

ANSYS

张洪信 赵清海 等编著


ANSYS

有限元分析完全自学手册



工欲善其事 必先利其器

从零开始 轻松入门 图解案例 清晰直观
实例引导 专业经典 学以致用 注重实践

 机械工业出版社
China Machine Press

30个实例视频讲解让您轻松掌握
多媒体版

0241.82/53D

2008

张洪信 赵清海 等编著

ANSYS

有限元分析完全自学手册



机械工业出版社
China Machine Press

本书从有限元法的基础理论入手,以实例分析的形式介绍了ANSYS 11.0的应用。全书共分8章,全面阐述了有限元法的基础知识及应用,涉及结构静力学、结构动力学、结构非线性、温度场分析、流体力学分析、电磁场分析等问题。用大量实例介绍ANSYS的一些高级分析技术,如拓扑优化、ANSYS/LS-DYNA显式动力分析、参数化设计、子模型分析等内容。为了兼顾缺乏弹性力学知识的读者,附录中对有限单元法涉及的弹性力学基本知识作了简要介绍。

本书强调基础与软件相结合、理论与实践相结合,面向初中级读者,致力于提高读者应用有限元法和ANSYS解决工程实际问题的能力。适合作为高等院校工程专业的本科生及研究生教材,也可以作为工程设计人员的参考书籍。

版权所有,侵权必究。

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

图书在版编目(CIP)数据

ANSYS有限元分析 / 张洪信, 赵清海等编著. —北京: 机械工业出版社, 2008.3

ISBN 978-7-111-23190-5

I. A… II. ①张… ②赵… III. 有限元分析—应用程序, ANAYS IV. 0241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第206007号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037)

责任编辑: 李华君

北京牛山世兴印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行

2008年3月第1版第1次印刷

190mm × 260mm · 31.5印张

标准书号: ISBN 978-7-111-23190-5

ISBN 978-7-89482-518-6 (光盘)

定价: 58.00元(附光盘)

凡购本书,如有倒页、脱页、缺页,由本社发行部调换

本社购书热线:(010) 68326294

前 言

基本内容

有限元法是当前工程技术领域最常用、最有效的数值方法，已成为现代工程设计技术不可或缺的重要组成部分。ANSYS软件是融结构流体、电场、磁场、声场、热传导等领域静力学、动力学及边界耦合问题分析于一体的大型通用有限元分析软件，由世界上最大的有限元分析软件公司之一的美国ANSYS公司开发，它能与多数CAD软件（如Pro/ENGINEER、NASTRAN、I-DEAS、AutoCAD）及机械仿真软件（如ADAMS）接口，实现数据的共享和交换，是现在产品设计中的高级CAE工具之一。

本书从有限元法的基础理论入手，以实例分析的形式介绍了ANSYS 11.0的应用。全书共分8章，依次介绍结构静力学问题、结构动力学问题、结构非线性问题、温度场、流体力学和电磁场问题分析的有限元法及ANSYS操作步骤。第1章对有限元法及ANSYS分析进行全面概述，以便把握总体要点。第2章介绍了有限元法的基础知识及应用，涉及结构静力学、结构动力学、结构非线性、温度场分析、流体力学分析、电磁场分析等问题的有限元法理论。第3章~第7章主要讲述ANSYS操作，第3章介绍ANSYS建模，对连接板、轴类零件、圆柱齿轮等建模过程进行实例演示；第4章介绍结构线性静力分析过程，包括连杆受力分析、圆孔应力集中分析、内六角扳手静力分析、轮子的受力分析等实例操作；第5章介绍动力学分析过程，包括机翼模态分析、电动机系统谐响应分析、梁结构瞬态动力学分析等实例操作；第6章介绍非线性分析过程，包括铜弹冲击刚性壁分析、圆盘塑性变形分析、销与销孔接触分析等实例操作；第7章介绍热分析、流体动力学分析、电磁场分析、结构优化设计等过程与实例操作。第8章介绍ANSYS一些高级分析技术，如拓扑优化分析、ANSYS/LS-DYNA显式动力分析、参数化设计、子模型分析等过程与实例操作。书后附录还提供了弹性力学的基本方程、各领域常用量及其单位换算关系、ANSYS常用命令参考。

