

高等学校教材

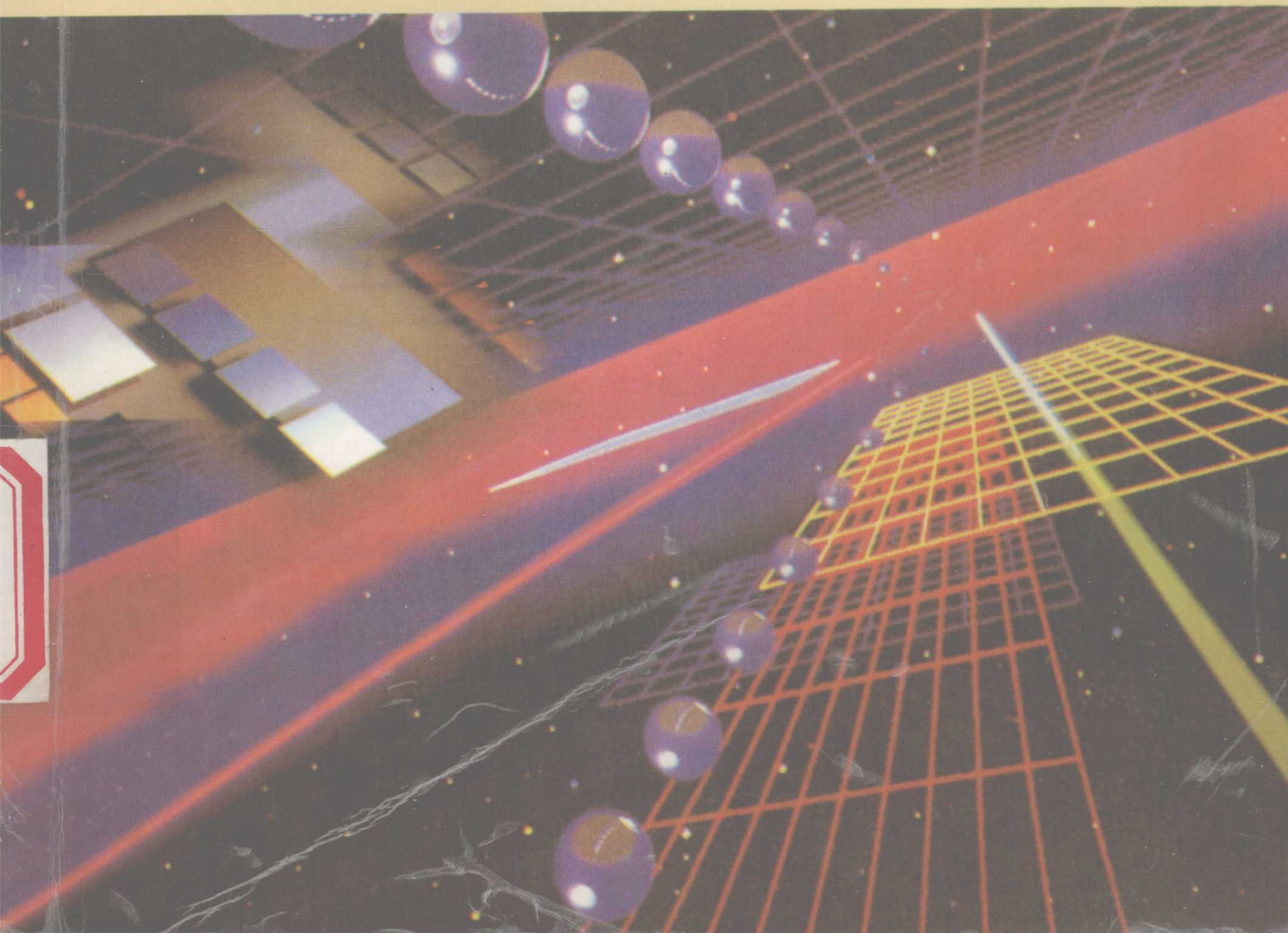
结构力学

(起重运输与工程机械专业用)

(第二版)

王重华 主编

沈为平 主审



99.3.25.36.4.1.0.4.3

高等学校教材

Jiegou Lixue

结 构 力 学

(起重运输与工程机械专业用)

(第二版)

王重华 主编

沈为平 主审

人民交通出版社

图书在版编目(CIP)数据

结构力学/王重华主编. —北京:人民交通出版社,
1998.2

ISBN 7-114-02739-7

I. 结… II. 王… III. 结构力学-高等学校-教材
IV. 0342

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第15930号

高等学校教材

结构力学

(起重运输与工程机械专业用)

