高等学校辅导教材

高等数学辅导

同济·第五版 下册

北京大学数学科学学院 李正元 编著

- 讲解基本内容
- 诠释重难点
- 解惑易错易混淆点
- 归纳重要结论
- 提炼典型题型
- 总结解题方法与技巧

国家行政学院出版社

高等学校辅导教材

高等数学辅导

同济·第五版 下册

北京大学数学科学学院 李正元 编著

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学辅导/李正元编著. －北京：国家行政学院出版社，2004
ISBN 7-80140-321-5

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 李…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-自学参考资料
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 004471 号

高等数学辅导（下册）
李正元　编著
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路 6 号
邮政编码：100089
发行部电话：68920615，68929949
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷
*
787×960　1/16 开本　57.75 印张　1090 千字
2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7-80140-321-5/O・28　　定价：48.00 元（上、下册）

前　　言

高等数学课程对于大学生来说，其重要性是不言而喻的，近年来被许多部委和省市列为教学的重点评估课程之一。在全国硕士学位研究生考试中被指定为全国统考科目。然而，一方面近年来由于教学改革的实施，高等数学授课时间有所减少，受到时间限制，概念的深入探讨，知识点的融会贯通，知识面的拓展势必受到一定影响；另一方面后续课程以及研究生入学考试对高等数学的要求在教学大纲范围内有深化的趋势。如何解决这一新的矛盾，如何把大学期间高等数学的学习与研究生入学考试复习紧密衔接，为此作者根据在北京大学多年的教学实践以及硕士研究生入学考试高等数学辅导的经验，听取了广大学员的意见，参考了**北京大学**、**清华大学**、**复旦大学**、**同济大学**（第四、五版）、**华中科技大学**、**浙江大学**、**四川大学**、**西安交通大学**等高等院校的现行教材，认真编写了这本《高等数学辅导》。

本书每章设有**基本内容诠释与重要结论归纳**、**典型题型归纳及解题方法与技巧**、**练习题及答案与提示**。本书以讲清讲透**基本概念**为主线，希望能帮助同学把握并理解各章的基本概念和重要的定理与公式；并通过选编的**典型例题**，或是澄清基本概念与基本运算，或是指出同学解题中常犯的错误，或是介绍高等数学中常用解题思路与技巧，并且许多题目给出了多种解法，通过这些希望能开阔思路，活跃思维，举一反三，触类旁通，提高同学分析解决问题的能力。同学做各章设

置的练习题可达到巩固、理解、提高的目的。在做练习题时，一定要独立思考，动手做题，实在有困难再看提示和参考答案。

要写好一本教材实非易事，疏漏错误难免，欢迎全国同行批评指正！

李正元

于北大燕北园

目　录

第十一章　多元函数微分学

§1　多元函数的概念，极限与连续性

一、基本内容诠释与重要结论归纳

1. 平面上的点集与区域

为了讨论二元函数的需要，应了解以下几个概念.

(1) 平面上点 M_0 的 δ 邻域

$$U(M_0,\delta) = \{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2\}.$$

点 M_0 的空心邻域 $U_0(M_0,\delta) = U(M_0,\delta) \setminus \{M_0\}$，$\delta$ 为邻域的半径. 若不强调邻域的半径 δ，分别用 $U(M_0)$ 与 $U_0(M_0)$ 表示 M_0 的某个邻域与空心邻域.

(2) 平面点集 E 的内点，外点与边界点

E 为平面点集，M_0 为平面上一个点.

若 $\exists U(M_0,\delta) \subset E$，则称 M_0 为 E 的内点；若 $\exists U(M_0,\delta)$，$U(M_0,\delta) \cap E = \varnothing$，则称 M_0 为 E 的外点；若 M_0 的 $\forall$ 邻域中既有 E 中的点又有不是 E 中的点，则称 M_0 为 E 的边界点. 见图 11.1-1

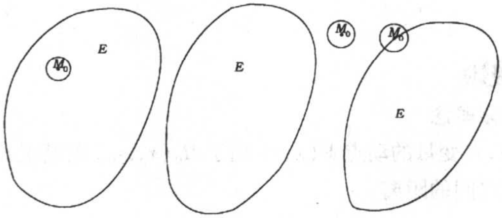

图 11.1 – 1

(3) 有界集　若 $\exists$ 原点的邻域 U，使得点集 $E \subset U$，则称 E 为有界集.

(4) 开区域与闭区域

平面点集 D 称为开区域，若 D 中的点都是 D 的内点，且 D 中 $\forall$ 两点均可用属于 D 中的折线连接. D 称为闭区域，若 D 由开区域连同它的全部边界组成.