主要特点

本书坚持理论与实践相结合的原则，将有限元理论与ANSYS软件糅合在一起，以期有助于促进有限元理论与ANSYS的学习、应用与普及推广。

具体地讲，本书具有以下鲜明的特点：

- 从零开始，轻松直观；
- 图文并茂，操作简单；
- 实例引导，专业经典；
- 学以致用，注重实践。

读者对象

- 学习有限元分析的初中级读者；
- 大中专院校相关专业的学生；
- 从事机械、建筑及加工的工程技术人员。

本书是为土木、水利、机械等工科专业本科生、研究生和工程技术人员学习有限元法和ANSYS操作而编写的教材，也可以作为读者自学的教程，同时也非常适合作为专业人员的参考手册。

配套光盘简介

为了方便读者学习，本书配套提供了多媒体教学光盘，其中包含了本书主要实例源文件，这些文件都被保存在与章节相对应的文件夹中。同时，主要实例的设计过程都被集成视频录像，相信会为读者的学习带来便利。

注意 由于光盘上的文件都是“只读”的，因此直接修改这此文件是不行的。读者可以先将这些文件复制到硬盘上，去掉文件的“只读”属性，然后再使用。

本书主要由张洪信、赵清海编著，参加编写工作的还有管殿柱、宋一兵、温建民、赵秋玲、张宪海、赵景伟、周同、张轩、赵景波、李伟刚、张忠林、安宏涛、王玉甲、曹立文等。

感谢您选择了本书，希望我们的努力对您的工作和学习有所帮助，也希望您把对本书的意见和建议告诉我们。

零点工作室技术支持网站：www.zerobook.net

零点工作室技术支持信箱：gdz_zero@126.com

零点工作室技术支持网站：www.zerobook.net，零点工作室技术支持信箱：gdz_zero@126.com。本书于2008年3月出版，由清华大学出版社出版。本书主要介绍ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用。本书主要介绍ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用。

主要特点

本书主要介绍ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用。本书主要介绍ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用。

本书主要介绍ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用，包括ANSYS 8.0的一些高级应用。

- 图文并茂，图文并茂。
- 图文并茂，图文并茂。
- 图文并茂，图文并茂。
- 图文并茂，图文并茂。

目 录

前言

第1章 有限元法及ANSYS概述	1
1.1 发展与现状	2
1.2 矩阵分析法及有限元法分析的一般步骤	3
1.2.1 矩阵分析法	3
【实例1-1】桁架结构的平衡方程	9
1.2.2 有限元法分析的一般步骤	11
1.3 ANSYS基本操作	12
1.3.1 ANSYS安装	12
1.3.2 ANSYS启动、用户界面及退出	13
1.3.3 ANSYS操作方式	15
1.3.4 ANSYS典型分析过程	16
【实例1-2】悬臂梁的受力分析	16
1.3.5 ANSYS文件管理及日志文件使用	20
1.4 本章小结	21
1.5 习题	22
第2章 有限元法基础理论	23
2.1 结构静力学问题的有限元法	24
2.1.1 平面问题有限元法	24
【实例2-1】求单元在以下受力情况下的等效节点荷载	30
【实例2-2】求悬臂梁节点位移	32
2.1.2 轴对称问题有限元法	33
2.1.3 空间问题有限元法	36
2.1.4 等参数有限元法	39
2.1.5 单元与整体分析	43
2.2 结构动力学问题有限元法	46
2.2.1 运动方程	46
2.2.2 质量矩阵	47
2.2.3 阻尼矩阵	48
2.2.4 结构自振频率与振型	50
【实例2-3】求解 $K\varphi = \omega^2 M\varphi$ 的振型	52
2.2.5 用振型叠加法求解结构的受迫振动	53
2.3 结构非线性有限元法	54