(第二版)

王重华 主编

沈为平 主审

责任编辑:孙树征 版式设计:刘晓方 责任校对:张一荣

人民交通出版社出版

(100013 北京和平里东街10号)

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经销

北京京华印刷厂印刷

开本:787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张:16.25 字数:248千字

1998年2月 第1版

1998年2月 第1版 第1次印刷

印数:0001—4100册 定价:12.00元

ISBN 7-114-02739-7

TU·6066

内 容 提 要

本书是高等学校机械设计及制造(起重运输与工程机械)专业“结构力学”课程的教材。

全书共分八章。主要阐述结构的机动分析、静定结构的内力分析、结构位移的计算、超静定结构及力法计算、位移法、结构矩阵分析和结构动力计算。

本书除作为机械设计及制造(起重运输与工程机械)专业“结构力学”课程的教材外,也可供相近专业方向及有关工程技术人员参考。

前 言

本书是根据交通部教育司“九五”教材规划和 1996 年 10 月在上海召开的教材协作组会议审定通过的编写大纲,进行编写的。由于原武汉水运工程学院和上海海运学院联合编写、余崇义同志主编的《结构力学》出版已逾 10 年,随着科学技术的发展,相当部分的内容已偏陈旧,一些方法已经过时,应当将它们删除。同时,反映计算机应用和专业科技发展的知识需要加强和补充,才能跟上科技发展的步伐,适应“教育要面向 21 世纪”的任务。基于以上目的,我们对原书逐章进行重编,并增加了结构动力计算一章。

本书对基本理论的阐述力求做到深入浅出、简明扼要,对经典的结构分析理论在保持主干系统性的条件下尽量删减篇幅,突出了反映计算机应用的结构矩阵分析等内容。在内容安排中突出重点、强调应用,并注意结合专业实际。各章都有大量的例题和习题,以便于学习。

参加本书编写的有王重华(第一、二、三、五、七、八章),章一计(第四、六章)和陈自强(第八章部分),由王重华担任主编并统稿。上海交通大学沈为平教授担任主审。主审对本书提出许多宝贵的意见,在此表示深切的感谢。

限于编者的水平,书中难免存在不足之处,热忱欢迎批评指正。

编 者

1997 年 4 月

目 录

第一章 绪论	1
§ 1-1 结构力学的研究对象与任务	1
§ 1-2 结构力学发展简史	2
§ 1-3 结构的计算简图及其分类	2
第二章 体系的机动分析	6
§ 2-1 平面体系的自由度	6
§ 2-2 平面几何不变体系组成规律	8
§ 2-3 空间桁架的机动分析	13
习题	15
第三章 静定结构的内力分析	18
§ 3-1 静定平面桁架内力分析	18
§ 3-2 静定空间桁架内力分析	26
§ 3-3 静定平面刚架内力分析	29
§ 3-4 静定空间刚架内力分析	37
§ 3-5 静定结构的特性	39
习题	41
第四章 结构位移的计算	46
§ 4-1 概述	46
§ 4-2 实功和变形位能	47
§ 4-3 虚功和虚功原理	50
§ 4-4 载荷作用下的位移公式	51
§ 4-5 图乘法	57
§ 4-6 非载荷因素作用下的位移计算	61
§ 4-7 功的互等定理	66
习题	68
第五章 超静定结构及力法计算	71
§ 5-1 超静定结构和超静定次数	71
§ 5-2 力法的基本原理	73
§ 5-3 用力法解超静定结构	74
§ 5-4 结构对称性的利用	82
§ 5-5 由非载荷因素所引起的内力计算	85
§ 5-6 超静定结构位移计算及内力图的校核	87
§ 5-7 超静定结构的特性	90
习题	90

