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是根据高等学校线性代数教学大纲及全国高等农林院校“十一五”规划教材《线性代数》的要求而编写的,本书突出了指导的作用,所选例题都是具有代表性和适用性的。全书共分六章,每章由内容提要,知识结构图,学习要求、重点、难点及考点,典型题解析,学习效果测试及答案等五部分组成。

本书可作为高等农林院校各专业的教材指导,另外也可作为其他非数学专业的指导用书,或科研人员的参考书。

编 写 人 员 名 单

主 编 连 坡

副主编 欧阳安 王 洁

参 编 刘建军 陈小蕾 赵保魁

前 言

线性代数是大学教学中一门主要的、基本的理论课程，不仅各高等学校非数学专业的本科视为主要修学课程，而且硕士研究生、MBA 研读生的入学考试等都将其作为主考课程之一，所以学好线性代数这门课程是十分重要的。

线性代数的基本内容众多，基本概念纷杂，初学者往往对此束手无策，而教科书又受课时及篇幅所限，不可能对所有问题都作出详尽的陈述，也不可能介绍很多的解题方法。因此，为了更好地指导学生学好这门课程，加深对所学内容的理解和掌握，帮助有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程内容，了解考研的最新信息和动态，我们根据教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试·数学考试大纲》中线性代数部分的要求而组织编写了这本《线性代数学习指导》。

本书精选了大量有代表性的例题，并对其进行了详细的解答，希望以此启发读者的解题思路并融会贯通所学的内容，从而作为课堂教学的一种补充、精炼、深化和提高，同时也为备考研究生入学考试打好基础。选题的范围包括高等学校数学教学大纲（本科非数学专业）和最新硕士研究生入学考试数学考试大纲。本书共分六章，每章由内容提要，知识结构图，学习要求、重点、难点及考点，典型题解析，学习效果测试及答案等五部分组成。书中例题的选择力求具有代表性与适用性，例题的解答力求具有指导性和启发性，有些较综合的例题由浅入深，由点到面的给出多种解法，有些题解后还对难点及解题方法做了点评。每章附有读者可用于自我测试的题目及参考答案，并在书后附有助于硕士研究生入学考试复习的冲刺闯关试卷及参考答案。

本书可作为高等学校非数学专业本科学生线性代数课程的辅导

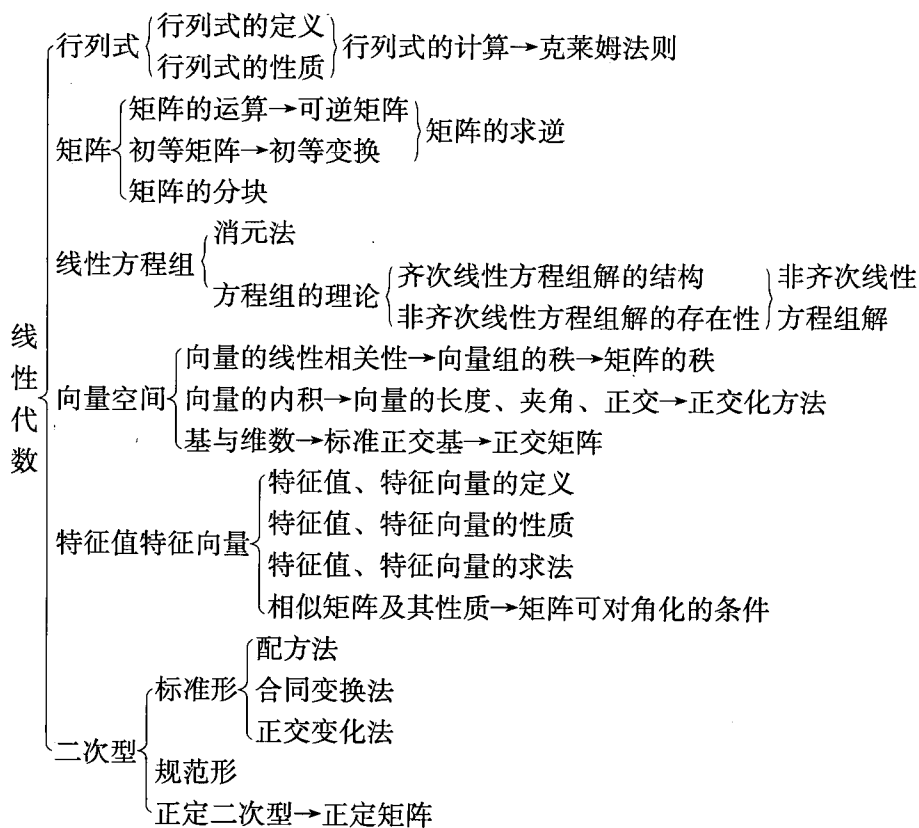
用书,也可以作为硕士研究生入学考试、自学考试的复习用书.本书的第一章由陈小蕾编写,第二章由连坡编写,第三章由王洁编写,第四章由欧阳安编写,第五章由赵保魁编写,第六章由刘建军编写,连坡编写了书后的冲刺闯关试卷及参考答案,并对全书进行了统稿和定稿.在本书的编写过程中,得到了西北农林科技大学数学系的支持和帮助,在此表示感谢.