2.3.1	塑性力学问题	55
2.3.2	大位移问题	64
2.4	热传导问题有限元法	65
2.4.1	关于温度场和热传导的一些概念	65
2.4.2	热传导微分方程	67
2.4.3	温度场的边值条件	68
2.4.4	稳态热传导问题	69
2.4.5	瞬态热传导问题	73
2.4.6	热变形与热应力计算	75
2.5	流体力学分析有限元法	75
2.5.1	稳定渗流基本方程及其离散化	76
2.5.2	用势函数表示的势流	80
2.6	电磁场分析有限元法	83
2.6.1	麦克斯韦方程组	83
2.6.2	位函数的微分方程	84
2.6.3	位函数的边界条件	85
2.6.4	位函数的边值问题	85
2.7	本章小结	89
2.8	习题	90
第3章	ANSYS建模	92
3.1	建模基础	93
3.1.1	生成模型	93
3.1.2	坐标系统	93
3.1.3	工作平面	96
3.1.4	实体模型	97
3.1.5	有限元模型	98
3.2	建立复杂有限元模型	101
3.3	实例——连接板建模	102
3.4	实例——轴类零件建模	108
3.4.1	自底向上建模	109
3.4.2	自顶向下建模	115
3.5	实例——圆柱齿轮建模	116
3.6	本章小结	126
3.7	习题	126
第4章	结构线性静力分析	127
4.1	结构静力分析过程与步骤	128
4.1.1	建立模型	128
4.1.2	施加载荷并求解	128

4.1.3 检查结果	130
4.2 实例——连杆受力分析	132
4.3 实例——圆孔应力集中分析	147
4.4 实例——内六角扳手静力分析	155
4.5 实例——轮子受力分析	170
4.6 本章小结	187
4.7 习题	187
第5章 动力学分析	189
5.1 动力学分析的过程与步骤	190
5.1.1 模态分析的步骤	190
5.1.2 谐响应分析	194
5.1.3 瞬态动力学分析	198
5.2 实例——机翼模态分析	202
5.3 实例——电动机系统谐响应分析	212
5.4 实例——梁结构瞬态动力学分析	227
5.5 本章小结	238
5.6 习题	239
第6章 非线性分析	241
6.1 基本概念	242
6.2 非线性分析的过程与步骤	245
6.2.1 建模	246
6.2.2 加载求解	246
6.2.3 查看结果	249
6.3 实例——铜弹冲击刚性壁的非线性分析	251
6.4 实例——圆盘塑性变形分析	264
6.5 实例——销与销孔接触分析	278
6.6 本章小结	293
6.7 习题	293
第7章 其他问题分析	295
7.1 热分析	296
7.1.1 热分析单元	296
7.1.2 稳态热分析过程	297
7.1.3 瞬态热分析过程	300
7.1.4 耦合分析的过程和步骤	303
7.1.5 实例——冷却栅管的热分析	306
7.1.6 实例——包含焊缝的金属板热膨胀分析	317
7.2 流体动力学分析	334
7.2.1 FLOTRAN CFD分析的概念与基本步骤	334

7.2.2 实例——管内流动分析	339
7.3 电磁场分析	358
7.3.1 电磁场分析的基本步骤与概念	358
7.3.2 实例——2D静态电磁场分析	361
7.4 结构优化设计	377
7.4.1 优化设计的相关概念	377
7.4.2 优化设计的过程与步骤	379
7.4.3 实例——简支梁优化设计	386
7.4.4 实例——桁架轻型化优化设计	395
7.5 本章小结	405
7.6 习题	406
第8章 高级分析方法	409
8.1 拓扑优化分析	410
8.1.1 拓扑优化步骤	410
8.1.2 实例——拱桥桥梁结构拓扑优化	411
8.2 ANSYS/LS-DYNA显式动力分析	422
8.2.1 ANSYS/LS-DYNA分析综述	422
8.2.2 ANSYS/LS-DYNA分析基本步骤	425
8.2.3 实例——容器坠落碰撞	427
8.3 参数化设计	435
8.3.1 参数化设计语言介绍	435
8.3.2 参数化设计语言的功能	435
8.3.3 实例——梁结构参数化设计	437
8.4 子模型分析技术	442
8.4.1 子模型分析技术综述	442
8.4.2 子模型分析基本过程	443
8.4.3 实例——带孔长方形板条子模型分析	447
8.5 自适应网格划分技术	458
8.5.1 自适应网格划分技术综述	458
8.5.2 实例——热传导问题自适应网格划分	461
8.6 单元的生死技术	464
8.6.1 单元的生死技术综述	465
8.6.2 实例——杆件单元生死	467
8.7 本章小结	472
8.8 习题	473
附录A 弹性力学的基本方程	474
附录B ANSYS程序中常用量和单位	478
附录C ANSYS结构分析常用命令参考	480

