高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

微积分

南开大学数学科学学院　刘桂茹　孙永华　编

高等教育出版社

高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

微 积 分

南开大学数学科学学院

刘桂茹　孙永华　编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的经济管理类数学基础课程教学基本要求编写而成。内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理、不定积分、定积分、空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、级数、常微分方程和差分方程等。本书可作为普通高等学校经济类专业和管理类专业以及相关专业本科生教材，对于准备报考上述专业硕士研究生的同学也可作为数学课程入学考试的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分 /刘桂茹，孙永华编. —北京：高等教育出版社，2008.5

ISBN 978 - 7 - 04 - 023908 - 9

Ⅰ.微… Ⅱ.①刘…②孙… Ⅲ.微积分 - 高等学校 - 教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 041216 号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 丁鹤龄 **封面设计** 刘晓翔 **责任绘图** 吴文信
版式设计 王艳红 **责任校对** 姜国萍 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 - 810 - 0598
邮政编码	100120	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	国防工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	**版 次**	2008 年 5 月第 1 版
印 张	30	**印 次**	2008 年 5 月第 1 次印刷
字 数	560 000	**定 价**	34.10 元

物料号 23908 - 00

前　　言

本书是为一般高等学校经济管理类专业以及相关专业本科生编写的微积分教材。

随着我国市场经济的深入发展和不断完善，对经济管理类专业本科生的数学基础、数学素养和运用数学理论及数学方法分析解决实际问题能力的要求也越来越高。同时，在经济管理类专业的本科生中，有相当多的学生希望在完成本科阶段的学习后，能攻读硕士学位，继续深造。为此，我们在总结多年经济数学微积分课程教学经验的基础上，编写了本教材。

在编写过程中，我们注意把握以下几个基本点：第一，内容的深度与广度不低于经济管理类微积分课程的教学基本要求；第二，基本理论基本方法的阐述、例题与习题的选配既能保证学生打好基础，也能满足学生将来报考硕士研究生的需要；第三，加强综合运用能力和解决实际问题能力的培养。

本书的内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理、不定积分、定积分、空间解析几何、向量代数、多元函数微分学、二重积分、级数、常微分方程和差分方程等。

第一章至第六章由刘桂茹教授编写，第七章至第十二章由孙永华教授编写。

本书能够得以出版，首先要感谢高等教育出版社的支持与帮助，尤其是数学编辑对教材的定位、总体思路以及许多具体问题都给予了悉心指导和热情帮助。

本书的编写得到了南开大学教务处的立项支持，得到了南开大学数学科学学院的支持与帮助。数学科学学院高等数学教学部负责本书编写与出版的组织工作，高等数学教学办公室主任薛锋副研究员在协调、联络及后勤保障等工作中付出了辛勤劳动。对来自方方面面的关心、支持与帮助，我们在这里一并表示衷心的感谢。

由于我们的水平所限，加之时间仓促，本书的不足与缺点在所难免，请读者批评指正。

编　者

2007 年 12 月于南开园

目　　录

第1章　函　数

函数是变量与变量之间的某种依赖关系的数学描述，它是微积分学研究的主要对象.

§1.1　函数的概念

1.1.1　变量与常量

所谓变量，就是变动着的量.说得更确切一点，就是在某一过程中可以取不同数值的量.例如，一天的温度、某商品的销售量、人口的数量等等.变量的取值范围称为该变量的**变域**.

所谓常量，就是在所考察的过程中，始终取同一个数值的量.我们也常常将常量看成一种特殊的变量.

1.1.2　函数的定义

在现实中，无论是自然现象还是社会现象，经常会同时出现几个变量，这些变量的变化并不是彼此独立的，而是按照一定的规则相互关联着.例如，在平面直角坐标系 Oxy 中，方程

$$y = x^2$$

表示了抛物线上点(x,y)的两个坐标之间的依赖关系.给定 $x = x_0$，就确定了 y 的对应值 $y_0 = x_0^2$，如图 1.1 所示.

气象台用自动记录仪将一天的气温记录下来，画出了一条如图 1.2 的曲线.这条曲线表示了气温 T 与时间 t 的依赖关系.

设某产品的生产成本为 C，该产品的产量为 x.当产量为一确定的非负值时，成本也就有了一个确定的数值与之对应，所以，成本 C 与产量 x 之间存在一种依赖关系.

世界人口数随时间的变化而变化，人口与时间之间存在一种依赖关系.

以上几个实例来自不同的领域，变量所代表的实际意义互不相同，但所涉及的两个变量之间都存在着一种确定的依赖关系，函数就是变量间这种确定的依赖关系的一个数学描述.

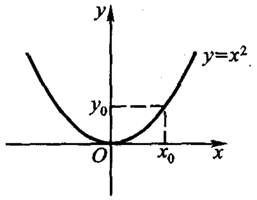

图 1.1

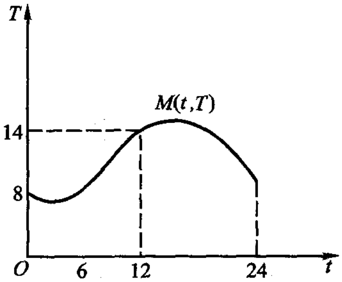

图 1.2

本章只讨论两个变量的情形，超过两个变量的情形将在第 8 章专门讨论.

