全国高等教育自学考试指定教材 公共课程

# 高等数学（工本）

附：高等数学（工本）自学考试大纲

课程代码 0023

[2006年版]

组编/全国高等教育自学考试指导委员会

主编/陈兆斗 高瑞

本教材附赠网络学习卡

北京大学出版社

全国高等教育自学考试指定教材

**公共课程**

# 高等数学（工本）

**（附：高等数学（工本）自学考试大纲）**

**（2006年版）**

全国高等教育自学考试指导委员会　组编

主编　陈兆斗　高　瑞

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学(工本)/陈兆斗,高瑞主编. —北京:北京大学出版社,2006.8
ISBN 7-301-10706-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.①陈…　②高…　Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 047181 号

**书　　名**:高等数学(工本)
**著作责任者**:陈兆斗　高　瑞　主编
**责 任 编 辑**:曾琬婷
**标 准 书 号**:ISBN 7-301-10706-4/O·0693
**出　　版**:北京大学出版社
**地　　址**:北京市海淀区成府路 205 号　100871
**印　刷　者**:北京飞达印刷有限责任公司
787mm×1092mm　16 开本　19.5 印张　475 千字
2006 年 8 月第 1 版　　2006 年 9 月第 1 次印刷
**定　　价**:29.00 元

---

# 组编前言

21世纪是一个变幻莫测的世纪，是一个催人奋进的时代，科学技术飞速发展，知识更替日新月异．希望、困惑、机遇、挑战，随时随地都有可能出现在每一个社会成员的生活之中．抓住机遇、寻求发展、迎接挑战、适应变化的制胜法宝就是学习——依靠自己学习、终生学习．

作为我国高等教育组成部分的自学考试，其职责就是在高等教育这个水平上倡导自学、鼓励自学、帮助自学、推动自学，为每一位自学者铺就成才之路．组织编写供读者学习的教材就是履行这个职责的重要环节．毫无疑问，这种教材应当适合自学，应当有利于学习者掌握、了解新知识、新信息，有利于学习者增强创新意识，培养实践能力，形成自学能力，也有利于学习者学以致用，解决实际工作中所遇到的问题．具有如此特点的书，我们虽然沿用了“教材”这个概念，但它与那种仅供教师讲、学生听，教师不讲、学生不懂，以“教”为中心的教科书相比，已经在内容安排、编写体例、行文风格等方面都大不相同了．希望读者对此有所了解，以便从一开始就树立起依靠自己学习的坚定信念，不断探索适合自己的学习方法，充分利用已有的知识基础和实际工作经验，最大限度地发挥自己的潜能，以达到学习的目标．

欢迎读者提出意见和建议．

祝每一位读者自学成功！

全国高等教育自学考试指导委员会

2006年1月

# 内容简介

本书是根据全国高等教育自学考试指导委员会2006年最新修订的《高等数学(工本)自学考试大纲》进行编写的,是工科各专业本科“高等数学”课程自考教材.本书作者具有丰富的自考助学经验,且参与了本课程考试大纲的修订工作,对自学考试的要求及自考生的情况有深刻的了解.

全书共分六章,内容包括:向量代数与空间解析几何、多元函数的微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、常微分方程、无穷级数等.每节配有适量的习题,每章配有复习题,且所有习题在书后均有参考答案.另外,每章末附有该章的内容小结,书末附有本课程的自学考试大纲和样卷,以供参考.

本书注重考虑自学考试的特点,叙述由浅入深、思路清晰、说理透彻,尤其对教学难点阐释详细;例题丰富典型,解题过程详尽、启发性强;尽量给出直观说明,图文并茂,利于自学.

本书除可作为工科各专业本科“高等数学”课程自考教材外,也可作为普通高等工科院校本科“高等数学”课程的教材或参考书.

# 序 言

根据我国高等教育自学考试多年来的实践经验，2002 年全国高等教育自学考试指导委员会组织专家，经过反复讨论重新拟定了工业工程专业本科《高等数学(工本)自学考试大纲》. 本书正是根据新大纲拟定的精神和要求编写的.