第1章 有限元法及ANSYS概述

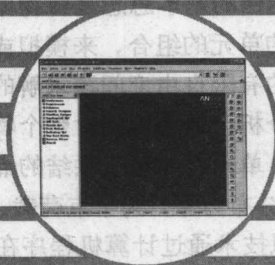
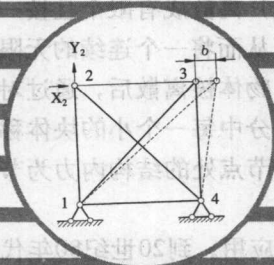
CAE即计算机辅助工程，指工程设计中的分析计算与仿真。CAE软件可分为专用和通用两类。前者主要是针对特定类型的工程或产品，用于产品性能分析、预测和优化的软件，以在某个领域中的应用深入而见长，如美国ETA公司的汽车专用CAE软件LS/DYNA3D及ETA/FEMB等。通用软件可对多种类型的工程和产品的物理力学性能进行分析、模拟、预测、评价和优化，以实现产品技术创新，它以覆盖的应用范围广而著称，如ANSYS、PATRAN、NASTRAN和MARC等。

重点知识

- 有限元法与ANSYS软件的起源与发展
- 用矩阵分析法分析杆件结构的过程与步骤
- ANSYS界面组成及分析问题的步骤

练习案例

- 桁架结构的平衡方程
- 悬臂梁的受力分析



1.1 发展与现状

目前在工程技术领域内常用的数值模拟方法有有限元法(Finite Element Method, FEM)、边界元法(Boundary Element Method, BEM)和有限差分法(Finite Difference Method, FDM)等,但就其实用性和应用的广泛性而言,主要还是有限单元法。作为一种离散化的数值解法,有限单元法首先在结构分析,然后又在其他领域中得到广泛应用。

离散化的思想可以追溯到20世纪40年代。1941年, A. Hrennikoff首次提出用离散元素法求解弹性力学问题,当时仅限于用杆系结构来构造离散模型,但能很好地说明有限元思想。如果原结构是杆系,这种方法的解是精确的,发展到现在就是大家熟知的矩阵分析法。究其实质这还不能说就是有限单元法思想,但结合以后的有限元理论,统称为广义有限单元法。1943年, R. Courant在求解扭转问题时为了表征翘曲函数而将截面分成若干三角形区域,在各三角形区域设定一个线性的翘曲函数,这实质上就是有限单元法的基本思想(对里兹法的推广),这一思想真正用于工程中是在电子计算机出现后。

20世纪50年代因航空工业的需要,美国波音公司的专家首次采用三节点三角形单元,将矩阵位移法用到平面问题上。同时,联邦德国斯图加特大学的J. H. Argyris教授发表了一组能量原理与矩阵分析的论文,为这一方法的理论基础作出了杰出贡献。1960年美国的R. W. Clough教授在一篇题为“平面应力分析的有限单元法”的论文中首先使用“有限单元法(the Finite Element Method)”一词,此后这一名称得到广泛承认。

20世纪60年代有限单元法发展迅速,除力学界外,许多数学家也参与了这一工作,奠定了有限单元法的理论基础,搞清了有限单元法与变分法之间的关系,发展了各种各样的单元模式,扩大了有限单元法的应用范围。