定义 1.1.1 设 x,y 是两个变量，x 取值于非空实数集合 X. 如果对于每一个 $x \in X$，都可以按照某一给定规则 f，惟一地确定一个 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y = f(x),x \in X.$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，自变量 x 的变域 X 称为函数的**定义域**，因变量 y 的变域

$$Y = \{y \mid y = f(x),x \in X\}$$

称为函数的**值域**.

为了正确理解函数的定义，再作如下几点说明：

(1) 定义中的"f"表示变量 x 与 y 之间的确定的依赖关系，是抽象的函数符号，也可以采用别的记号来表示. 例如，$y = \varphi(x)$，$y = y(x)$ 等. 当同时考虑几个函数时，通常取不同的符号代表不同的函数，以免混淆.

(2) 当自变量 x 取某个值 x_0 时，对应的因变量的值称为**函数值**，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 例如，对函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$，有 $f(0) = 1$，$f(1) = \dfrac{1}{2}$，$f(2) = \dfrac{1}{5}$，$f(x+1) = \dfrac{1}{1+(x+1)^2}$ 等等.

(3) 在定义 1.1.1 中，对自变量 x 的一个确定的取值，y 只能有唯一的一个值与之对应，称这种函数为单值函数，本书中简称为函数. 若对自变量 x 的一个确定的取值有多个 y 值与之对应，称这种函数为多值函数. 多值函数不是定义 1.1.1 意义下的函数. 例如，由关系式 $y^2 = x$ 所确定的 y 关于 x 的函数，对于 $x = 1$，y 有 1 和 -1 两个值与之对应，这是一个多值函数. 遇到这种情况，可将其分解成两个单值函数

$$y = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty) \quad 和 \quad y = -\sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$$

然后使用定义 1.1.1,如图 1.3.

(4) 在函数定义中,有两个基本要素,一是自变量的变域(函数的定义域),另一是自变量与因变量的对应规则. 因此,对于两个给定的函数,只有当自变量有相同的变域,而且有相同的对应规则时,才能说这两个函数是相同的. 例如,函数

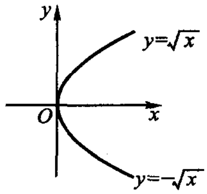

图 1.3

$$y = x^2, x \in (1,2) \quad 与$$
$$y = x^2, x \in (-2, -1),$$

虽然有相同的对应规则,但由于 x 的变域不同,所以它们是不相同的函数.

对于函数

$$y = 2x, x \in [0,1] \quad 与 \quad s = 2t, t \in [0,1]$$

既有相同的定义域,又有相同的对应规则(因变量等于自变量的 2 倍),所以,它们是相同的函数.

1.1.3 函数的定义域

在研究函数时,必须注意函数的定义域,因为只有当自变量在定义域内取值时,函数关系才有意义.

对于一个用数学式子(自变量与因变量的对应关系式)表示的函数,其定义域就是使这个式子有意义的自变量的取值范围.

例 1.1.1 确定函数

$$y = \frac{\sqrt{5 - x}}{1 - x^2} + \sqrt{x + 2}$$

的定义域.

解 要使这个数学式子有意义,必须满足

$$\begin{cases} 1 - x^2 \neq 0, \\ 5 - x \geqslant 0, \\ x + 2 \geqslant 0, \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \leqslant 5, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$$

得函数的定义域为

$$X = [-2, -1) \cup (-1,1) \cup (1,5].$$

如果所研究的函数是由实际问题提出来的,它的定义域不仅要使自变量与

因变量的对应关系式有意义，而且要考虑自变量的实际意义.

例如，将边长为 $a(a>0)$ 的正方形铁片，从四个角各剪去边长为 x 的小正方形，做成一个无盖铁盒，则其体积 V 是 x 的函数，即

$$V = x(a-2x)^2,$$

考虑自变量的实际意义，函数的定义域应为

$$X = \left(0,\frac{a}{2}\right),\text{而不是}(-\infty,+\infty),$$

1.1.4 函数的表示方法

函数关系可用不同的方法来表示，常用的表示法有列表法、图像法和解析法（公式法），其中解析法是微积分学表示函数的主要方法.

1. 列表法 所谓列表法就是将自变量的一组常数值与其对应的一组函数值列成一个数表，其优点是便于查找函数值. 例如，三角函数表，对数表等常用的数学用表，银行中的外汇兑换表等.

2. 图像法 所谓图像法就是用坐标平面上的点或曲线来表示纵坐标 y 是横坐标 x 的函数. 如图 1.4 所示.