根据新大纲的要求，本教材的内容涉及：空间解析几何、向量代数、多元微积分、微分方程、无穷级数等. 它相当于普通高校工科专业《高等数学》教材下册的内容，这正是此次大纲修订的一项重要改革. 所以使用此教材的前导教材是《高等数学(工专)》中的一元微积分.

考虑到自学考试的特点，本书在编写的过程中尽量在教学的难点之处写得比较详细，使得课堂教学的细微之处也能在教材中得以体现. 对于某些证明过程复杂的定理和性质，省略了证明过程，代之以直观的说明或类比. 在空间解析几何和多元积分学的内容中，配有大量的图形以备读者自学时参考. 为使读者在自学时能很好地掌握所学内容，本教材特别突出了微积分学的思想和处理问题的方法，并挑选了大量有特色的例题. 本教材的每一节都配有相应的习题，每一章都配有综合这一章内容的复习题. 所有的习题在书后都有答案，我们相信这些习题会有助于读者巩固和熟练掌握所学的知识. 本教材共有六章，在每一章的末尾附有该章内容的小结，全书的最后附有本课程的考试大纲和样卷. 此外，教材中还有一些超出考试大纲规定的内容，这些内容都被加以“*”号，它们不应作为考试的内容要求.

读者在使用本教材时应注意以下几点：

1) 本教材的内容都是一元微积分学内容的推广或深入，它们都可以参照一元微积分的相关内容去理解和掌握. 在学习时应注意随时复习有关一元微积分的知识(可以参考教材《高等数学(工专)》).

2) 读者在学习第一章(空间解析几何与向量代数)的过程中应多做一些画图练习，以培养自己的空间想象力. 这一章的内容是继续学习重积分、曲线积分和曲面积分的重要基础.

3) 对于一些简单的定理和性质，应掌握它们的推导过程. 这样可以培养自己的逻辑思维能力.

4) 本教材的很多内容涉及大量的计算，其复杂性程度大大超过了一元微积分. 读者在学习的过程中应做到不仅会计算，而且要算得十分熟练. 本教材中介绍了一些计算上的技巧和方法，读者在做习题时应注意使用这些方法.

在编写本教材的过程中，编者参考了大量的有关资料，从中受到了有益的启发，并选用了其中的一部分习题. 主要的参考资料有：

《高等数学(第五版)》，同济大学应用数学系主编，高等教育出版社；

《高等数学(工本)》，陆庆乐主编，西安交通大学出版社；

《高等数学(工本)自考应试指导》，叶宏光主编，南京大学出版社.

北京航空航天大学李心灿教授和王日爽教授以及北京理工大学张润琦教授细致地审查了本教材的初稿. 他们对初稿提出了宝贵的修改建议，编者按照这些建议作了适当的修改. 国家自考办的王健民、周学秋等同志自始至终关注和支持本教材的编写工作. 在此向上述各位同

志致谢.

本教材的第一、二、三章由陈兆斗教授编写，第四、五、六章由高瑞教授编写. 编者都是从教多年的高校教师，并有从事高教自考助学的丰富经验，这次还有幸参与了此门课程考试大纲的修订工作. 此外，北京科技大学徐岩老师为后三章的工作提供了一些帮助. 我们希望以多年的教学经验编写的这部教材能使广大读者学业有成，更恳请读者和同行教师能对书中的缺点和错误不吝赐教，我们将不胜感谢.

编 者

2005 年 12 月

# 目　　录

# 第一章

# 空间解析几何与向量代数

> 掌握空间解析几何与向量代数的基本知识是学习多元微积分的基础. 此外, 向量代数在力学、物理学和工程技术中有着广泛的应用. 本章主要介绍向量的坐标表示, 向量的运算及空间图形的方程表示.