20世纪70年代以来,有限单元法进一步得到蓬勃发展,其应用范围扩展到所有工程领域,成为连续介质问题数值解法中最活跃的分支。由变分法有限元扩展到加权参数法与能量平衡法有限元,由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题,由静力平衡问题扩展到稳定性问题、动力问题和波动问题,由线性问题扩展到非线性问题,分析的对象从弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等,由结构分析扩展到结构优化乃至设计自动化,从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学等领域。它使许多复杂的工程分析问题迎刃而解。

有限单元法的基本思想是将物体(即连续的求解域)离散成有限个且按一定方式相互联结在一起的单元的组合,来模拟或逼近原来的物体,从而将一个连续的无限自由度问题简化为离散的有限自由度问题求解的一种数值分析法。物体被离散后,通过对其中各个单元进行单元分析,最终得到对整个物体的分析。网格划分中每一个小的块体称为单元。确定单元形状、单元之间相互联结的点称为节点。单元上节点处的结构内力为节点力,外力(有集中力、分布力等)为节点荷载。

数值模拟技术通过计算机程序在工程中得到广泛的应用。到20世纪80年代初期,国际上较大型的面向工程的有限元通用程序达到几百种,其中著名的有ANSYS、NASTRAN、ABAQUS、ASKA、ADINA、SAP与COSMOS等,它们功能越来越完善,不仅包含多种条件下的有限元分析程序,而且带有功能强大的前处理和后处理程序。由于有限元通用程序使用方便、计算精度高,计算结果已成为各类工业产品设计和性能分析的可靠依据。大型

通用有限元分析软件不断吸取计算方法和计算机技术的最新进展,将有限元分析、计算机图形学和优化技术相结合,已成为解决现代工程学问题必不可少的有力工具。

ANSYS软件是融结构、流体、电磁场、声场和耦合场分析于一体的大型通用有限元分析软件。由世界上最大的有限元分析软件公司之一的美国ANSYS公司开发,它能与多数CAD软件接口,实现数据的共享和交换,如Pro/E ENGINEER(以下简称为Pro/E)、UG、IDEAS、CADDS、CATIA及AutoCAD等,是现代产品设计中的高级CAD/CAE工具之一。

ANSYS公司成立于1970年,总部位于美国宾西法尼亚州的匹兹堡,致力于CAE技术的研究和发展。ANSYS软件的创始人是美国匹斯堡大学力学系教授、著名有限元权威John Swanson博士。如今,ANSYS软件已经成功地应用于世界工业的各个领域,如结构、热、流体、电池、交通、土木工程、电子、造船等一般工业及科学研究。ANSYS程序是一个功能强大、应用灵活的设计分析及优化软件包,可以浮动运行于从PC机、工作站到巨型计算机的各种计算机及操作系统。

目前ANSYS公司发布了最新的ANSYS 11.0版本,在CAE功能上引领现代产品研发科技,涉及的内容包括高级分析、网格划分、优化、多物理场和多体动力学。立足于拥有世界上最多的用户,ANSYS 11.0不仅为当前的商业应用提供了新技术,而且在以下方面取得了显著进步:

- 继续开发和提供世界一流的求解器技术;
- 提供了针对复杂仿真的多物理场耦合解决方法;
- 整合了ANSYS的网格技术并产生统一的网格环境;
- 通过对先进的软硬件平台的支持来实现对大规模问题的高效求解;
- 继续改进最好的CAE集成环境——ANSYS WORKBENCH;
- 继续融合先进的计算流体动力学技术;
- 功能更为强大的显式动力学分析模块ANSYS/LS-DYNA。

目前市场上没有任何其他软件可以提供如此强大的稳健性和高度的精确性分析。另外,该版本可以在多个机群进行并行处理解决超大模型。本书的论述即针对ANSYS 11.0版本。