第六章 位移法 94

§ 6-1 位移法的基本概念 94

§ 6-2 等截面直杆的转角位移方程 95

§ 6-3 用位移法解超静定结构 99

§ 6-4 结构对称性的利用 101

习题 104

第七章 结构矩阵分析 107

§ 7-1 概述 107

§ 7-2 单元刚度矩阵 108

§ 7-3 单元刚度矩阵的坐标变换 112

§ 7-4 结构总刚度矩阵 114

§ 7-5 边界约束条件处理和结点位移计算 117

§ 7-6 非结点载荷的处理和杆端力、支座反力的计算 119

§ 7-7 程序框图和算例 121

§ 7-8 空间杆单元的刚度矩阵 125

习题 126

第八章 结构动力计算 128

§ 8-1 概述 128

§ 8-2 单自由度体系的自由振动 129

§ 8-3 不考虑阻尼作用时单自由度体系的受迫振动 133

§ 8-4 考虑阻尼作用时单自由度体系的受迫振动 137

§ 8-5 多自由度体系的自由振动 139

§ 8-6 主振型的正交性及其应用 142

§ 8-7 多自由度体系的受迫振动 144

§ 8-8 能量法的应用 147

§ 8-9 结构动力计算的矩阵分析方法 150

习题 153

参考文献 155

第一章 绪 论

§ 1-1 结构力学的研究对象与任务

一般工程技术中所指的结构是按一定规律组成并支承载荷而起骨架作用的体系。如门座起重机的臂架、转合和门座(图 1-1)等。

结构通常分为杆系结构、板壳结构和实体结构三大类。杆系结构由杆件所组成。杆件的几何特征是横截面尺寸要比长度小得多。板壳结构也叫做薄壁结构,由板或壳所组成。板和壳的几何特征是厚度要比长度和宽度小得多。实体结构是指长、宽、厚三个尺度大小相仿的结构。本书只研究杆系结构,所以,下文所提到的结构是狭义地指杆系结构。

材料力学主要研究单根杆件在载荷作用下的强度、刚度和稳定性。结构力学将着重研究由杆件组成的结构在载荷、温度变化

等因素作用下的强度、刚度和稳定性,以及结构的组成规律和合理形式。因此,结构力学与材料力学在内容上既有密切联系,又各有侧重。

起重运输机械和工程机械中的金属结构是整机的主要组成部分,其重量通常占整机的50%以上。合理地选择金属结构的结构形式,正确地确定构件尺寸,以便设计出既牢固可靠又轻巧省料的金属结构,对提高整机的质量和经济性具有重大的意义。为了正确地设计金属结构,就必须掌握结构的组成规律、结构在载荷作用下的内力、变形和稳定性的计算方法。也就是说,结构力学是设计金属结构所必须掌握的基本理论。

结构力学是起重运输机械和工程机械类专业的一门重要的技术基础课。不但要求牢固掌握结构力学的基本理论,同时还要通过大量习题,培养熟练的计算能力。

随着电子计算机的应用日益普及,当前结构分析广泛地采用矩阵方法和有限单元法,本书适当加强了结构矩阵分析的内容。另外,有关结构稳定性的内容在金属结构设计的专业课程中有专门论述,故本书中不再重复。

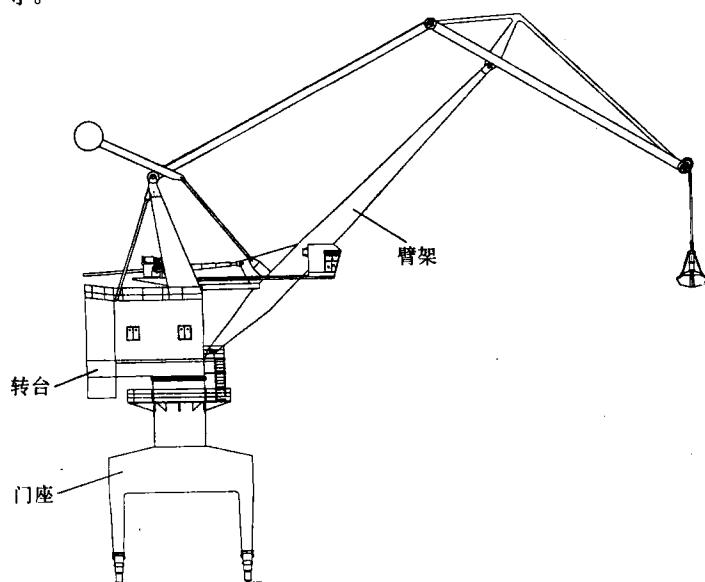


图 1-1

§ 1-2 结构力学发展简史

恩格斯在《自然辩证法》一书中指出：“科学的发生和发展一开始就是由生产决定的。”结构力学与其它科学一样，是随着人类历史的生产力的发展而发展起来的。人类的建筑实践为结构力学的建立与发展奠定了必要的基础。自 19 世纪 30 年代开始，由于资本主义的发展，需要建造许多现代化的工厂建筑物、铁路、大型的桥梁，促进了结构力学的建立和发展。以后，随着资本主义商业贸易的发展，需要先进的交通运输工具，因此结构力学在机械、造船和飞机制造中又得到进一步的应用和发展。

