笃志图书

普通高等教育“十一五”国家级规划教材专用辅导

工程数学
线性代数

同步辅导

第五版

主 编：同济大学数学系 彭舟

- 教材内容归纳
- 重点难点剖析
- 典型例题解析
- 课本习题全解
- 考研真题精选

航空工业出版社

笃志图书

工程数学

线性代数

同步辅导

第五版

主 编：同济大学数学系 彭 舟

航 空 工 业 出 版 社

北 京

内 容 提 要

本书是与同济大学数学系主编的《线性代数》第五版相配套的学习辅导用书，全书根据全国高等院校线性代数教学大纲和研究生入学考试要求编写。可供理、工、农、医（非数学专业）大学生学习线性代数时作为参考用书，也可供考研数学复习第一阶段使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数同步辅导 / 彭舟主编. —北京：航空工业出版社，2005.2（2008.7 重印）
ISBN 978-7-80183-552-9

Ⅰ.线… Ⅱ.彭… Ⅲ.线性代数 – 高等学校 – 教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 009229 号

线性代数同步辅导

Xianxing Daishu Tongbu Fudao

航空工业出版社出版发行

（北京市安定门外小关东里 14 号　100029）

发行部电话：010-64815615　010-64978486

北京山华苑印刷有限责任公司印刷　　全国各地新华书店经售

2005 年 2 月第 1 版　　2008 年 7 月第 2 次印刷

开本：787×960　1/16　　印张：13.5　　字数：270 千字

印数：8001-18000　　定价：16.50 元

前　言

本书是同济大学数学系主编的《线性代数》(第五版)的指定配套参考用书,适合初次学习《线性代数》课程的大学生及准备报考硕士研究生的人员复习《线性代数》时使用。

由于近年来教学改革的实施,线性代数课时有所减少,而课程难度和教学要求并未降低,同学们急切需要一本合适的线性代数辅导书。为了帮助广大同学学好线性代数,同济大学应用数学系和北京大学数学科学学院根据多年的线性代数教学经验,听取了广大学生的意见,继 2004 年推出《高等数学同步辅导》之后,再度联合编写了这本《线性代数同步辅导》。

本书内容体系严格按照同济大学《线性代数》(第五版)教材编排。在具体内容上具有以下特点:

1. 在每章开始给出了大纲对本章各知识点的不同程度的要求,使学生在学习中做到有的放矢。

2. 概括归纳出了教材每章的主要内容,更有利于同学提纲挈领,深刻理解各部分内容之间的关系,从整体的角度掌握课本内容。

3. 例题既包括与基本概念有关的各种题型,又有综合各个知识点具有一定难度的综合例题,从基础到提高,适合各种水平学生的需要。

4. 给出了每节课后习题的全解,供学生作为解题参考。

5. 精选了有代表性的近年考研真题及解答放在每章的最后,让学生在第一遍学习时就对研究生入学考试的难度要求有初步认识。

《线性代数同步辅导(同济五版)》具有科学完整的体系,如果合理地使用本书,必将事半功倍。本书的出版,如果能对广大学生在线性代数的学习和复习中有所帮助,那就是对我们工作的最大肯定。

由于时间仓促和水平所限,书中的不足之处请广大读者和专家给予批评指正。

编　者

二〇〇八年一月

目　录

第一章

行列式

一、本章大纲要求

1. 理解 n 个元素的全排列及其逆序数的定义
2. 理解 n 阶行列式的定义，熟练掌握行列式的性质，会用行列式的有关性质化简、计算行列式
3. 熟练掌握把一般行列式化简为上(下)三角形行列式的方法
4. 会求 n 阶行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 并熟练掌握行列式按某行(列)展开的方法
5. 能熟练应用克拉默法则判定线性方程组解的存在性、唯一性及求出方程组的解

二、基本内容

1. 二阶与三阶行列式

(1) 二阶行列式的定义

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

所确定的二阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(2) 二元线性方程组的行列式解法

如果方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

则该方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

(3) 三阶行列式的定义

设有由 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

则将

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为由该数表所确定的三阶行列式.

2. n 阶行列式

(1) 全排列及其逆序数

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列，所有全排列的个数记作 P_n，$P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=n!$.

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序(如从小到大)，于是在这几个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有 1 个逆序，一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫偶排列.