开区域简称区域.

2. 多元函数的概念

(1) 多元函数的定义

设有三个变量 x,y,z，变量 x,y 的变化域为 D. 若对于 D 中每一点 $P(x,y)$，按照某一对应规 f，变量 z 都有唯一的一个值与之对应，则称变量 z 是变量 x,y 的二元函数，记作 $z = f(x,y)$ 或 $z = f(P)$. D 称为 $f(x,y)$ 的定义域.

这里 x,y 称为函数的自变量，z 称为因变量，数集 $\{z \mid z = f(x,y),(x,y) \in D\}$ 称为该函数的值域.

三个或三个以上自变量的函数可类似定义.

(2) 多元函数的几何表示

二元函数 $z = f(x,y)\ ((x,y) \in D)$ 在三维空间 $Oxyz$ 中的图形即点集

$$\{(x,y,z) \mid z = f(x,y),(x,y) \in D\}$$

通常为曲面.

曲面 $z = f(x,y)$ 与平面 $z = c$ 的交线在 Oxy 平面上的投影曲线

$$f(x,y) = c$$

称为 $z = f(x,y)$ 的等高线.

不能在三维空间中给出三元函数 $u = f(x,y,z)$ 的几何表示. 对于给定的实数 c,由 $f(x,y,z) = c$ 确定的曲面称为 $u = f(x,y,z)$ 的等值面.

(3) 一元函数与多元函数的联系与区别

□　以二元函数为例.

①　一元函数是二元函数的特殊情形:让一自变量变动,另一自变量固定,或让 (x,y) 沿某曲线变动,二元函数就转化为一元函数. 把多元函数问题转化为一元函数问题,这是研究多元函数的基本方法之一.

②　一元函数中,自变量 x 代表直线上的点,只有两个变动方向. 二元函数中,自变量 (x,y) 代表平面上的点,它有无数个变动方向.

③　一元函数 $z = f(x)\ (a < x < b)$,也可看成二元函数,其定义域是:$a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$.

3. 多元函数的极限

(1) 多元函数的极限概念

对于二元函数来说,自变量的动点 $M(x,y)$ 趋于 $M_0(x_0,y_0)$ 的情况比较复杂,M 可沿任意路径趋向 M_0,自然用它们之间的距离

$$\rho(M,M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \to 0$$

来刻划 M 趋于 M_0.

定义　设 $f(x,y)$ 定义于 D,$M_0 \in D$ 或是 D 的边界点,A 为常数. 若 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,当 $(x,y) \in D$ 且 $(x,y) \in U_0(M_0,\delta)$ 时(图 11.1 - 2),就有

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon,$$

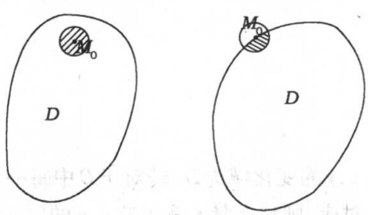

图 11.1 - 2

则称点 $M(x,y)$ 趋于 $M_0(x_0,y_0)$ 时函数 $f(x,y)$ 以 A 为极限,记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A,$$

或
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A,\ \lim_{M\to M_0} f(M)=A,$$
$$f(x,y)\to A\ \big((x,y)\to(x_0,y_0)\big).$$

(2) 求多元函数的极限

□ 与一元函数有相同的极限运算法则.

① 若 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A,\lim\limits_{M\to M_0} g(M)=B$,则
$$\lim_{M\to M_0}[f(M)\pm g(M)]=A\pm B;\quad \lim_{M\to M_0}[f(M)g(M)]=AB;$$
$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)}{g(M)}=\frac{A}{B}(B\neq 0);\quad \lim_{M\to M_0} f(M)^{g(M)}=A^B\quad (A>0).$$

② 若 $g(x,y)$ 在 $U_0(M_0,\delta)\cap D$ 有界,且 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=0$,则
$$\lim_{M\to M_0}(f(M)g(M))=0.$$

③ 设 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A,\lim\limits_{z\to A} F(z)=B$ 且当 $(x,y)\in U_0(M_0,\delta)$ 时,$f(x,y)\neq A$,则
$$\lim_{M\to M_0} F(f(M))\xlongequal{(z=f(M))}\lim_{z\to A} F(z)=B.$$

④ 若 $\exists U_0(M_0,\delta)$,当 $(x,y)\in U_0(M_0,\delta)\cap D$ 时,
$$u(x,y)\leqslant v(x,y)\leqslant w(x,y),$$
且
$$\lim_{M\to M_0} u=\lim_{M\to M_0} w=A,$$
$\Rightarrow$
$$\lim_{M\to M_0} v=A.$$

(3) 求多元函数极限常用的方法

1° 直接用极限运算法则.