由于水平有限,错误和不当之处在所难免,敬请读者不吝赐教.

编 者

2007年5月

线性代数知识脉络图



目 录

前言

线性代数知识脉络图

第一章 n 阶行列式	1
1.1 内容提要	1
1.1.1 n 阶行列式的定义	1
1.1.2 余子式与代数余子式	1
1.1.3 行列式的性质	1
1.1.4 行列式按行(列)展开法则	2
1.1.5 克莱姆(Cramer)法则	2
1.1.6 几种特殊的行列式	3
1.1.7 计算行列式的常用方法	4
1.2 知识结构图	4
1.3 学习要求、重点、难点及考点	4
1.3.1 学习要求	4
1.3.2 重点、难点指南	5
1.3.3 考点指南	5
1.4 典型题解析	5
1.5 学习效果测试及答案	22
第二章 矩阵	28
2.1 内容提要	28
2.1.1 矩阵的概念	28
2.1.2 矩阵的运算	28
2.1.3 逆矩阵	30
2.1.4 分块矩阵	31
2.2 知识结构图	31
2.3 学习要求、重点、难点及考点	32
2.3.1 学习要求	32

2.3.2 重点、难点指南	32
2.3.3 考点指南	32
2.4 典型题解析	32
2.5 学习效果测试及答案	44
第三章 向量组的线性相关性与矩阵的秩	49
3.1 内容提要	49
3.1.1 向量的概念及其线性运算	49
3.1.2 向量组的线性相关与线性无关	50
3.1.3 线性相关性的判别定理	50
3.1.4 向量组的秩与矩阵的秩	51
3.1.5 矩阵的初等变换	52
3.1.6 初等矩阵与求矩阵的逆	53
3.2 知识结构图	54
3.3 学习要求、重点、难点及考点	54
3.3.1 学习要求	54
3.3.2 重点、难点指南	55
3.3.3 考点指南	55
3.4 典型题解析	55
3.5 学习效果测试及答案	67
第四章 线性空间与内积	72
4.1 内容提要	72
4.1.1 线性空间基本概念	72
4.1.2 基、维数与坐标	73
4.1.3 基变换与坐标变换	74
4.1.4 线性变换	74
4.1.5 线性变换的矩阵表示	75
4.1.6 内积、正交化与标准正交基	76
4.1.7 正交矩阵和正交变换	77
4.2 知识结构图	78
4.3 学习要求、重点、难点及考点	78
4.3.1 学习要求	78
4.3.2 重点、难点指南	79
4.3.3 考点指南	79

4.4 典型题解析	79
4.5 学习效果测试及答案	84
第五章 线性方程组	88
5.1 内容提要	88
5.1.1 线性方程组及其表示	88
5.1.2 线性方程组的相容性	89
5.1.3 线性方程组的解的性质与结构	89
5.1.4 线性方程组的求解	90
5.2 知识结构图	92
5.3 学习要求、重点、难点及考点	92
5.3.1 学习要求	92
5.3.2 重点、难点指南	92
5.3.3 考点指南	93
5.4 典型题解析	93
5.5 学习效果测试及答案	106
第六章 矩阵的对角化与二次型	110
6.1 内容提要	110
6.1.1 方阵的特征值与特征向量	110
6.1.2 相似矩阵和实对称矩阵的对角化	111
6.1.3 二次型及其标准形	112
6.1.4 正定二次型与正定矩阵	114
6.2 知识结构图	115
6.3 学习要求、重点、难点及考点	115
6.3.1 学习要求	115
6.3.2 重点、难点指南	116
6.3.3 考点指南	116
6.4 典型题解析	116
6.5 学习效果测试及答案	128
冲刺闯关题及参考答案	131
冲刺闯关题 (1)	131
冲刺闯关题 (2)	134

冲刺闯关题 (3)	137
冲刺闯关题 (1) 参考答案	140
冲刺闯关题 (2) 参考答案	142
冲刺闯关题 (3) 参考答案	145

第一章 n 阶行列式

1.1 内容提要

1.1.1 n 阶行列式的定义

n 阶行列式是一个数, 它是由 n^2 个数 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 组成的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

所有取自不同行和不同列的 n 个数乘积共 $n!$ 项的代数和, 其定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为自然数 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, t 为这个排列的逆序数.

1.1.2 余子式与代数余子式

在 n 阶行列式中, 划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的所有元素, 其余元素按原来的顺序所构成的 $n-1$ 阶行列式 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式, 并称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

1.1.3 行列式的性质

1. 行列式与其转置行列式相等.
2. 互换行列式的两行(列), 行列式反号.
3. 行列式中某一行(列)有公因子时, 可将公因子提到行列式外面, 即用一个数乘以行列式等于用这个数乘以该行列式中的任意一行(列)的所有元素.
4. 若一个行列式中有两行(列)完全相同、或有一行(列)的元素为零、

或有两行(列)的对应元素成比例,则行列式等于零.