规定由小到大为标准次序，设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数的一个排列，对于元素 p_i，如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数为 t_i. 全体元素的逆序数之和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

即为这个排列的逆序数.

(2) 对换

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的变换叫做对换. 将相邻两个元素对换叫做相邻对换.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推论 奇(偶)排列变成标准排列的对换次数为奇(偶)数.

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

(3)n 阶行列式的定义

设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并乘以符号 $(-1)^t$ 得到形如 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的项,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数. 这样的排列共有 $n!$ 项,所有这 $n!$ 项的代数和 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为 n 阶行列式,记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$,其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元.

3. **行列式的性质**

性质 1　行列式与它的转置行列式相等. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 2　互换行列式的两行(列),行列式变号.

推论　如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘此行列式.

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.

4. **行列式按行(列)展开**

(1) 余子式与代数余子式

在 n 阶行列式中,把(i,j)元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做(i,j)元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,A_{ij} 叫做(i,j)元 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 行列式按行(列)展开的计算

定理 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

推论 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,i\neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,i\neq j.$$

5. **几种特殊行列式**

(1) 上(下)三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

$$(3)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

6. 克拉默法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\;\; \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式不等于零,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 如果非齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$,则方程组一定有解,且解是唯一的.

定理 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$,则齐次线性方程组没有非零解.

三、重点难点

1. 化简计算行列式的一般方法

(1) 按定义将行列式展开计算.

(2) 三角化. 即通过初等变换,使主对角线一侧的元素都变为零.

(3) 递推法. 若 n 级行列式 D_n 划掉第一行第一列得到的 D_{n-1} 与 D_n 有相同形状,可用递推的方法求出 D_n(往往需要用数学归纳法证明). 例如,若有关系 $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}(n > 2)$,可分为以下情况求解:

①$q = 0$,则 $D_n = p^{n-1}D_1$;

②$q \neq 0$,令 α,β 是方程 $x^2 - px - q = 0$ 的根,则 $-p = \alpha + \beta, q = -\alpha\beta$,由此得

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}) \tag{a}$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) \tag{b}$$

若 $\alpha \neq \beta$,容易从(a) 与(b) 得

$$\begin{cases} D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1) \\ D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1) \end{cases}$$

解此方程组得

$$D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$$

其中
$$C_1 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)}, C_2 = -\frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\alpha - \beta)}.$$

若 $\alpha = \beta$,则(a) 与(b) 变成

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

即 $D_n = \alpha D_{n-1} + A\alpha^{n-2}$,其中 $A = D_2 - \alpha D_1$. 反复利用上述关系,可得

$$D_n = \alpha^{n-1}D_1 + (n-1)A\alpha^{n-2}$$

令 $C_1 = \frac{A}{\alpha^2}, C_2 = \frac{D_1}{\alpha}$(这里 $\alpha \neq 0$,因为 $q \neq 0$),有

$$D_n = \alpha^n[(n-1)C_1 + C_2].$$

(4) 分解出线性因子. 即将行列式看作某个变量的多项式,利用余子式定理设法解出线性因子.

(5) 将行列式表示为行列式和的方法. 即若某行(或列) 每个元素均为两项的和,则可按行列式的性质将它化为两个同级行列式的和,然后分别计算.

(6) 变更行列式的元素的方法. 这种方法运用在当改变行列式所有元素时,各元素的余子式便能很快算出来的情形. 它基于这样的性质:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D' = \begin{vmatrix} a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

则 $D' = D + x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$. D' 是我们要求的行列式,A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

2. 判断一个行列式 D 是否为零的常用方法

(1) 如果行列式 D 有一行(列) 的所有元素全为零,则 $D = 0$;

(2) 如果 D 有两行(列) 对应位置的元素相同或成比例,由行列式性质得 $D = 0$;

(3) 如果 $-D^{T} = D$,并且 D 的阶数是奇数,则 $D = 0$;

(4) 如果 D 中等于零的元素个数比 $n^2 - n$ 多,则 $D = 0$,事实上,当 D 中等于零的元素个数比 $n^2 - n$ 多时,不等于零的元素个数一定比 $n^2 - (n^2 - n) = n$ 少,所以 D 中至少有一行元素全部为零,即 $D = 0$;

(5) 若能设法证明 D 不能被 2 整除,则 $D \neq 0$;

(6) 如果 D 中有一个大于 $\frac{n}{2}$ 阶的子式中的元素全为零,则 $D = 0$;

(7) 直接计算 D.