## §1　空间直角坐标系

### 1.1　空间直角坐标系的建立

过空间定点 $O$ 作三条互相垂直的数轴, 它们都以 $O$ 为原点, 具有相同的单位长度. 这三条数轴分别称为 $x$ 轴(横轴)、$y$ 轴(纵轴)、$z$ 轴(竖轴), 统称为**坐标轴**. 各轴正向之间的顺序要求符合右手法则, 即以右手握住 $z$ 轴, 让右手的四指从 $x$ 轴的正向以 $90°$ 的角度转向 $y$ 轴的正向, 这时大拇指所指的方向就是 $z$ 轴的正向(图 1-1). 这样的三个坐标轴构成的坐标系称为**空间直角坐标系**. 三条坐标轴中的任意两条都可以确定一个平面, 称为**坐标面**. 它们是: 由 $x$ 轴及 $y$ 轴所确定的 $Oxy$ 平面; 由 $y$ 轴及 $z$ 轴所确定的 $Oyz$ 平面; 由 $x$ 轴及 $z$ 轴所确定的 $Oxz$ 平面. 这三个相互垂直的坐标面把空间分成八个部分, 每一部分称为一个**卦限**(图 1-2). 位于 $x, y, z$ 轴的正半轴的卦限称为第一卦限, 从第一卦限开始, 在 $Oxy$ 平面上方的卦限, 按逆时针方向依次称为第二、三、四卦限; 第一、二、三、四卦限下方的卦限依次称为第五、六、七、八卦限.

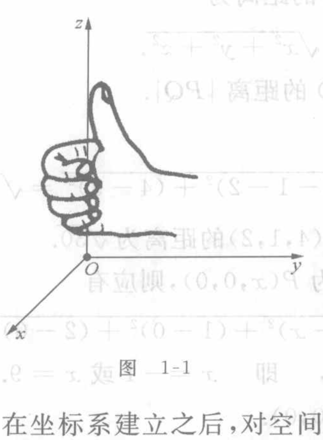


图 1-1

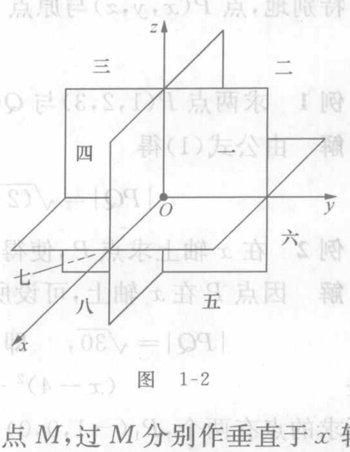


图 1-2

在坐标系建立之后, 对空间中任意一点 $M$, 过 $M$ 分别作垂直于 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的平面, 它们与三条坐标轴分别相交于 $A, B, C$ 三点(图 1-3). 设这

三点在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的坐标依次为 $x,y,z$，则点 $M$ 唯一确定了一组有序数 $x,y,z$. 反之，给定这组有序数 $x,y,z$，设它们在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上依次对应的点为 $A,B,C$. 过这三个点分别作平面垂直于所在坐标轴，则这三个平面唯一的交点就是点 $M$. 这样，空间中的点 $M$ 就可与一组有序数 $x,y,z$ 之间建立一一对应关系. 有序数组 $x,y,z$ 称为点 $M$ 的坐标，记为 $M(x,y,z)$，其中 $x,y,z$ 分别称为点 $M$ 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

显然，原点 $O$ 的坐标为 $(0,0,0)$；坐标轴上的点至少有两个坐标为 0；坐标面上的点至少有一个坐标为 0. 例如，$x$ 轴上点的坐标为 $(a,0,0)$ 的形式，$Oxy$ 平面上点的坐标为 $(a,b,0)$ 的形式. 读者可以自行归纳出其它坐标轴、坐标面上点的坐标特征.