1.2 矩阵分析法及有限元法分析的一般步骤

矩阵分析法适用于由连杆或梁等单元组成的杆件结构,是一种具有朴素的有限元思想的非连续介质的力学分析方法,下面以此为例说明有限元分析的一般步骤。

1.2.1 矩阵分析法

杆系结构的矩阵分析方法从广义上说,也可以包括在有限单元法中,并且可以比较形象地说明有限单元法的概念,在实际工程中也有很大的应用价值。

1. 水平杆单元刚度矩阵

如图1-1所示桁架,杆的两端都可以产生位移。为了循序渐进,先研究水平直杆 ij ,如图1-2所示。

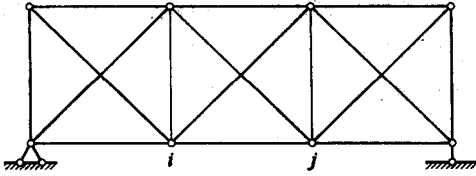


图1-1 桁架

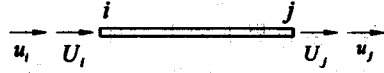


图1-2 水平杆单元

杆单元两端各有一个水平节点位移 u_i 和 u_j ，即具有两个自由度。两端节点力分别为 U_i 和 U_j 。

杆的受力情况可分解为两种状态。

状态一： $u_i = u_i$ ， $u_j = 0$ 。这时，节点 j 被固定。

$$\text{单元应变: } \varepsilon = -\frac{u_i}{l}$$

$$\text{单元应力: } \sigma = E\varepsilon = -\frac{Eu_i}{l}$$

材料力学中以拉应力为正，而有限元法中，以向右的节点力为正，所以下式中加一负号。

$$\text{单元左端节点力: } U_i = -A\sigma = \frac{AE}{l}u_i$$

$$\text{单元右端节点力: } U_j = A\sigma = -\frac{AE}{l}u_i$$

状态二： $u_i = 0$ ， $u_j = u_j$ 。这种状态与状态一正好相反。

$$\text{单元应变: } \varepsilon = \frac{u_j}{l}$$

$$\text{单元应力: } \sigma = \frac{Eu_j}{l}$$

$$\text{单元左端节点力: } U_i = -A\sigma = -\frac{AE}{l}u_j$$

$$\text{单元右端节点力: } U_j = A\sigma = \frac{AE}{l}u_j$$

把以上两种状态的结果叠加起来，得到左、右两端都可变位情况下单元节点力为

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{AE}{l}u_i - \frac{AE}{l}u_j \\ U_j &= -\frac{AE}{l}u_i + \frac{AE}{l}u_j \end{aligned}$$

写成矩阵形式得到

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = K^e \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (1-2-1)$$

其中

$$K^e = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-2-2)$$

式(1-2-2)称为单元刚度矩阵。刚度矩阵在有限元法中是一个比较重要的概念,能体现出任何一个自由度方向的节点力与所有节点位移之间的关系。

单元轴力可写为

$$N = \frac{AE}{l} [-1 \ 1] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (1-2-3)$$

其中

$$S = \frac{AE}{l} [-1 \ 1] \quad (1-2-4)$$

在杆件结构中,通常以轴力作为广义应力,因此矩阵S称为单元应力矩阵。

实际上,在节点*i*和*j*,除了水平位移外,还可产生垂直位移(但在小变形条件下,垂直节点位移对铰接杆的内力无影响)。引入垂直节点位移 v_i 、 v_j 和垂直节点力 V_i 、 V_j ,把单元刚度矩阵扩展为四阶形式,单元节点力为

$$\begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (1-2-5)$$

或

$$F^e = K^e \delta \quad (1-2-6)$$

其中 $F^e = [U_i \ V_i \ U_j \ V_j]^T$ 为节点力, $\delta = [u_i \ v_i \ u_j \ v_j]^T$ 为节点位移。

单元刚度矩阵

$$K^e = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-2-7)$$

单元轴力

$$N = \frac{AE}{l} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} = S \delta \quad (1-2-8)$$