3. 注意对范德蒙德(Vandermonde) 行列式(课本例 12)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j)$$

的熟练掌握,这对计算一些特殊类型行列式非常有用.

4. 在各种计算行列式的方法中,应用行列式的性质 6,对行列式进行三角化,从而计算出行列式的值,这是最基本也是最重要的方法,一定要熟练掌握.

5. 在学习了下一章的矩阵知识后将会对线性方程组的性质有更深刻理解.

四、典型例题解析

例 1　如果排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 I,则排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少?这两个排列之间的奇偶关系又如何?

解　在排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 及 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 中考查同一对数 x_k 与 x_c. 它们在两个排列中,一为顺序,一为逆序,即这一对数在两个排列中的逆序数之和为 1. 在一个由 n 个数组成的排列中,共有 $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ 对不同的数,在题设两个排列中,这些数对的逆序之和也就是 $\frac{1}{2}n(n-1)$,由于排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 I,则后一个排列的逆序数为 $\frac{1}{2}n(n-1) - I$.

因为两排列的逆序数之和为$\frac{1}{2}n(n-1)$，因此当$n=4k$或$n=4k+1$时，$\frac{1}{2}n(n-1)$为偶数．这时，$x_1x_2\cdots x_n$与$x_nx_{n-1}\cdots x_1$的奇偶数性相同；当$n=4k+2$或$4k+3$时，$\frac{1}{2}n(n-1)$为奇数，这时$x_1x_2\cdots x_n$与$x_nx_{n-1}\cdots x_1$的奇偶性相反．

例 2 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2\times2-1\times(-1)=5$；

(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}=ab^2-ba^2=ab(b-a)$；

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=1\times1\times1+2\times2\times2+3\times3\times3-3\times1\times2-2\times3\times1-1\times3\times2=18;$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}=1\times5\times1+3\times4\times(-1)+0\times0\times0-(-1)\times5\times0-1\times4\times0-3\times0\times1=5-12=-7.$$

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解法一 （应用性质）

$$D\xlongequal[2r_1+r_2]{-r_1+r_4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \end{vmatrix}\xlongequal[-r_2+r_3]{-3r_2+r_4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -19 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{2r_3+r_4}\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&5\\0&0&-1&-6\\0&0&0&-31\end{vmatrix}=31$$

解法二　（按第三行展开）

$$D=a_{32}(-1)^{3+2}M_{32}+a_{34}(-1)^{3+4}M_{34}$$

$$=1\times(-1)^5\begin{vmatrix}1&-1&2\\-2&3&1\\1&4&-2\end{vmatrix}+(-1)\times(-1)^7\begin{vmatrix}1&0&-1\\-2&1&3\\1&3&4\end{vmatrix}=31$$

解法三　（先用性质，再按行展开）

$$D\xlongequal{c_2+c_4}\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\-2&1&3&2\\0&1&0&0\\1&3&4&1\end{vmatrix}=1\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-1&2\\-2&3&2\\1&4&1\end{vmatrix}=31.$$

例 4　用行列式解下列方程

(1) $\begin{cases}6x_1-4x_2=10\\5x_1+7x_2=29\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}4x_1+5x_2=0\\3x_1-7x_2=0\end{cases}$

(3) $\begin{cases}bx-ay+2ab=0\\-2cy+3bz-bc=0\\cx+az=0\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x_1=0.5x_1+0.3x_2+0.4x_3+10\\x_2=0.4x_1+0.5x_3+20\\x_3=0.2x_1+0.1x_2+12\end{cases}$

解　(1) $D=\begin{vmatrix}6&-4\\5&7\end{vmatrix}=6\times7-(-4)\times5=62$

$$D_1=\begin{vmatrix}10&-4\\29&7\end{vmatrix}=10\times7-(-4)\times29=186$$

$$D_2=\begin{vmatrix}6&10\\5&29\end{vmatrix}=6\times29-5\times10=124$$

所以　$x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{186}{62}=3$，　$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{124}{62}=2$.

