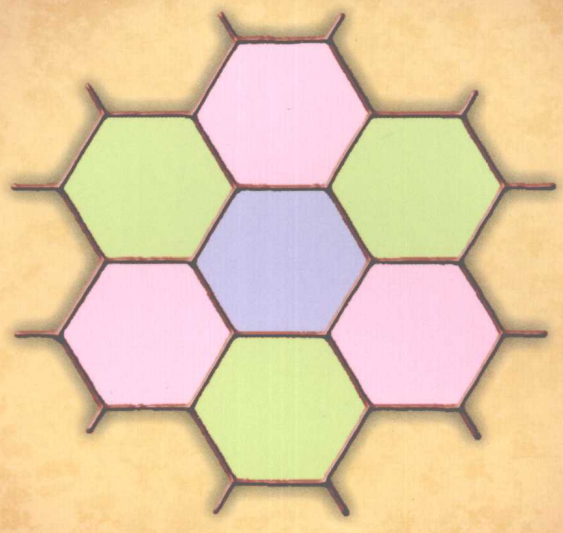
图灵数学·统计学丛书24



A Survey of Modern Algebra

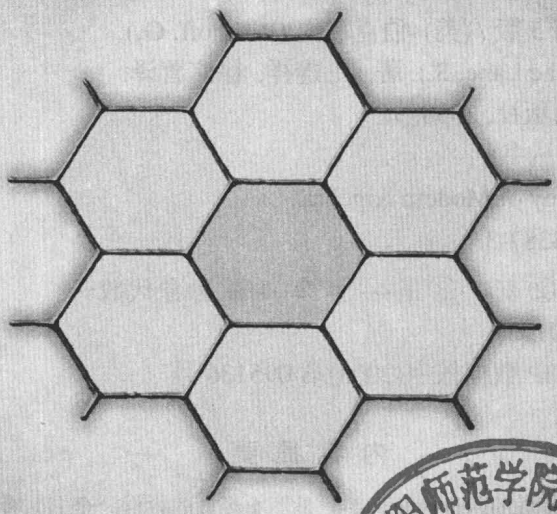
近世代数概论

（第5版）

[美] Garrett Birkhoff
Saunders Mac Lane 著
王连祥 徐广善 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书24



A Survey of Modern Algebra

近世代数概论

（第5版）

[美] Garrett Birkhoff
Saunders Mac Lane 著
王连祥 徐广善 译

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

近世代数概论：第5版 /(美) 伯克霍夫 (Birkhoff, G.),
(美) 麦克莱恩 (Mac Lane, S.) 著；王连祥，徐广善译.
北京：人民邮电出版社，2008.9
(图灵数学·统计学丛书)
书名原文：A Survey of Modern Algebra
ISBN 978-7-115-18387-3

Ⅰ.近… Ⅱ.①伯…②麦…③王…④徐… Ⅲ.抽象代数-高等学校-教材 Ⅳ.O153

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第095136号

内 容 提 要

本书出自近世代数领域的两位巨匠之手，是一本经典的教材. 全书共分为15章，内容包括：整数、有理数和域、多项式、实数、复数、群、向量与向量空间、矩阵代数、线性群、行列式与标准型、布尔代数与格、超限算术、环与理想、代数数域和伽罗瓦理论等.

本书适合数学专业及其他理工科专业高年级本科生和研究生使用，是一本非常有价值的教材和参考书.

图灵数学·统计学丛书

近世代数概论(第5版)

◆ 著 [美] Garrett Birkhoff Saunders Mac Lane
译 王连祥 徐广善
责任编辑 明永玲
◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街14号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址：http://www.ptpress.com.cn
北京铭成印刷有限公司印刷
◆ 开本：700×1000 1/16
印张：27
字数：544千字 2008年9月第1版
印数：1-3 000册 2008年9月北京第1次印刷

著作权合同登记号 图字：01-2007-3613号

ISBN 978-7-115-18387-3/O1

定价：69.00元

读者服务热线：(010)88593802 印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010)67171154

第 4 版前言

在本书第 1 版写完以来的 35 年间, 近世代数已成为全世界大学里的标准课程, 并且已有许多用于这门课程的教材. 尽管如此, 回顾一下我们在最初确定的基本指导思想 —— 也是现在这本书的基本指导思想 —— 看来是可取的.