2. 倾斜杆单元刚度矩阵

如图1-3所示,局部坐标 \bar{x} 、 \bar{y} 与整体坐标 x 、 y 之间的位移 $\bar{\delta}$ 与 δ 之间存在如下变换关系

$$\bar{\delta} = \lambda \delta \quad (1-2-9)$$

式中，转换矩阵

$$\lambda = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

为正交矩阵，其中 $\alpha = \cos\theta$ ， $\beta = \sin\theta$ 。

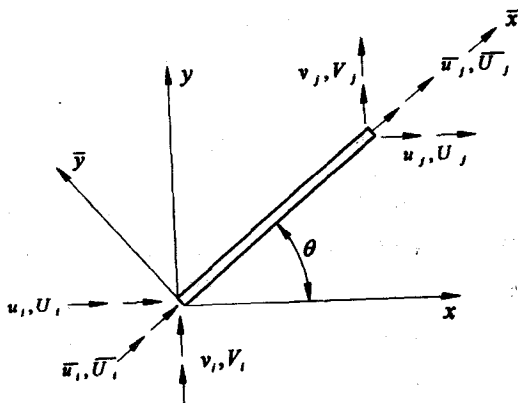


图1-3 局部坐标与整体坐标

此时局部坐标系中节点力 $\bar{F} = [\bar{U}_i, \bar{V}_i, \bar{U}_j, \bar{V}_j]^T$ 与整体坐标系中的节点力 $F = [U_i, V_i, U_j, V_j]^T$ 之间的关系为

$$\bar{F} = \lambda F \quad (1-2-10)$$

局部坐标系中的节点力

$$\bar{F} = \bar{K} \bar{\delta} \quad (1-2-11)$$

局部坐标系中的刚度矩阵 \bar{K} 见式 (1-2-7)。

将式 (1-2-9) 和 (1-2-10) 代入 (1-2-11) 得

$$\bar{F} = \lambda^{-1} \bar{K} \lambda \delta$$

或记为

$$F = K \delta \quad (1-2-12)$$

上式反映了单元节点位移与单元节点力的关系，称为单元刚度方程。其中， $K = \lambda^{-1} \bar{K} \lambda$ 为整体坐标系中的单元刚度矩阵，即

$$K = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & -\alpha^2 & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 & -\alpha\beta & -\beta^2 \\ -\alpha^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & -\beta^2 & \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} \quad (1-2-13)$$

并将式 (1-2-12) 记为

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} \quad (1-2-14)$$

其中, i 点节点力 $F_i = [U_i \ V_i]^T$, j 点节点力 $F_j = [U_j \ V_j]^T$, i 点节点位移 $\delta_i = [u_i \ v_i]^T$, j 点节点位移 $\delta_j = [u_j \ v_j]^T$, $K_{ii} = K_{jj} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix}$, $K_{ij} = K_{ji} = -K_{ii}$ 。刚度系数 K_{ij} 的意义是节点 j 的单位节点位移在节点 i 上产生的节点力, 其余类推。

3. 节点平衡方程与整体刚度矩阵

从一个桁架中取一节点 i , 如图1-4a所示, 设环绕该点有三个单元, 即 ij 、 im 、 ip 。该节点承受的水平荷载和垂直荷载分别为 X_i 和 Y_i , 即节点 i 的荷载 $P_i = [X_i \ Y_i]^T$ 。

根据力的平衡, 作用于杆单元的节点力与作用于节点的节点力, 其大小相等, 方向相反。以杆 ij 为例, 作用于杆单元的节点力是 $[U_{ij} \ V_{ij}]^T$, 而作用于节点 i 的节点力是 $[-U_{ij} \ -V_{ij}]^T$ 。将节点脱离出来, 受力分析如图1-4b所示, 在水平和垂直方向的节点受力平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} X_i - U_{ij} - U_{im} - U_{ip} &= 0 \\ Y_i - V_{ij} - V_{im} - V_{ip} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2-15)$$