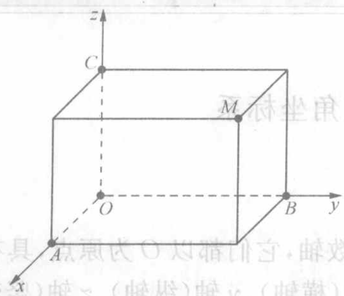


图 1-3

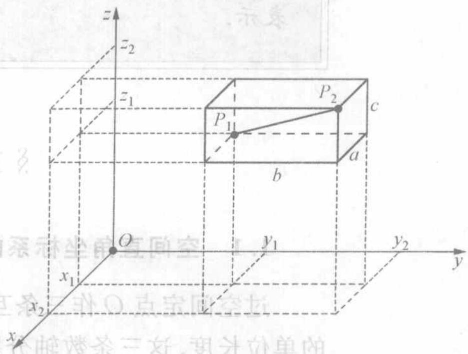


图 1-4

### 1.2 空间中两点间的距离公式

设空间中两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，求它们之间的距离 $|P_1P_2|$. 过这两个点各作三个平面分别垂直于三个坐标轴，形成图 1-4 所示的长方体，这两点之间的距离就是长方体的体对角线长度. 由于长方体的三个棱长分别是

$$a=|x_2-x_1|,\quad b=|y_2-y_1|,\quad c=|z_2-z_1|,$$

所以

$$|P_1P_2|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1}$$

特别地，点 $P(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{2}$$

**例 1** 求两点 $P(1,2,3)$ 与 $Q(2,-1,4)$ 的距离 $|PQ|$.

**解** 由公式(1)得

$$|PQ|=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{11}.$$

**例 2** 在 $x$ 轴上求点 $P$，使得它与点 $Q(4,1,2)$ 的距离为 $\sqrt{30}$.

**解** 因点 $P$ 在 $x$ 轴上，可设所求的点为 $P(x,0,0)$，则应有

$$|PQ|=\sqrt{30},\quad 即\quad \sqrt{(4-x)^2+(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{30}.$$

于是 $$(x-4)^2+5=30,\quad 即\quad x=-1 或 x=9.$$

故所求的点有两个，$P_1(-1,0,0)$ 和 $P_2(9,0,0)$.

**例 3** 给定三个点 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$. 证明：$\triangle M_1M_2M_3$ 是等腰三角形.

**证** 只需证明$\triangle M_1M_2M_3$有两个边的边长相等即可.

$$|M_1M_2| = \sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2} = \sqrt{14},$$
$$|M_2M_3| = \sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{6},$$
$$|M_3M_1| = \sqrt{(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{6}.$$

由于$|M_3M_1| = |M_2M_3|$,所以$\triangle M_1M_2M_3$是等腰三角形.

### 习 题 1-1

1. 研究空间直角坐标系各个卦限中点的坐标特征,指出下列各点在哪个卦限:
$A(1,-2,3)$, $B(2,3,-4)$, $C(2,-3,-4)$, $D(-2,-3,1)$, $E(1,2,4)$.

2. 研究在各个坐标面和坐标轴上点的坐标各有什么特征,指出下列各点在哪个坐标面或坐标轴上:

$$A(3,4,0),\quad B(0,4,3),\quad C(3,0,0),\quad D(0,-1,0),\quad E(0,0,7).$$

3. 点$(a,b,c)$关于各坐标面、各坐标轴、坐标原点的对称点的坐标是什么?

4. 对于空间中的点$M$,如果经过$M$向某条直线作垂线,则称垂足为点$M$在该直线上的**投影点**;如果经过$M$向某个平面作垂线,则称垂足为点$M$在该平面上的**投影点**. 求点$(a,b,c)$在各个坐标面及各个坐标轴上的投影点的坐标.

5. 求顶点为$A(2,5,0)$,$B(11,3,8)$,$C(5,1,11)$的三角形各边的长度.

6. 求点$A(4,-3,5)$到各个坐标轴的距离,即求点$A$与其在各个坐标轴上投影点的距离.