2° 通过适当放大缩小法或变量替换法转化为求简单的极限或一元函数的极限.

(4) 多元函数极限的性质

□ 多元函数的极限有与一元函数相同的性质.

① 设 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)\exists$,则 $\exists M_0$ 的空心邻域 $U_0(M_0,\delta)$,$f(M)$ 在 $U_0(M_0,\delta)$ 有界.

② 设 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A>\lim\limits_{M\to M_0} g(M)=B\Rightarrow\exists\delta>0$,当 $M\in U_0(M_0,\delta)$ 时,
$$f(M)>g(M).$$

③ 设 $f(M)\geqslant g(M)(M\in U_0(M_0,\delta))$,且
$$\lim_{M\to M_0} f(M)=A,\qquad \lim_{M\to M_0} g(M)=B,$$
$\Rightarrow A\geqslant B$.

4. 多元函数的连续性

(1) 连续性概念

定义 设有二元函数 $f(M)$,定义域为 D,

1° 若 $M_0\in D$,且
$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0),$$
称 $f(M)$ 在 M_0 连续.若对 $\forall M_0\in D$,$f(M)$ 在 M_0 连续,称 $f(M)$ 在 D 连续.

2° 若 $M_0 \in D$ 或 M_0 是 D 的边界点且 M_0 不是 $f(M)$ 的连续点，则称 M_0 是 $f(M)$ 的间断点.

(2) 连续性的判断

1° 若一元函数 $f(x)$ 在 $x \in I$ 连续，则作为二元函数它在 $x \in I, -\infty < y < +\infty$ 连续.

2° 连续函数经过有限次四则运算（相除时分母不为零）或复合运算所得函数仍为连续函数.

3° 二元初等函数在其定义区域上连续.（分别以 x,y 为自变量的基本初等函数，经过有限次四则运算及复合运算而得的函数称为以 x,y 为自变量的二元初等函数.）

(3) 连续函数的性质

□ 局部性质：

设 $f(x,y)$ 定义在 D 上，$f(M)$ 在 $M_0 \in D$ 连续，$f(M_0) > 0, \Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $M \in U(M_0,\delta) \cap D$ 时，$f(M) > 0$.

□ 区域上的性质：

1° 设 D 是有界闭区域，$f(x,y)$ 在 D 连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上有界并达到最大值和最小值.

2° 设 D 是开区域或闭区域，$f(x,y)$ 在 D 连续，对 $\forall M_1, M_2 \in D$，若 $f(M_1) < f(M_2)$，则对 $\forall$ 实数 μ，$f(M_1) < \mu < f(M_2)$，$\exists M_0 \in D$，使得 $f(M_0) = \mu$.

3°* 设 D 是有界闭区域，若 $f(x,y)$ 在 D 连续，则 $f(x,y)$ 在 D 一致连续：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，对 $\forall M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2) \in D$，只要 $\rho(M_1,M_2) < \delta$，就有

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon.$$

二、典型题型归纳及解题方法与技巧

1. 关于多元函数的定义域

【例 11.1.1】 确定下列函数的定义域 D，并作 D 的图形（只对平面情形），指出它是否开区域或闭区域？是否有界区域.

(1) $z = \ln(-x-y)$； (2) $z = \arccos \dfrac{x}{x+y}$；

(3) $u = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}}$.

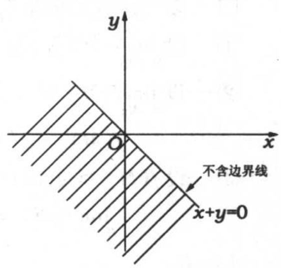

图 11.1 − 3

【解】 (1) 因为 $z = \ln t$ 的定义域是 $t > 0$，所以 $z = \ln(-x-y)$ 的定义域是 $-x-y > 0$，即 $D: x + y < 0$.

先画出边界线 $x + y = 0$，$(x+y)\Big|_{(-1,0)} = -1 < 0$，即 $(-1,0) \in D$，所以定义域为直线 $x + y = 0$ 的下方区域，不包括直线 $x + y = 0$，它是开区域且是无界区域. 见图 11.1 − 3.

(2) 由于一元函数 $z = \arccos t$ 的定义域是 $[-1,1]$，所以该函数的定义域是

$$D: x + y \neq 0,\ -1 \leqslant \frac{x}{x+y} \leqslant 1. \tag{11.1-1}$$

当 $x + y > 0$ 时，(11.1 − 1) 式化为