"我们始终力求表达各种常用的定义的构思背景. 为此, 我们尽可能用较多的熟悉的例子说明每个新术语. 这在基础教材里特别重要, 因为它可以说明一切抽象概念都来源于对具体情况的分析.

"为了提高学生按照新概念独立思考的能力, 每个课题里我们都编入广泛多样的习题. 这些习题中, 一些用来计算, 一些用来进一步寻找新概念的例子, 另一些给出附加的理论推导. 后一种类型的习题对于学生熟悉正式证明的结构有重要的作用. 习题的选择使授课教师可根据情况取舍, 以适应大学本科生或一年级研究生不同程度的需要.

"近世代数也能够重新解释古典代数的结果, 使它们具有更大的统一性和一般性. 因此, 我们并不省略这些结果, 而努力把它们系统地编入近世代数的范围内.

"我们还力求不忽略如下事实: 对于许多学生来说, 代数学的意义在于它在其他领域的应用, 这些领域如高等分析、几何学、物理学和哲学等. 这使我们强调实数域和复数域、同抽象群相对照的变换群、对称矩阵及其对角化、正交群下和欧几里得群下的二次型分类, 并使我们最后加上布尔代数、格论和超限数的内容. 所有这些内容在数理逻辑和实函数近代理论中都很重要. "

详细地说, 我们的第 1 章至第 3 章介绍交换环中线性方程和多项式方程理论, 在强调普通的整数环、有理数域的同时, 还强调了模 n 整数环和相伴多项式环. 第 4 章至第 5 章叙述实数域和复数域的基本代数性质, 这对于几何学和物理学具有头等重要性.

第 6 章通过群这个最简单最基本的概念, 引进非交换代数. 在第 7 章至第 10 章里, 群的概念系统地用到向量空间和矩阵上. 这里注意, 代数学在欧几里得几何、仿射几何和射影几何中一直起着最显著最基础的作用. 还讨论了对偶空间和张量积, 但不考虑推广到环上加法群.

第 11 章对布尔代数和格论的介绍完全重写了, 后面第 12 章, 是有关超限数的简短讨论. 最后的三章介绍了一般交换代数和算术: 理想和商环、域的扩张、代数数及其因子分解以及伽罗瓦理论.

许多章是相互独立的. 例如, 群论一章可以紧接第 1 章之后介绍, 而关于理想和

本书第 5 版是在 1977 年 Macmillan 出版的第 4 版基础上修订而成, 保留了第 4 版序, 未加新序.

—— 编者注

域的内容 (13.1 节和 14.1 节) 可以直接在向量空间后来研究.

这种独立性是为了使这本书既适用于只具备中学代数知识的学生的全年课程, 又适用于各式各样的短期课程. 例如介绍线性代数的一学期或小学期的课程, 可以以第 6 章至第 10 章为基础, 实数域和复数域是要强调的. 关于抽象代数的一学期课程, 可以安排第 1 章至第 3 章、第 6 章至第 8 章、第 11 章、第 13 章和第 14 章. 还可以有其他安排.

我们希望本书不仅继续作为教材, 而且为那些想要把近世代数的基本概念用于数学的其他分支 (包括统计学和计算), 用于物理学、化学和工程技术的读者作为方便的参考书.

在此愉快地向 C. 贝尔、A. A. 波恩涅、E. 阿廷、F. A. 菲肯、J. S. 弗雷姆、N. 雅各布森、W. 莱顿、G. 梅里曼、D. D. 米勒、I. 尼文以及许多其他朋友和同事致谢, 他们提供了有益的建议和改进. 另外还要感谢 S. 麦克莱恩夫人, 前三版中她做了许多事务性工作.

G. 伯克霍夫　于麻省剑桥
S. 麦克莱恩　于伊利诺伊芝加哥

目　录

第1章 整 数

1.1 交换环 · 整环

近世代数第一次揭示了数学系统的多变性和丰富性. 我们将构造并研究许多这样的系统, 但是它们中最基本的是最古老的数学系统 —— 由所有正整数(全体) 组成的系统. 与其有关的, 稍大一点的系统是由所有整数 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ 组成的集合 $\mathbf{Z}$. 因为它与近世代数中的其他系统极为相似, 所以我们的讨论就从它开始.

整数具有许多有趣的代数性质. 在这一章里, 我们将假定一些像公设那样特别明显的性质, 并通过逻辑推理由它们导出许多别的性质.

我们首先假定加法和乘法的 8 个公设. 这些公设不仅对于整数成立, 而且对于许多其他数系都成立. 例如所有有理数 (分数)、所有实数 (无限小数) 和所有复数. 这些公设对于多项式和任意已知区间上的连续实函数也成立. 对于系统 R, 当这 8 个公设成立时, 我们称 R 为交换环.

定义 设 R 是由元素 $a, b, c, \cdots$ 组成的集合, 在 R 上定义了任意两个元素 a 与 b(不同或相同) 的和 $a+b$ 及积 ab. 如果下列公设 (i)~(viii) 成立, 那么 R 称为交换环:

(i) 封闭性. 若 a 与 b 在 R 中, 则和 $a+b$ 及积 ab 在 R 中.

(ii) 唯一性. 若 R 中 $a=a'$ 且 $b=b'$, 则

$$a+b=a'+b' \text{ 以及 } ab=a'b'.$$

(iii) 交换律. 对 R 中一切 a 与 b,

$$a+b=b+a, \qquad ab=ba.$$

(iv) 结合律. 对 R 中一切 a, b, c,

$$a+(b+c)=(a+b)+c, a(bc)=(ab)c.$$

(v) 分配律. 对 R 中一切 a, b, c,

$$a(b+c)=ab+ac.$$

(vi) 零. R 包含元素 0, 使得

$$a+0=a, \quad \text{对 } R \text{ 中一切 } a \text{ 成立.}$$

(vii) 单位元素. R 包含元素 $1 \neq 0$, 使得

$$a1 = a, \quad \text{对 } R \text{ 中一切 } a \text{ 成立.}$$

(viii) *加法逆元素*. 对 R 中每个 a, 方程

$$a + x = 0 \quad \text{在 } R \text{ 中有解 } x.$$

所有整数的集合 $\mathbf{Z}$ 满足这些公设, 这是我们熟知的, 例如, 交换律和结合律是这么熟悉, 以致在平常应用时无须明确提及它们, 就把 $a+b+c$ 表示相等的数 $a+(b+c)$ 和 $(a+b)+c$. (vi) 中指出的 0 的性质是数零的特性; 类似地, (vii) 中指出的 1 的性质是数 1 的特性. 因为这两个公设形式上是类似的, 所以我们可以说, 0 和 1 分别是加法和乘法的“单位元素”. (vii) 中的假定 $1 \neq 0$ 排除了平凡的情形 (否则, 交换环将是仅由整数 0 所组成的集合).

所有整数的系统 $\mathbf{Z}$ 具有另一个不能由上述公设推出的性质, 即若 $\mathbf{Z}$ 中 $c \neq 0$ 且 $ca = cb$, 则必有 $a = b$((ii) 中后一部分的逆性质). 但是交换环不一定都具有这个性质, 例如由已知区间上的全体实函数组成的集合, 虽然它们构成交换环, 但并不满足上述性质. 因此, 全体整数不仅构成交换环, 而且构成按下述意义定义的整环.

定义 *满足下面附加公设的交换环是整环*:

(ix) *消去律*. 若 $c \neq 0$, 且 $ca = cb$, 则 $a = b$.

整环$\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$. 由所有形为 $a + b\sqrt{2}$ 的数组成的整环是数论所感兴趣的, 这里 a 和 b 是普通整数 (在 $\mathbf{Z}$ 中). 在 $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ 中,$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ 当且仅当 $a = c, b = d$. 加法和乘法分别定义为

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2},$$

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

对于这些运算, 唯一性和交换律是容易验证的, 而 $0 + 0\sqrt{2}$ 相当于零, 并且 $1 + 0\sqrt{2}$ 相当于单位元素. $a + b\sqrt{2}$ 的加法逆元素是 $(-a) + (-b)\sqrt{2}$. 结合律和分配律的验证稍长一些, 消去律的验证将放到 1.2 节末尾.

1.2 交换环的基本性质

在初等代数中, 人们常常认为上述公设及其基本推论是理所当然的. 倘若对照特殊的例子检验代数运算时, 一般不会发生大的错误. 然而, 当我们想要得到对于整个代数系统都正确的结论时 (例如, 一般地, 对一切整环都成立), 必须多加小心. 我们必须确信, 所有证明只用到明显列出的公设和一般逻辑法则, 其中最基本的逻辑法则是相等关系的三个基本定律:

自反律 $a = a$.

对称律 若 $a=b$, 则 $b=a$.

传递律 若 $a=b$ 且 $b=c$, 则 $a=c$, 对一切 a, b 和 c 都成立.

现在我们列出几个在任意交换环 R 中都成立的法则, 并给出它们正式的证明.

法则 1 对 R 中一切 a,b,c, 有

$$(a+b)c=ac+bc.$$

这个法则可称为*右分配律*. 相对应地, 公设 (v) 是左分配律.

证明 对 R 中一切 a,b,c, 有

1° $(a+b)c=c(a+b)$ (乘法交换律),

2° $c(a+b)=ca+cb$ (分配律),

3° $(a+b)c=ca+cb$ ($1°, 2°$, 传递律),

4° $ca=ac, cb=bc$ (乘法交换律),

5° $ca+cb=ac+bc$ ($4°$, 加法唯一性),

6° $(a+b)c=ac+bc$ ($3°, 5°$, 传递律).

法则 2 对 R 中一切 $a, 0+a=a$, 且 $1\cdot a=a$.

证明 对 R 中一切 a, 有

1° $0+a=a+0$ (加法交换律),

2° $a+0=a$ (零的性质),

3° $0+a=a$ ($1°, 2°$, 传递律).

$1\cdot a=a$ 的证明类似.

法则 3 如果 R 中的 z 具有性质 "对 R 中一切 $a, a+z=a$", 那么 $z=0$.

这个法则表明, R 仅包含一个 0 元素, 它可以起加法单位元素的作用.

证明 因为 $a+z=a$ 对一切 a 都成立, 所以当 a 为 0 时等式也成立.

1° $0+z=0$,

2° $0=0+z$ ($1°$, 对称律),

3° $0+z=z$ (法则 2, 当 a 为 z),

4° $0=z$ ($2°, 3°$, 传递律).

在以后的这类证明中, 相等的对称律和传递律的反复运用, 我们都不必写出.

法则 4 对 R 中一切 a,b,c 成立:

$$\text{由 } a+b=a+c, \quad \text{可推出 } b=c.$$

这个法则称为加法消去律.

证明 根据公设 (viii), 对元素 a, 存在元素 x, 使 $a+x=0$. 因此

1° $x+a=a+x=0$ (加法交换律, 传递律),
2° $x=x, a+b=a+c$ (自反律, 假设),
3° $x+(a+b)=x+(a+c)$ (2°, 加法唯一性),
4° $b=0+b=(x+a)+b$
$=x+(a+b)=x+(a+c)$
$=(x+a)+c=0+c=c.$
(补上 4° 中每步的理由!)

法则 5 对每个 a, R 包含方程$a+x=0$ 的唯一解 x.

这个解通常用 $x=-a$ 表示. 因此这法则可被引述为 $a+(-a)=0$. 通常, 符号 $a-b$ 表示 $a+(-b)$.

证明 根据公设 (viii), 存在解 x. 如果 y 是第二个解, 那么根据传递律和对称律, $a+x=0=a+y$. 因此由法则 4, $x=y$. 证毕

法则 6 对 R 中给定的 a 和 b, 在 R 中存在唯一的 x, 使 $a+x=b$.

这个法则表明, 减法是可能的而且差是唯一的.

证明 取 $x=(-a)+b$. 则

$$a+x=a+[(-a)+b]=[a+(-a)]+b=0+b=b. \quad \text{(请给出理由!)}$$

如果 y 是第二个解, 那么根据传递律 $a+x=b=a+y$, 因为由法则 4, $x=y$. 证毕

法则 7 对 R 中一切 $a, a\cdot 0=0=0\cdot a$.

证明
1° $a=a, a+0=a$ (自反律, 公设 (vi)).
2° $a(a+0)=aa$ (1°, 乘法唯一性).
3° $aa+a\cdot 0=a(a+0)=aa$ (分配律等).
$=aa+0$
4° $a\cdot 0=0$ (3°, 法则 4).
5° $0\cdot a=a\cdot 0=0$ (乘法交换律, 4°).

法则 8 如果 R 中的 u 具有性质 "对 R 中一切 $a, au=a$", 那么 $u=1$.

这个法则表明乘法单位元素 1 的唯一性. 证明类似于法则 3, 留作习题.

法则 9 对 R 中一切 a 和 $b, (-a)(-b)=ab$.

这个法则的特殊情形是 "玄" 律 $(-1)(-1)=1$.

证明 考察三重和(结合律!)

1° $[ab+a(-b)]+(-a)(-b)=ab+[a(-b)+(-a)(-b)]$.

由分配律、$-a$ 的定义、法则 7 和公设 (vi) 得

2° $ab+[a(-b)+(-a)(-b)]=ab+[a+(-a)](-b)$
$=ab+0(-b)=ab.$

同理, 有

$$3^\circ\ \ [ab+a(-b)]+(-a)(-b)=a[b+(-b)]+(-a)(-b)$$
$$=a\cdot 0+(-a)(-b)=(-a)(-b).$$

因此, 根据相等的传递律和对称律, 从 1°, 2° 和 3° 得出结论. 证毕

其他各种简单而熟悉的法则, 都是我们公设的推论, 其中一些在下面习题中叙述.

另一个基本的代数定律在解二次方程时用到. 比如, 由 $(x+2)(x-3)=0$ 推出或者 $x+2=0$ 或者 $x-3=0$, 就用到这个定律, 它的一般形式就是断语:

$$若ab=0,则或者a=0或者b=0. \tag{1}$$

这个断语不是对一切交换环都成立的. 但是在任意整环 D 中, 根据消去律, 这个断语是正确的, 因为假设第一个因子不为零, 则 $ab=0=a\cdot 0$, 并且 a 可以消去, 因此 $b=0$. 反之, 在任意交换环 R 中, 从断语 (1) 可得到消去律, 因为如果 $a\neq 0, ab=ac$, 则有 $ab-ac=a(b-c)=0$, 由 (1) 得 $b-c=0$. 因此, 我们有

定理 1 *在交换环中, 乘法消去律等价于"非零因子之积不为零"这个命题.*

使乘积 $ab=0$ 的非零元素 a 和 b 有时称为"零因子", 因此, 交换环 R 中的消去律等价于"R 不包含零因子".

定理 1 可以用来证明 1.1 节末尾定义的整环 $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ 的消去律, 如下所述. 假定 $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ 包含零因子, 使

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}=0.$$

由定义可推出 $ac+2bd=0, ad+bc=0$. 用 d 乘第一个等式, 用 c 乘第二个等式, 而后相减, 得到 $b(2d^2-c^2)=0$, 所以或者 $b=0$, 或者 $c^2=2d^2$. 如果 $b=0$, 则上述两个方程给出 $ac=ad=0$, 因此, 根据定理 1, 不是 $a=0$ 就是 $c=d=0$. 但是第一种情形 $a=0$ 意味着 $a+b\sqrt{2}=0$(因为 $b=0$); 第二种情形意味着 $c+d\sqrt{2}=0$, 所以这两种情形中, 都没有零因子.

现在余下 $c^2=2d^2$ 的情形, 这意味着 $\sqrt{2}=\dfrac{c}{d}$ 是有理数, 这是不可能的, 在 3.7 节定理 10 中将给出它的证明.

如果承认 $\sqrt{2}$ 是实数, 而且承认所有实数的集合构成整环, 那么借助于下面子整环的概念可以非常容易地证明 $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ 是整环.

定义 *整环 D 的子整环是 D 的子集, 它对于同一种加法和乘法运算也是整环.*

显然, 子集 S 是子整环的充分必要条件是: S 包含 0 和 1; S 包含其中任意元素 a 的加法逆元素; S 包含其中任意两个元素 a 与 b 的和 $a+b$ 及积 ab.

习 题

对 1 ~ 5 中的每个习题给出完整的证明, 在证每一步时可用公设、前一步的结果、正文中已建立的法则或者已经作过的练习.

1. 证明下列法则在任意整环中都成立:
   (a) $(a+b)(c+d)=(ac+bc)+(ad+bd)$,
   (b) $a+[b+(c+d)]=(a+b)+(c+d)=[(a+b)+c]+d$,
   (c) $a+(b+c)=(c+a)+b$,
   (d) $a(bc)=c(ab)$,
   (e) $a[b+(c+d)]=(ab+ac)+ad$,
   (f) $a(b+c)d=(ab)d+a(cd)$.
2. (a) 证明法则 8. (b) 证明 1·1=1.
   (c) 证明整环中仅有的幂等元素(即满足 $xx=x$ 的元素 x) 是 0 和 1.
3. 证明下列法则对任意整环中的 $-a$ 都成立:
   (a) $-(-a)=a$, (b) $-0=0$,
   (c) $-(a+b)=(-a)+(-b)$, (d) $-a=(-1)a$,
   (e) $(-a)b=a(-b)=-(ab)$.
4. 由习题 3(d) 和特殊情形 $(-1)(-1)=1$ 证明法则 9.
5. 证明在任意整环中下列法则对于运算 $a-b=a+(-b)$ 都成立:
   (a) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$,
   (b) $(a-b)-(c-d)=(a+d)-(b+c)$,
   (c) $(a-b)(c-d)=(ac+bd)-(ad+bc)$,
   (d) $a-b=c-d$ 当且仅当 $a+d=b+c$,
   (e) $(a-b)c=ac-bc$.
6. 下列实数的集合是整环吗? 为什么?
   (a) 所有偶数. (b) 所有奇数. (c) 所有正整数.
   (d) 所有实数 $a+b\sqrt[4]{5}$, 这里 a 和 b 为整数.
   (e) 所有实数 $a+b\sqrt[4]{9}$, 这里 a 和 b 为整数.
   (f) 所有分母为 2 的幂或 1 的有理数.
7. (a) 证明: 仅由 0 和 1 组成的系统在通常的加法和乘法 (1+1=0(而不是 2) 除外) 运算之下是一个整环.
   (b) 证明: 在仅由 0 组成的系统中定义 0+0=0·0=0, 则除了 (vii) 中的条件 $0\neq1$ 外, 它满足整环的所有公设.
8. (a) 证明: 如果代数系统 S 满足整环的一切公设, (vii) 中的条件 $0\neq1$ 可能除外, 那么, S 或者是整环, 或者是仅由 0 组成的系统 (如习题 7(b) 中所描述的).
   (b) 在法则 1~9 的证明中用到条件 $0\neq1$ 吗?
9. 假定按通常定义任意两个整数的和, 而任意两个整数的积定义为零. 在这两种运算之下, 整环的公设中哪一些还仍然满足?

10. 找出两个函数 $f \neq 0$ 和 $g \neq 0$ 满足 $fg \equiv 0$.

1.3 有序整环的性质

因为所有普通整数的环 $\mathbf{Z}$ 在数学中起着独特的作用, 因此我们将研究它的特殊性质, 乘法交换律和消去律仅仅是其中两个. 许多其他性质都来源于整数有可能被排成通常的次序

$$\cdots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$$

这个次序常用关系 $a < b$ 来表达, 这里断语 "$a < b$" (a 小于 b) 意味着, 在上面所排的次序中, 整数 a 位于整数 b 的左边. 关系 $a < b$ 成立当且仅当差 $b - a$ 为正整数, 从而关系 $a < b$ 的每个性质可由正整数集合的性质导出. 因此我们假设正整数 $1, 2, 3, \cdots$ 的集合的下列三个性质作为公设.

加法律 两个正整数的和是正整数.

乘法律 两个正整数的积是正整数.

三分律 对于已知整数 a, 下面三种情况中有一个且仅有一个成立: 或者 a 为正整数, 或者 $a = 0$, 或者 $-a$ 为正整数.

顺便说一下, 在这些性质以及它们的推论中, 把 "正整数" 换成 "正有理数" 或 "正实数" 仍然成立. 为方便起见, 把包含具有这些性质的正元素的整环称为有序整环.

定义 *如果整环 D 中存在某些被称为正元素的元素, 它们满足类似于上面对整数指出的加法、乘法和三分律三个公设, 那么称 D 为有序整环.*

定理 2 *在任意有序整环中, 一切非零元素的平方都是正的.*

证明 设 a^2 已知, $a \neq 0$. 根据三分律, 或者 a 是正的, 或者 $-a$ 是正的. 在第一种情形中, 由正元素的乘法律知, a^2 是正的; 在第二种情形中, $-a$ 是正的, 因此根据 1.2 节的法则 9, $a^2 = (-a)^2 > 0$. 证毕

由此推出 $1 = 1^2$ 总是正的.

定义 *在有序整环中, $a < b$(读作 "a 小于 b") 和 $b > a$("b 大于 a") 这两个等价的说法都意味着 $b - a$ 是正的. 还有, $a \leqslant b$ 的意思是 $a < b$ 或者 $a = b$.*

根据这个定义, 正元素 a 现在可以描述为大于零的元素 a. 元素 $b < 0$ 称为负元素. 从上面的定义, 我们能推出关系 "小于" 的几个熟悉的性质.

传递律 若 $a < b$ 且 $b < c$, 则 $a < c$.

证明 根据定义, 由假设 $a < b$ 和 $b < c$ 可推出 $b - a$ 和 $c - b$ 是正的. 因此由加法律, 其和 $(b - a) + (c - b) = c - a$ 是正的, 这意味着 $a < c$.

正元素的三个基本公设对应着不等式的三个相应的性质.

不等式两边同时加上一元素 若 $a<b$, 则 $a+c<b+c$.

不等式两边同时乘以一正元素 若 $a<b$ 且 $c>0$, 则 $ac<bc$.

三分律 对任意 a 和 b, 三个关系式 $a<b, a=b$ 和 $a>b$ 中有一个且仅有一个成立.

作为例子, 我们证明第二个性质, 即一个不等式两边乘以正元素 c, 不等式仍然成立. 这结论要求我们证明 $bc-ac=(b-a)c$(参看 1.2 节的习题 5(e)) 是正的. 而这是乘法公设的直接推论, 因为根据假设, 因子 $b-a$ 和 c 都是正的. 类似地, 我们可以证明, 不等式两边乘以负元素时, 不等式反向 (参看下面的习题 1(c)).

定义 *在有序整环中, 当元素 a 为 0 时, 它的绝对值 $|a|$ 是 0; 否则 $|a|$ 是元素对 $a,-a$ 中的正元素.*

这个定义可以改述为

$$|a|=a, \quad 当a\geqslant 0; \qquad |a|=-a, \quad 当a<0. \tag{2}$$

适当地分这两种情形考虑, 我们可以证明和的绝对值与积的绝对值的定律:

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|, \quad |ab|=|a||b|. \tag{3}$$

和的绝对值的定律也可以这样得到: 根据定义, 我们有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a| \quad 且 \quad -|b|\leqslant b\leqslant |b|,$$

因此, 把不等式相加可得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|.$$

这立即表明, $a+b$ 不论是正的还是负的, 它的绝对值不能超过 $|a|+|b|$.

习 题

1. 从有序整环公设推导下列法则:
   (a) 若 $a<b$, 则 $a+c<b+c$, 反之亦真.
   (b) $a-x<a-y$ 当且仅当 $x>y$.
   (c) 若 $a<0$, 则 $ax>ay$ 当且仅当 $x<y$.
   (d) 若 $c>0$ 且 $ac<bc$, 则 $a<b$.
   (e) 若 $x+x+x+x=0$, 则 $x=0$
   (f) 若 $a<b$, 则 $a^3<b^3$.
   (g) 若 $c\geqslant 0$, 则由 $a\geqslant b$ 可推出 $ac\geqslant bc$.
2. 证明: 方程 $x^2+1=0$ 在有序数环中无解.

3. 尽你的可能, 证明一些关于关系 $a \leqslant b$ 的定律.
4. 证明: 在任意有序整环中, $||a|-|b|| \leqslant |a-b|$.

*5. [①]证明: 在任意有序数环中, 由 $a^7 = b^7$ 可推出 $a = b$.

*6. 证明: 在任意有序整环中, 对一切 $a, b, a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$.

*7. 在整环 $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ 中定义正元素, 并证明加法、乘法和三分律三个公设成立.

*8. 设 D 为整环, 在 D 中定义了关系 $a < b$, 它满足正文中指出的传递律、不等式的加法和乘法原则以及三分律. 证明: 当适当地选择正元素的集合时, D 为有序整环.

*9. 详细证明: 有序整环的任一子整环为有序整环.

*10. 设 R 为任意交换环, 它包含一个满足加法、乘法和三分律三个公设的正元素的子集. 证明 R 是有序整环.(*提示*: 证明乘法消去律成立, 分四种情况讨论: $x > 0$ 且 $y > 0$, $x > 0$ 且 $-y > 0$, $-x > 0$ 且 $y > 0$, $-x > 0$ 且 $-y > 0$.)

1.4 良序原则

如果有序整环 (如实数系那样) 的子集 S 的每个非空子集都包含最小元素, 那么 S 称为*良序的*. 利用这个概念我们可以阐述整数的重要性质, 该性质在特征上不是代数的, 并且是其他数系所不具备的. 这就是

良序原则 全体正整数的集合是良序的.

换句话说, 正整数的任意非空集合C 必包含某最小元素 m, 使 C 中的 c 总有 $m \leqslant c$. 例如, 最小正偶数是 2.

为了说明这个原则的作用, 我们证明

定理 3 *0 和 1 之间没有整数.*

看一下全体整数的自然次序, 这马上就清楚了. 但是我们想要指出, 不看这个次序而从我们的假设出发也可以证明这个事实. 现在我们给出这个证明. 如果存在适合 $0 < c < 1$ 的任意整数 c, 那么所有这种整数的集合 C 是非空的. 根据良序原则, 这个集合中有最小整数 m, 并且 $0 < m < 1$. 当我们用正数 m 乘这个不等式两边时, 得到 $0 < m^2 < m$. 于是 m^2 是集合 C 中的另一整数, 它小于已假定的 C 中最小元素 m. 这个矛盾导出定理 3 成立.

定理 4 *如果正整数的一个集合 S 包含 1, 并且当它包含 n 时必包含 $n+1$, 那么集合 S 包含任意正整数.*

证明 只须证明, 由那些不含于 S 的正整数组成的集合 S' 是空的. 假设 S' 不是空的, 它将包含最小元素 m. 但根据假设 $m \neq 1$, 由此由定理 3, $m > 1$, 所以 $m - 1$ 是正的. 但是 $1 > 0, m - 1 < m$, 所以根据 m 的选择, $m - 1$ 将在 S 中. 根据假设得到 $(m-1)+1 = m$ 在 S 中. 这个矛盾使定理成立.

① 这里和后面较难的习题都打上了 * 号.