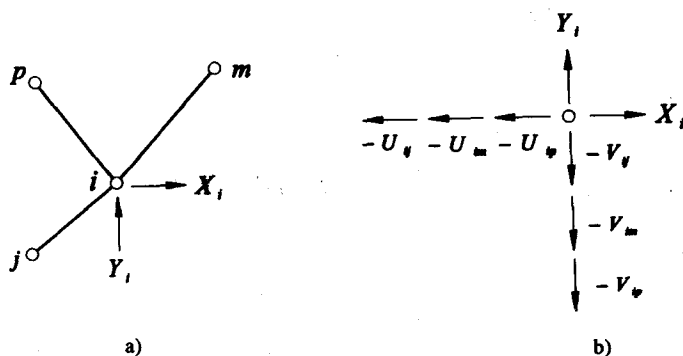


图1-4 节点 i 的平衡

由式 (1-2-14) 知道杆单元 ij 在节点 i 的节点力为

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} U_{ij} \\ V_{ij} \end{bmatrix} = K_{ii} \delta_i + K_{ij} \delta_j \quad (1-2-16)$$

其他单元施于节点 i 的节点力同样可以写出, 一起代入式 (1-2-15), 得到

$$\left(\sum_e K_{ii} \right) \delta_i + K_{ij} \delta_j + K_{im} \delta_m + K_{ip} \delta_p = P_i \quad (1-2-17)$$

每个节点都有一对平衡方程如上, 对于全部节点 $i = 1, 2, \dots, N$ 的结构, 得到 $2N$ 阶线性方程组, 即结构的节点平衡方程组

$$K \delta = P \quad (1-2-18)$$

其中

$$\delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N]^T$$

$$P = [P_1, P_2, \dots, P_N]^T$$

式中， δ 为全部节点位移组成的列阵； P 为全部节点荷载组成的列阵； K 为结构的整体刚度矩阵。

4. 总体刚度矩阵的合成

由单元刚度矩阵合成结构的整体刚度矩阵通常采用两种方法，一种为编码法，一种为大域变换矩阵法，前者对自由度较少的结构简单明了，后者特别适合计算机编程运算。下面重点阐述后者。

结构总体刚度矩阵 $[K]$ 与单元刚度矩阵 $[K]^e$ 之间的关系为

$$K = \sum_e (G^e)^T K^e G^e \quad (1-2-19)$$

其中 G^e 为单元大域变换矩阵，对平面桁架结构，单元自由度 $m = 4$ ，节点自由度为 $h = 2$ ，整个结构有 n 个节点，则该单元大域变换矩阵为 $m \times (hn)$ 维。其中 ij 单元假定为全局单元编号中第3个，其大域变换矩阵为

$$G^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 2i-1 & 2i & \dots & 2j-1 & 2j & \dots & 2n \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (1-2-20)$$

另外，总体结构的荷载向量、位移向量与单元荷载向量、位移向量之间的关系为

$$P = \sum_e (G^e)^T P^e \quad (1-2-21)$$

$$\delta = \sum_e (G^e)^T \delta^e \quad (1-2-22)$$

5. 边界条件的处理

边界条件指结构边界上所受到的外加约束。边界上的节点通常有两种情况，一种可以自由变形，如图1-5中的节点5、6、7、8等，这时只要让这些节点上的荷载等于零就可以了。如果节点3作用着外荷载，可令该点的荷载等于规定的荷载 Q 。另一种是边界上的节点，规定了节点位移的数值，如图1-5所示桁架，有

$$u_1 = v_1 = v_4 = 0, \quad v_2 = b$$

这时，是否可以把规定的位移数值直接放到平衡方程 $K\delta = P$ 中去呢？当采用迭代法求解时，是可以这样做的。当采用直接法求解时，就不能这样做了，因为直接法是以全部节点位移都

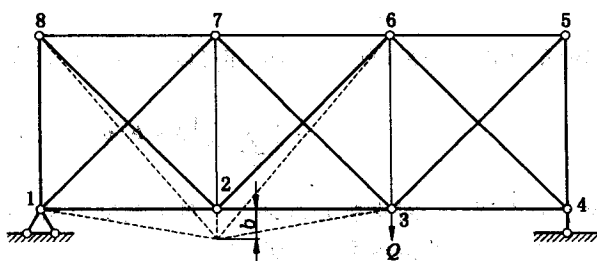


图1-5 桁架