从 19 世纪中叶到 20 世纪初期，结构力学主要是研究梁、拱和桁架的计算理论。在本世纪 20~30 年代，比较集中地研究了刚架计算理论，它是伴随着大型工业建筑以及高层建筑的出现而建立起来的。在 40~50 年代则发展了板和壳的理论。薄壁杆件和空间结构等计算理论的创立和发展，是在造船工业和航空工业的发展推动下获得的。从 50 年代至今，结构矩阵分析和有限单元法等计算方法随着电子计算机的大量应用得到了迅速的发展，现在已形成了一门全新的力学分支——计算结构力学。同时，结构最优化设计理论也逐步建立和完善。

中国古代的劳动人民对建筑实践有极为辉煌的成就。如在秦代(公元前 221~前 206 年)就建造了四川灌县的都江堰。在隋朝(公元 581~618 年)，著名的工匠李春在河北赵县建造了形式优美的赵州安济桥。赵州桥是一座跨度 37m 的单跨石拱桥，比 19 世纪欧洲兴建的同类桥早了 1200 年。这些事实充分说明，我国古代人民对力学的发展作出了许多重大贡献。后来，由于长期的封建统治和帝国主义的侵略，使得我国在各个方面的发展受到了阻碍。新中国成立后，特别是党的十一届三中全会后，我国在结构力学方面取得了许多重大的发展，在一些领域已跻身世界先进行列。

§ 1-3 结构的计算简图及其分类

一、计算简图

当计算结构在载荷作用下发生内力变化和形变时，由于实际结构及其受力情况是很复杂的，要完全按实际情况进行计算是很困难的，有时甚至是不可能的。所以在计算中，总是把实际结构及其受力情况简化为既能正确地反映实际情况，又便于计算的力学模型，一般称该力学模型为计算简图。如图 1-2a)所示的一台龙门起重机的计算简图为图 1-2b)。

把实际结构及其受力情况简化为计算简图的工作一般包括三个方面，它们是结构的简化、支座的简化和载荷的简化。简化的原则是：

(1)尽可能反映结构的主要受力特征，使计算结果尽量精确，误差在工程设计允许的范围

内；

(2)确定的计算简图应尽量简单，以便于计算。

以上两点往往是矛盾的，但又必须同时兼顾。所以，在确定计算简图时要对整个结构的受力情况有个正确的了解，抓住问题的本质，分清主要和次要因素，略去某些次要因素而将反映问题本质的主要因素表达出来。有时，在结构设计不同阶段可采用不同的计算简图。比如在初步设计中，可以采用比较简单、但计算精度稍差的简图，而在其后的设计阶段采用较为复杂、计

算精度较高的计算简图。

二、结点和支座的简化

结构中各杆件相互连接处称为结点。在实际结构中结点本身往往是很复杂的,但在计算简图中通常简化为铰结点和刚结点两种。铰结点是指连接杆件的结点是光滑无摩擦的理想铰,各杆可绕此铰结点自由转动,杆件只能有轴向力,而无杆端弯矩。当然理想铰实际上是不存在的,但是因为桁架结构结点附近由于弯矩引起的应力比轴力引起的应力小得多,在一般情况下可忽略不计,因而通常将桁架结构中结点简化为铰结点。

刚结点是各杆件刚固地连接的点,各杆之间不能产生相对转角。各杆件不但有轴向力,还有杆端弯矩。

结构与基础或支承部分相连接的装置称为支座,支座对结构的支承作用力称为支座反力或约束反力。平面结构的计算简图中,根据反力的特性常把支座简化为四种型式:活动铰支座、固定铰支座、固定支座和定向支座。

1. 活动铰支座(图 1-3a)

允许结构绕铰支点转动,同时也可沿支承面(图中为水平面)移动,但不允许结构产生垂直支承面的位移。它只产生一个通过铰点与支承面相垂直的支座反力 V 。在计算简图中一般用一根链杆表示,如图 1-3b)所示。

2. 固定铰支座(图 1-4a)

只允许结构绕支点转动而不允许与支承面有相对位移。因此可以产生通过铰支点的任意方向的支反力,一般将其分解为相互垂直的两个方向的分为 H 和 V 。在计算简图中通常用两根链杆来表示,如图 1-4b)。

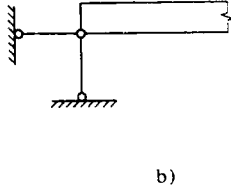
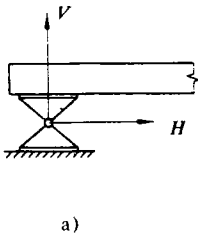
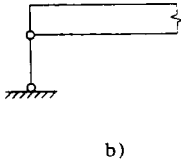
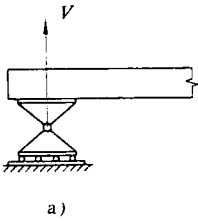