(2) $D=\begin{vmatrix}4&5\\3&-7\end{vmatrix}=4\times(-7)-5\times3=-43$

$D_1=\begin{vmatrix}0&5\\0&-7\end{vmatrix}=0$　　$D_2=\begin{vmatrix}4&0\\3&0\end{vmatrix}=0$

所以　$x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{0}{-43}=0$，　$x_2=\dfrac{0}{-43}=0$.

(3) 将原方程组变形为

$$\begin{cases} bx - ay = -2ab \\ -2cy + 3bz = bc \\ cx + az = 0 \end{cases}$$

于是 $D = \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = b\times(-2c)\times a + (-a)\times 3b\times c + 0 - 0 - 0 - 0$

$= -5abc$

$D_1 = \begin{vmatrix} -2ab & -a & 0 \\ bc & -2c & 3b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -2ab\times(-2c)\times a + 0 + 0 - 0 - (-a)\times bc\times a - 0$

$= 5a^2bc$

$D_2 = \begin{vmatrix} b & -2ab & 0 \\ 0 & bc & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = b\times bc\times a + (-2ab)\times 3b\times c + 0 - 0 - 0 - 0 = -5ab^2c$

$D_3 = \begin{vmatrix} b & -a & -2ab \\ 0 & -2c & bc \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-a)\times bc\times c + 0 - (-2ab)\times(-2c)\times c = -5abc^2$

所以 $x = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{5a^2bc}{-5abc} = -a$

$y = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-5ab^2c}{-5abc} = b$

$z = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{-5abc^2}{-5abc} = c$

(4) 将原方程组变形为

$$\begin{cases} 0.5x_1 - 0.3x_2 - 0.4x_3 = 10 \\ -0.4x_1 + x_2 - 0.5x_3 = 20 \\ -0.2x_1 - 0.1x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

于是 $D = \begin{vmatrix} 0.5 & -0.3 & -0.4 \\ -0.4 & 1 & -0.5 \\ -0.2 & -0.1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 0.5\times1\times1 + (-0.3)\times(-0.5)\times(-0.2) + (-0.4)\times(-0.4)\times(-0.1) - (0.4)\times1\times(-0.2) - (-0.3)\times(-0.4)\times1 - 0.5\times(-0.5)\times(-0.1)$

$= 0.229$

$$D_1=\begin{vmatrix}10 & -0.3 & -0.4\\ 20 & 1 & -0.5\\ 12 & -0.1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=10\times1\times1+20\times(-0.1)\times(-0.4)+(-0.3)\times(-0.5)\times12-12\times1\times(-0.4)-10\times(-0.1)\times(-0.5)-20\times(-0.3)\times1$$

$$=22.9$$

$$D_2=\begin{vmatrix}0.5 & 10 & -0.4\\ -0.4 & 20 & -0.5\\ -0.2 & 12 & 1\end{vmatrix}$$

$$=0.5\times20\times1+(-0.4)\times12\times(-0.4)+(-0.2)\times10\times(-0.5)-(-0.2)\times20\times(-0.4)-0.5\times12\times(-0.5)-(-0.4)\times10\times1$$

$$=18.32$$

$$D_3=\begin{vmatrix}0.5 & -0.3 & 10\\ -0.4 & 1 & 20\\ -0.2 & -0.1 & 12\end{vmatrix}$$

$$=0.5\times1\times12+10\times(-0.4)\times(-0.1)+(-0.2)\times(-0.3)\times20-(-0.2)\times1\times10-0.5\times(-0.1)\times20-(-0.4)\times(-0.3)\times12$$

$$=9.16$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{22.9}{0.229}=100$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{18.32}{0.229}=80$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{9.16}{0.229}=40$$

例 5　求下列排列的逆序数，并确定它的奇偶性

(1)41253　　　　(2)3712456　　　　(3)$n(n-1)\cdots21$

解　(1)4 排在首位，逆序数为 0；

1 的前面比 1 大的数有一个(4)，故逆序数为 1；

2 的前面比 2 大的数有一个(4)，故逆序数为 1；

5 的前面没有比 5 大的数，故逆序数为 0；

3 的前面比 3 大的数有两个(4,5)，故逆序数为 2；

于是排列 41253 的逆序数为 $t=0+1+1+0+2=4$，所以排列为偶排列.

(2) 类似(1) 可求得，排列 3712456 的逆序数为 7，所以排列为奇排列.

(3) 易知排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数为

$$t=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$$