5. 若两个 n 阶行列式 D_1 、 D_2 , 除第 i 行(列)外, 其余对应的行(列)完全相同, 则 $D_1 + D_2$ 可表示成一个 n 阶行列式, 其第 i 行(列)为 D_1 和 D_2 的第 i 行(列)的对应元素之和, 而其余各行(列)则与 D_1 (或 D_2) 完全一样.

6. 把行列式的某一行(列)的元素乘以同一个数, 加到另一行(列)对应的元素上, 行列式的值不变.

1.1.4 行列式按行(列)展开法则

1. n 阶行列式等于它的任一行(列)的所有元素与它们对应代数余子式的乘积之和, 按第 i 行(第 j 列)展开 n 阶行列式为:

按第 i 行展开 $D = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n),$

按第 j 列展开 $D = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} \quad (j=1, 2, \cdots, n).$

2. n 阶行列式中的某一行(列)的每个元素与另一行(列)相应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

$$\begin{aligned} a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \cdots + a_{in} A_{jn} &= 0 \quad (i \neq j); \\ a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \cdots + a_{ni} A_{nj} &= 0 \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

1.1.5 克莱姆(Cramer)法则

设含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个线性代数方程的方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零时, 称为齐次线性方程组; 否则称为非齐次线性方程组.

1. 如果方程组系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j (j=1, 2, \dots, n)$ 为 D 中的第 j 列元素用线性方程组的常数项 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 替换而得到的行列式.

2. 如果齐次线性方程组系数行列式 $D \neq 0$, 那么它只有唯一零解; 如果齐次线性方程组有非零解, 那么它的系数行列式 $D=0$.

1.1.6 几种特殊的行列式

1. 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

3. 上、下三角行列式等于对角线上元素的乘积即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ * & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地, 对角行列式等于对角线上元素的乘积即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4. 范德蒙 (Vandermonde) 行列式

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

5. 对角线上元素均为 x , 其他元素均为 a 的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

1.1.7 计算行列式的常用方法

1. 给行列式的某一行(列)乘数加到另一行(列);或第 $n-1$ 行(列)乘数加到第 n 行(列),第 $n-2$ 行(列)乘数加到第 $n-1$ 行(列), $\dots$,第 1 行(列)乘数加到第 2 行(列).

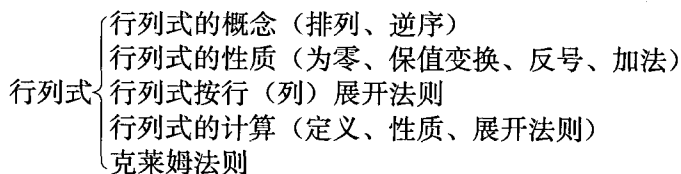
2. 利用行列式的性质把某行(列)化为含较多零的形式,运用行列式按行(列)展开法则对行列式进行降阶.

3. 运用行列式的性质把行列式化成特殊类型的行列式,如上、下三角行列式,爪型行列式,准对角型行列式等.

4. 拆行(列)法.即根据行列式的线性性质,把某行(列)拆分成若干个子行(列),则行列式被拆分成若干个行列式之和的形式.

5. 加边法.即把 n 阶行列式通过加行加列变成等值的 $n+1$ 阶行列式,加边的目的是为了化简行列式的行或列.

1.2 知识结构图



1.3 学习要求、重点、难点及考点

1.3.1 学习要求

1. 理解 n 阶行列式的定义.

2. 熟练掌握行列式的性质, 会利用行列式的性质化简及计算行列式.
3. 熟练运用行列式按行(列)展开法则计算行列式.
4. 会用克莱姆法则求解线性方程组.

1.3.2 重点、难点指南

重点: 运用行列式的性质与按行(列)展开法则计算行列式.

难点: n 阶行列式的定义的理解, 常见 n 阶行列式的计算.

1.3.3 考点指南

1. 行列式的性质.
2. 行列式的计算, 特别是三阶、四阶行列式及简单的 n 阶行列式计算.
3. 克莱姆法则.

1.4 典型题解析

例 1.1 求多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 3x \\ 0 & 2x & -1 & x \\ 0 & 1 & -x & 2 \\ x & 1 & 0 & 3x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数.

分析 利用行列式展开式中每一项都是来自不同行和不同列元素乘积的特点直接观察.

解 根据行列式的定义, $f(x)$ 中含 x^3 项只有一项, 即

$$(-1)^{\tau(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = 1 \cdot 2x \cdot (-x) \cdot 3x = -6x^3.$$

所以 x^3 项的系数为 -6 . 也可把 $f(x)$ 按第 1 列展开, 可得

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & -1 & x \\ 1 & -x & 2 \\ 1 & 0 & 3x \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & 2 & 3x \\ 2x & -1 & x \\ 1 & -x & 2 \end{vmatrix}$$

在第 1 个行列式中 x^3 项的系数为 -6 , 第 2 个行列式中不含有 x^2 项, 考虑到第 2 个行列式前的 x , 所以 x^3 项的系数为 -6 .

例 1.2 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$, 求方程

$f(x)=0$ 根的个数.