## §2 向量代数

### 2.1 向量的概念

在研究力学、物理学和工程应用中所遇到的量可以分为两类. 一类完全由数值的大小决定,如质量、温度、时间、面积、体积、密度等. 我们将这类量称为**数量**(或**标量**). 另一类量,只知其数值大小还不能完全刻画所描述的量,如力、速度、加速度等,它们不仅有大小还有方向. 我们将这种既有大小又有方向的量称为**向量**.

在空间中以$A$为起点,$B$为终点的线段称为**有向线段**(图 1-5). 从点$A$指向点$B$的箭头表示了这条线段的方向,线段的长度表示了这条线段的大小. 向量就可用这样一条有向线段来表示,记为$\overrightarrow{AB}$. 如果不强调起点和终点,向量也简记为$\boldsymbol{\alpha}$. 将向量$\overrightarrow{AB}$的长度记为$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{\alpha}|$,称为**向量的模**.

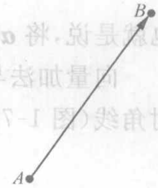

图 1-5

如果向量$\boldsymbol{\alpha}$的模为零,即$|\boldsymbol{\alpha}|=0$,则称$\boldsymbol{\alpha}$为**零向量**,记为$\mathbf{0}$. 可以将零向量理解为起点与终点重合的向量. 从直观意义上讲,零向量不可能表示任何方向,但在数学上有时将零向量的方向看做是任意的,这为处理一些问题带来很大的方便.

**定义 1** 如果两个向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的长度相等且方向相同,则称这两个向量是**相等的向量**,记为$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

也就是说,一个向量在空间中平移到任何位置而得到的向量与原向量相等. 所以这里所规

定的向量也称为**自由向量**.因此,向量的方向和大小(模)是确定一个向量的两个要素.如果两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$ 相等,则可将它们作平移,当它们的起点重合时,它们的终点也必然重合.

若干个向量,将它们的起点平移到同一个点后,如果它们的起点和终点都位于同一条直线上,则称这些向量是**共线**的;如果它们的起点和终点都位于同一个平面上,则称这些向量是**共面**的.不论长度大小,只要两向量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$ 的方向相同或相反,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ **平行**,记为 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$.显然零向量与任何向量都是共线的;两个向量共线的充分必要条件是这两个向量相互平行;空间中任何两个向量都是共面的.

### 2.2 向量的加法

给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$,将它们的起点平移到同一个点 $O$,它们的终点分别设为 $A$ 和 $B$,则 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\beta}$.以 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 为邻边可构造一个平行四边形 $OBCA$.以 $O$ 为起点 $C$ 为终点的向量 $\boldsymbol{\gamma}=\overrightarrow{OC}$ 称为**向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和**,记为

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma},\quad \text{即}\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}.$$

这种确定两个向量的和的方法称为**平行四边形法则**(图 1-6(a)).

对给定的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$,如果将 $\boldsymbol{\beta}$ 平移,使其起点平移到 $\boldsymbol{\alpha}$ 的终点(图 1-6(b)),此时 $\boldsymbol{\beta}$ 的终点与用平行四边形法则确定的点 $C$ 重合,从而 $\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{AC}$,于是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和也为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$.这种确定两个向量的和的方法称为**三角形法则**.

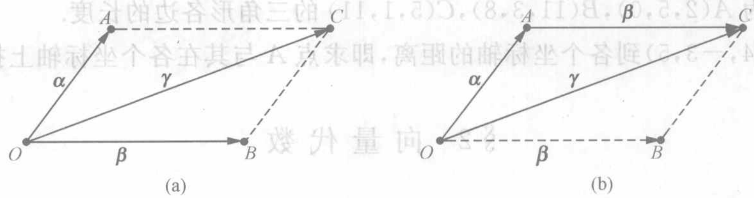


图 1-6

由于零向量的起点与终点重合,对于任何向量 $\boldsymbol{\alpha}$,根据三角形法则可以得到 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\alpha}$.