例 1.1.2 函数 $y=\dfrac{|x|+x}{2}$ 的图像如图 1.5 所示，这个函数也可以表示为

$$y=\begin{cases}x, x\geqslant 0;\\0, x<0.\end{cases}$$

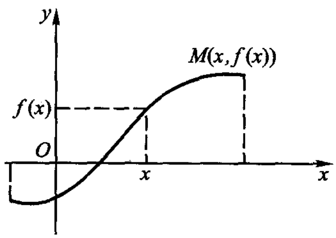

图 1.4

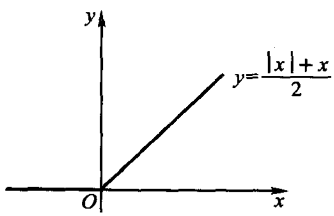

图 1.5

用图像表示函数，其优点是直观，便于观察函数的整个变化趋势. 几何直观常常可以帮助我们理解微积分中的许多概念、结论和方法.

3. 解析法 所谓解析法就是将自变量与因变量之间的关系用含自变量和因变量的方程表出. 这些方程通常称为函数的**解析表达式**. 例如，

(a) $y=\sqrt{1-x^2}$;

(b) $y=\sin x-\lg(1+x)$;

(c) $y+\sin y=x+\lg x$;

(d) $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$

都可看作是用解析表达式表示的 y 关于 x 的函数. 根据函数表达式的不同形式又可分为显函数和隐函数.

显函数: 在(a)、(b)、(d)中,因变量 y 已由自变量 x 的解析式直接表示出来,称这种形式的函数为**显函数**.

隐函数: 在(c)中,因变量 y 未由自变量 x 的解析式直接表示出来,所以不是显函数,称这种形式的函数为**隐函数**. 一般地,若一个函数的因变量 y 与自变量 x 的对应关系由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 确定,并且 y 未被解成 x 的显函数的形式,则称这个函数为隐函数.

这里我们还要特别指出的是,有些显函数在其定义域的不同部分具有不同的表达式,如(d),我们称这种用多个表达式表示的函数为**分段函数**. 注意,分段函数是用几个表达式表示一个函数而不是几个函数,其定义域是各表达式对应的自变量取值范围的并集.

例 1.1.3 函数 $y=[x]$,这里 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数,称为 x 的整数部分,即若 $x=m+r$,其中 m 为整数, $0\leqslant r<1$,则 $[x]=m$. 其图像见图 1.6.

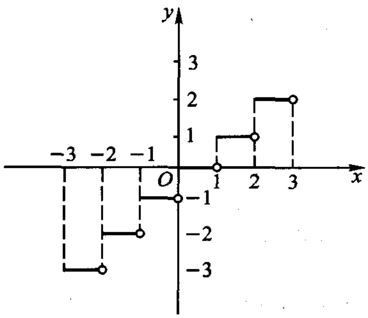

图 1.6

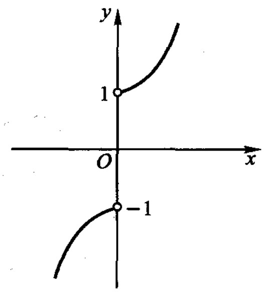

图 1.7

例 1.1.4 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

是一个分段函数,其定义域为 $X=(-\infty,+\infty)$,这个函数称为**符号函数**.

例 1.1.5 函数

$$y=\begin{cases}-1-x^2, & x<0,\\ 1+x^2, & x>0\end{cases}$$

是一个分段函数,其定义域为 $X=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,如图 1.7.

建立函数关系往往是用数学方法解决实际问题的第一步.要把实际问题中变量之间的函数关系正确地抽象出来,首先应分析哪些是常量,哪些是变量;然后确定选取哪一个变量为自变量,哪一个变量为因变量;最后根据所给条件确立它们之间的函数关系,同时给出函数的定义域.

例 1.1.6 把一半径为 R 的圆形铁片,自中心处剪去圆心角为 α 的扇形后,围成一无底圆锥,试将圆锥的体积 V 表为 α 的函数.

解 设圆锥底半径为 r,高为 h(如图 1.8),则

$$r=\frac{2\pi R-\alpha R}{2\pi}=R-\frac{\alpha R}{2\pi},$$

$$h=\sqrt{R^2-\left(R-\frac{\alpha R}{2\pi}\right)^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2},$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{\pi}{3}\left(\frac{2\pi R-\alpha R}{2\pi}\right)^2\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2},$$

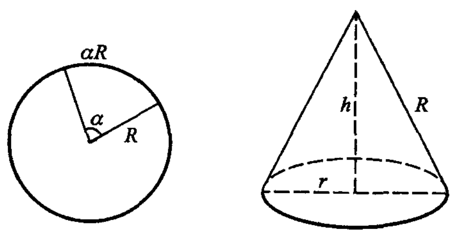

图 1.8

即

$$V=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2},\alpha\in(0,2\pi).$$

例 1.1.7 某运输公司规定货物的吨公里运价为:在 a 公里以内,每公里 k 元;超过 a 公里部分每公里 $\frac{4}{5}k$ 元.求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

解 根据题意可列函数关系如下: