高等数学(下册)

同济大学应用数学系 编著

第二版

21世纪网络版系列教材

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

21世纪网络版系列教材

高等数学

下册

（第二版）

同济大学应用数学系　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/同济大学应用数学系编著.--2版.
上海:同济大学出版社,2007.12
21世纪网络版系列教材
ISBN 978-7-5608-2504-5

Ⅰ.高… Ⅱ.同… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第093156号

高等数学(下册)(第二版)

同济大学应用数学系 编著

责任编辑 孙一风 责任校对 杨江淮 封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路1239号 邮编:200092 电话:021—65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 同济大学印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 18.25
印 数 1—7000
字 数 365000
版 次 2007年12月第2版 2007年12月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5608-2504-5/O·221

定 价 29.00元

序

21 世纪，将是中华民族复兴的世纪。肩负着这一空前历史重任的人民，要求必须具有与之相适应的素质。这也将是新世纪对教育提出的新任务和新要求，也就是说，教育必须适应大众化和终身化的要求。所谓“大众化”，是指人们有着更多的机会接受教育，包括高等教育在内；所谓“终身化”，是指人生过程都伴随着接受教育的机会。

在某种意义上说，网络教育正是为适应教育大众化和教育终身化的要求而产生的。信息技术和网络技术的空前发展，为网络教育的实施提供了切实可行的手段和方式，也可以说，信息和网络技术催生了网络教育。它可不受人力、地域、场地和时空的限制。网络教育方式的出现，在提升教育使命、丰富教育理念、扩大教育规模、革新教育手段、优化教育资源和提高教育质量等方面起着重要的作用。

网络教育采用的是借助现代信息技术的一种全新的教学形式，这就为网络教育的教材编写工作提出了新的要求。它更需要以其视听性、自学性、选择性、层次性、灵活性的特点去满足读者的需要，让每一个学习者都可以寻求到适应自己层次的知识点。我高兴地看到，参加这套网络系列教材编写工作的教师，都具有深厚的专业学识、丰富的教学经验，以及对现代教育技术的理解，这是整套教材的质量水平的可靠保证。

我期望，这套教材的出版，将会有助于推动教育大众化和教育终身化的进程，有利于促进网络教学的发展，有助于满足人们日益追求知识的愿望，有助于营造一个学习型社会的氛围，为中华民族的复兴作一点贡献。

吴启迪

2002 年 8 月 8 日写于同济园

第二版前言

网络版《高等数学》(第一版)教材的使用已有五个年头了，为进一步提高教材的质量，更好地适应继续教育及网络教育发展的需要，我们广泛听取了任课教师的意见和建议，参照“教学基本要求”修订编写了网络版《高等数学》(第二版). 这次参加编写的作者有黄珏、许新福、张华隆、任学敏.

本版书对原书在结构上作了适当的调整，且篇幅有所压缩；保留了习题册与教材分开便于交批的特点；适当降低了理论深度，突出了实用的分析和运算方法；删除了某些要求过高的习题，突出了基本训练的题目，使之更适应使用要求.

本教材分为上、下两册出版，上册分为六章，内容为函数与极限，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程；下册分为五章，内容为向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数.

为本书单独编制的习题册分为上、下两册，在学习每一节内容之后，为了达到教学的基本要求，读者应完成习题册中相应的习题，习题的答案与提示可参见教材(上册及下册)的最后部分.

为了便于读者的学习，本书在每一章开头都安排了“导读”，在每一章结尾都写了“要点解析”. 此外，每一章还配置了复习题，以便于读者复习、巩固所学的知识.

本书可作为网络教育及继续教育本科和专科各专业的教材或参考书.

编者
2007 年 10 月

第一版前言

网络教育是近年来出现的一种新的教育形式.本书的编写意在适应这种新型教育形式的需要,有助于它的蓬勃发展.本书主要供接受网络教育的工科高等院校本科学生学习高等数学课程时使用.为此,在编写过程中,我们注意到了如下两个方面的问题:一方面,在教学内容的取舍、展开的深广程度上尽可能符合现行的高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》;另一方面,在教学内容的叙述、例题的选择和习题的配置等环节上,尽可能适应网络教育的特点.

考虑到当前本课程的教学时数不可避免地被压缩的实际情况,以及计算机的广泛应用与数学软件的日臻完善,在本书中对某些内容作了适当的精简,例如,在不定积分这部分内容中,介绍了不定积分的基本运算方法,但是在技巧性方面不作过高要求,控制了例题和习题的难度;又如,对函数的作图、方程的近似解、数值积分等内容只介绍基本原理与方法.我们希望在条件具备的学校与教学点,充分利用计算机来完成这些内容的教学,取得更好的教学效果,同时也尽量体现网络教育的特点.

在本书的编写中,我们努力突出微积分的基本思想与基本方法,以便学生更好地学习与掌握.我们希望学生在本课程的学习过程中不断提高数学素质.

本书分为上、下两册,上册包括函数与极限,一元函数微分学,一元函数积分学与常微分方程等内容;下册包括无穷级数,空间解析几何与向量代数,多元函数微分学与多元函数积分学等内容.本书习题配置的方式是:每一节学习之后,为了达到教学的基本要求,每个学生都需要做的习题单独编制为习题册(也相应地分为上、下两册);另外,在每一章末编制有复习题,其中,大部分习题是为复习、巩固所学知识而设置的,也有一些习题可以供学生提高数学能力之用.我们希望习题的这种配置方式可以更好地适应网络教育的需要.

本书的编写得到同济大学网络教育学院和应用数学系的支持.参加本书编写的有黄珏、许新福、张华隆、任学敏.我们还感谢同济大学出版社策划部的热情帮助.

由于编者水平所限,加之时间仓促,书中必有不妥之处,错误也在所难免,希望专家、同行和广大读者批评指正.

编者
2002年4月

目　录

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何

导读　本教材的第八章至第十章将研究多元函数的微积分．正像平面解析几何的知识对于学习一元函数微积分是必不可少的那样，空间解析几何的知识对于多元函数微积分的学习同样也是必要的．本章介绍的内容正是为学习多元函数微积分作准备．

本章内容分成三部分．首先，类似于平面直角坐标系，引入空间直角坐标系及空间点坐标的概念，然后对实际问题中经常遇到的一些既有大小又有方向的量进行概括与抽象，提出数学上向量的一般概念，并引入向量的运算．读者在学习过程中，要注意引入这些运算的实际背景．学习中要兼顾注意向量的几何表示、向量运算的几何意义以及向量的坐标表示与向量运算的坐标表示式．可以说，有关向量的每一个结论都有等价的几何表示形式和坐标表示形式，学习时要注意二者对比，切实掌握．

第二部分的主要内容是以向量为工具建立平面的方程与空间直线的方程，讨论平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的相互位置关系，包括它们之间的夹角确定、平行或垂直的条件等．通过学习，读者应该掌握平面方程与空间直线方程的确定方法，并且会利用平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的相互位置关系去解决有关问题．

本章第三部分是空间解析几何的基础知识，给出了空间直角坐标系中曲面、曲线的方程的概念，比较详细地介绍了一些常用曲面的方程以及这些曲面的几何形状特征，并讨论了一些特殊曲面的交线以及曲面所围立体的几何形状特征．通过学习，读者应该对本部分中讨论的柱面、旋转曲面、标准型的二次曲面的方程及几何形状特征有清晰的了解，应该亲自画一画这些曲面的草图，可能的话，利用相关数学软件在计算机上进行作图，以加深印象．学好本部分内容，将对后续内容——多元函数微积分的学习大有益处．

在平面解析几何中，通过坐标法将平面上的点与一对有次序的实数对应起来，把平面上的图形(曲线)与方程对应起来，从而可以用代数的方法来研究几何问题．空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的．

自然界中很多量既有大小又有方向，数学中的向量就是对这一类量的概括和抽象．向量是一种重要的数学工具，在工程技术中有着广泛的应用．本章首先建立空间直角坐标系，再引入向量的概念，介绍向量的一些运算，然后以向量为工具讨论空间中的平面与直线，最后再介绍空间中曲面与曲线方程的概念，着重讨论二次曲面的方程及图形特征．

第一节 向量及其线性运算

一、空间直角坐标系

空间直角坐标系是平面直角坐标系的推广．通过空间直角坐标系，可以建立空间的点与数组之间、空间图形与方程之间的联系．

1. 空间点的直角坐标

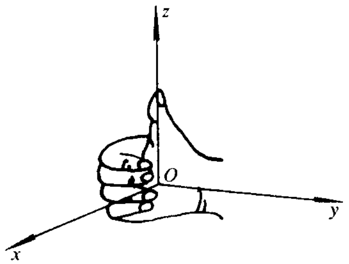

图 7-1

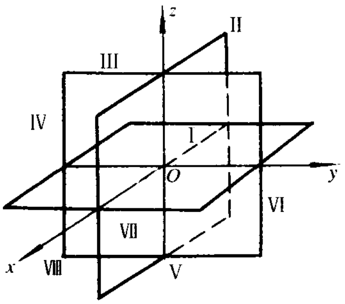

图 7-2

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且有相同的长度单位，它们分别称为 **x 轴**(横轴)，**y 轴**(纵轴)与 **z 轴**(竖轴)，统称为**坐标轴**．三条坐标轴的正方向符合右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度到达 y 轴的正向时，竖起的大姆指的指向就是 z 轴的正向(图 7-1)．这样的三条坐标轴就组成了空间直角坐标系，点 O 称为该坐标系的**原点**．