向量加法的逆运算称为**向量减法**.给定向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$,如果存在 $\boldsymbol{\gamma}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$,则称 $\boldsymbol{\gamma}$ 是**向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的差**,记为 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$.

如果设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\beta}$,由三角形法则可知 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$(图 1-7(a)),于是

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

也就是说,将 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的起点放在一起,则 $\boldsymbol{\beta}$ 的终点到 $\boldsymbol{\alpha}$ 的终点的向量即为 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$.

向量加法与减法的几何意义:$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 分别是以 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线(图 1-7(b)).

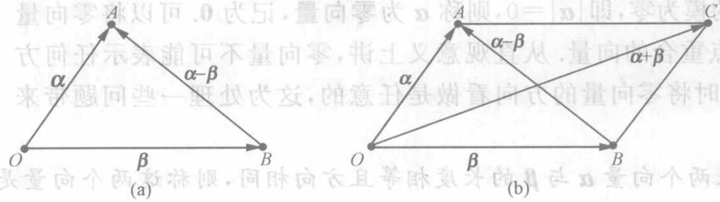


图 1-7

向量的加法满足我们熟知的加法运算的规律：

1) **交换律**：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.

如图 1-8，设 $OBCA$ 为平行四边形，并设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\beta}$，由向量相等的定义有

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\alpha},\quad \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\beta}.$$

由三角形法则可得

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$，即交换律成立.

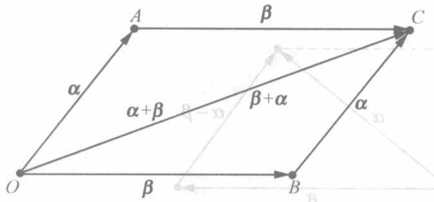


图 1-8

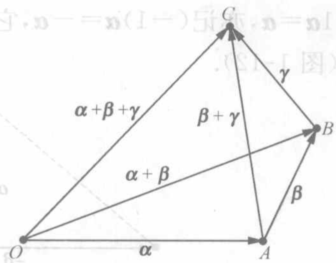


图 1-9

2) **结合律**：$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$.

如图 1-9，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\beta}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\gamma}$，由三角形法则可得

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

从而结合律成立.

当三个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 相加时，由于结合律与交换律成立，因此可以不考虑它们相加的次序而写为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$ 或 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}$ 或 $\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}$ 等.

两个向量相加的三角形法则可以推广到 $n$ 个向量相加. 设有 $n$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 相加，可以将 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的终点与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的起点相接，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的终点与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的起点相接，…，$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 的终点与 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 的起点相接，最后从 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的起点到 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 的终点的有向线段就是这 $n$ 个向量的和 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$.

图 1-10 是五个向量相加的示意图，从 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 开始，依次将它们首尾相接. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\overrightarrow{OA_1}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\overrightarrow{A_1A_2}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\overrightarrow{A_2A_3}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\overrightarrow{A_3A_4}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\overrightarrow{A_4A_5}$，可得到它们的和为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5\\&=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}\\&=\overrightarrow{OA_5}.\end{aligned}$$

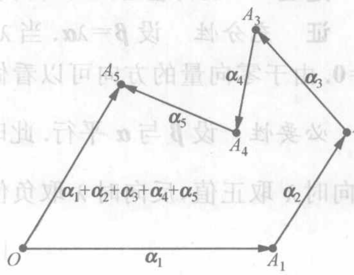


图 1-10

### 2.3 向量与数的乘法

**定义 2** 给定实数 $\lambda$ 及向量 $\boldsymbol{\alpha}$，规定 $\lambda$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**数量乘法** $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 是一个向量，它的大小规定为 $|\lambda\boldsymbol{\alpha}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{\alpha}|$；其方向规定为：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 的方向与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 的方向与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向相反.

在向量代数中，通常将实数称为数量，向量的数量乘法(简称为**数乘**)由此而得名.