三条坐标轴中每两条可以确定一个平面，称为**坐标面**，由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 xOy 面，类似地，还有 yOz 面与 zOx 面．这三个坐标面把空间分成八个部分，每一个部分叫做一个**卦限**．如图 7-2 所示，

八个卦限分别用罗马字Ⅰ,Ⅱ,…,Ⅷ表示,含 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限称为第一卦限,其他第二、三、四卦限均在 xOy 面的上方,且按逆时针方向依次排定.第五、六、七、八卦限在 xOy 面的下方,位于第一卦限下方的是第五卦限,其余的按逆时针方向依次排定.

设 M 是空间一已知点,过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴且与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别记作 P,Q 和 R,点 P,Q 和 R 分别称为点 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的**投影**.设这三个投影在 x 轴、y 轴、z 轴的坐标分别为 x,y 与 z,于是,空间点 M 唯一地确定了一个有序数组 x,y,z. 反过来,对于给定的有序数组 x,y,z,可以在 x 轴上取定坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取定坐标为 y 的点 Q,在 z 轴上取定坐标为 z 的点 R,过 P,Q 和 R 三点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面,这三个平面的唯一交点 M 就是有序数组 x,y,z 所确定的唯一空间点 M. 这样,空间的点与有序数组 x,y,z 之间就建立了一一对应的关系,这组数 x,y,z 称为点 M 的**直角坐标**,依次称 x,y,z 为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**与**竖坐标**,并把点 M 记为 $M(x,y,z)$. 有时简称(x,y,z)是点 M 的坐标(图 7-3).

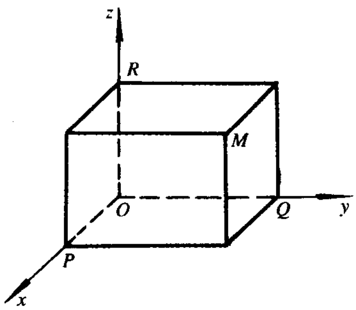

图 7-3

容易看出,八个卦限中点的坐标有如下的特点:

卦限	点的坐标(x,y,z)	卦限	点的坐标(x,y,z)
Ⅰ	$x>0,y>0,z>0$	Ⅴ	$x>0,y>0,z<0$
Ⅱ	$x<0,y>0,z>0$	Ⅵ	$x<0,y>0,z<0$
Ⅲ	$x<0,y<0,z>0$	Ⅶ	$x<0,y<0,z<0$
Ⅳ	$x>0,y<0,z>0$	Ⅷ	$x>0,y<0,z<0$

2. 空间两点的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点,为了表达 M_1 与 M_2 之间的距离,过 M_1 和 M_2 各作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴与 z 轴.这六个平面围成一个以 M_1,M_2 的连线为对角线的长方体(图 7-4).从图中容易看出该长方体各棱的长度分别为 $|x_2-x_1|$,

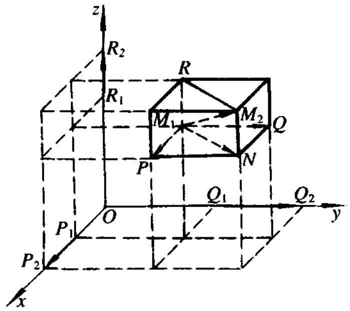

图 7-4

$|y_2-y_1|,|z_2-z_1|$. 于是得对角线的长度，亦即空间两点 M_1 与 M_2 之间的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad (7.1)$$

特别地，空间点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1　求证：以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证明　因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6,$$

可知 $|M_2M_3|=|M_3M_1|=\sqrt{6}$，即 $\triangle M_1M_2M_3$ 是等腰三角形.

例 2　空间中所有与原点距离均为常数 r 的点的坐标 x,y,z 应满足什么方程？将这些点用集合的形式表示出来.

解　设 $M(x,y,z)$ 是满足题设条件的任一点，原点是 $O(0,0,0)$，依题意，有 $|OM|=r$，即

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r,$$

或

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

这就是所求的方程.

记所有与原点距离为 r 的点组成的集合为 B，则

$$B=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=r^2\},$$

它表示中心在原点、半径为 r 的球面.

二、向量概念

1. 向量及其几何表示

在自然科学、社会科学中，人们常把所研究的事物与数联系起来，然后以数为工具来分析、处理所研究的对象. 用数表示的量很多，如某一群体的数量、某两点间的距离、某一物体的体积与质量、物体所具有的能量以及某一自然现象所持续的时间，等等. 通常把这些量称为**纯量**.

然而，自然界中有些量单纯用一个数字并不能准确地描述其意义．例如，一架飞机从 A 点沿某个固定方向飞行 10km 到达 B 点，如果仅用飞行距离 $AB=10\text{km}$ 来描述，显然是不充分的，还应描述飞机移动的方向．再如，将一个力作用于某物体上，如果只说明力的大小而不说明力的作用方向，也就无法确定该作用力所产生的效应．诸如此类的量，单纯地用一个数字是不足以描述它们的，因为这些量除了具有数量的属性外，还具有方向的属性．我们把这种既有大小（非负的纯量）、又有方向的量称为**向量(矢量)**.

力学与物理学中提出的一些量，如位移、速度（线速度与角速度）、加速度（线加速度与角加速度）、力、力矩、动量、冲量等都是向量．向量通常用黑体字母表示，如 $\boldsymbol{s},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{f}$ 等，有时也可用上方加有箭头的字母表示，如 $\vec{s},\vec{v},\vec{a},\vec{f}$等．

从定义可知，向量的两个要素是大小与方向．由于几何上的有向线段（一条有方向的线段）正好具备了大小（线段的长度）与方向两个要素，故在数学上往往采用一条有方向的线段来表示向量．如果线段起点是 M_0，终点是 M，那么，这条有向线段可以记为$\overrightarrow{M_0M}$，它代表一个确定的向量，线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．在以后的讨论中，**我们对向量与表示它的有向线段不加区分**．例如，把有向线段$\overrightarrow{AB}$说成向量$\overrightarrow{AB}$，或把向量 $\boldsymbol{a}$ 看成有向线段．

在实际问题中，有些向量与其起点有关，有些向量与其起点无关．由于一切向量的共性是它们都有大小与方向，所以，数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**（以后简称为**向量**)．今后，我们只考虑向量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方，或者说，所有的向量都可移动到同一个起点（比如原点）进行研究．当遇到与起点有关的向量时，可以在一般原则下作特殊处理．由于我们只考虑自由向量，所以有如下定义：

定义　如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的大小相同，方向一致，就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，并记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

由定义可知，空间中的两个向量若平移后能够完全重合，则可认为它们是同一个向量．

2. 向量的模与方向角

向量的大小称为向量的**模**．向量$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\vec{a}$，$\boldsymbol{a}$ 的模依次记为$|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$|\vec{a}|$，$|\boldsymbol{a}|$.

模为 1 的向量称为**单位向量**；模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或者$\vec{0}$. 取不同的方向得到不同的单位向量，故单位向量有无穷多个．零向量的起点与终点重合，它的方向可以看作是任意的，但零向量是唯一的．

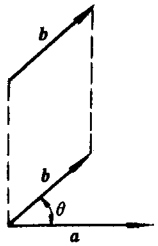

图 7-5

平移向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 使它们的起点重合，它们所在射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$就称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**（图 7-5），通常把 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角记为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 如果两个非零向量的方向相同或相反，即它们的夹角为 0 或 π，就称这两个向量**平行**．向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以看作是任意的，因此，可以认为零向量与任何向量都平行．习惯上，称平行的两个向量为**共线的向量**，因为平移后所有相互平行的向量可处于同一条直线上．若$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，用 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 表示．

平移向量 $\boldsymbol{a}$，使其起点与原点重合，此时，向量 $\boldsymbol{a}$ 所在射线与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角分别为 α，β 和 γ，统称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**，它们的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 则称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**．通常可用向量的方向余弦来描述向量的方向．

三、向量的线性运算

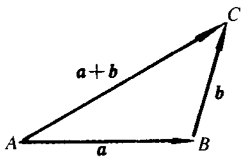

图 7-6

本目中将要介绍的向量的加减法以及向量与数的乘法统称为**向量的线性运算**．

1. 向量的加减法

向量的加法运算法则如下：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC（图 7-6），那么，向量$\overrightarrow{AC}$