图 1-3

图 1-4

3. 固定支座(图 1-5a)

固定支座不允许结构在支座处有转动和移动,它可以产生三个约束反力 H 、 V 和 M 。在计算简图中如图 1-5a)或图 1-5b)所示。

4. 定向支座(图 1-6a)

定向支座只允许结构沿某一方向移动但不允许转动,它能产生垂直于移动方向的反力 V 和力矩 M 。在计算简图中通常用两根平行的链杆来表示,如图 1-6b)。

空间结构的支座型式就更多了,在计算简图中要根据其对结构的位移限制和支座反力的特性予以确定。

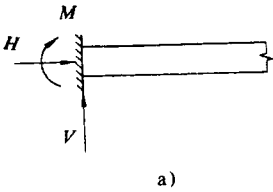


图 1-5

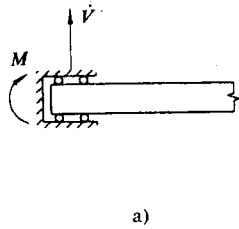
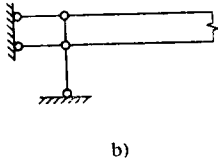
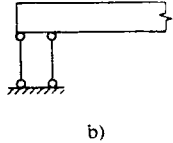


图 1-6



三、杆系结构的分类

杆系结构有多种分类方法。根据结构型式,可分为梁、刚架、桁架、拱和混合结构等类型。根据专业需要,本书主要介绍桁架结构、刚架结构和混合结构的内容。

1. 桁架结构

桁架是指各杆两端都是用铰连接的结构(图 1-7)。为了简化计算,一般在计算简图中采用下列假定:

- (1)桁架中各结点都是无摩擦的理想铰;
- (2)各杆的轴线都是直线并通过铰的中心;
- (3)载荷全部作用在结点上。

在符合上述假定的情况下,桁架各杆将只受轴力,其截面上的应力是均匀分布的,可以同时达到极限值,因而材料能得到充分利用。这与受弯构件相比,桁架的用料较省,在跨度较大时更是如此,因而应用较广。

实际桁架与上述假定是有差别的。实际桁架的结点都有较大的刚性,有些杆件在结点处是连续不断的,各杆的轴线也不一定全是直线,结点上各杆的轴线也不一定全交于一点,存在如杆件自重、风载荷等非结点载荷。因此,通常把按理想桁架算得的应力称为主应力,而把由于上述一些因素所产生的附加应力称为次应力。科学实验和工程实践证明,在一般情况下次应力的影响是不大的,可以忽略不计。

2. 刚架结构

刚架由受弯曲的杆件所组成,杆件之间多数为刚接(图 1-8)。结构受载时各杆件以弯曲变形为主。

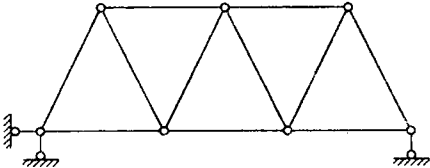


图 1-7



图 1-8

刚结点不允许杆件间有相对转动,因而在结点处杆件存在杆端弯矩。由于刚结点能承受弯矩,故刚架各杆件中的弯矩分布比较均匀,同时,保证刚架的几何形状不变所需的杆件数要比桁架少得多,且内部空间大,制造工艺性好,因而刚架结构在工程中得到广泛应用。

3. 混合结构

如图 1-9 所示,混合结构是由受弯曲杆件和受轴力杆件混合而成。因而是桁架和刚架的组合结构。

从几何空间角度来看,杆系结构可以分为平面结构和空间结构。如果组成结构的所有杆件的轴线均在一个平面内,同时载荷也处在该平面内,则称该结构为平面结构,否则就是空间结构。

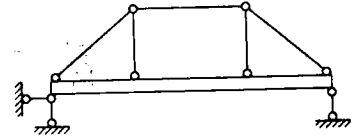


图 1-9

按计算方法的特征来分类,杆系结构又可分为静定结构和超静定结构。静定结构的全部支座反力和内力可以根据静力学平衡条件求出,而超静定结构具有多余的约束,除静力平衡条件外,还需要其它补充条件,才能求出其全部支座反力和内力。

四、载荷的分类

载荷是作用在结构上的外力,如起重机的吊重、结构的自重和风载荷等。载荷也可以从不同的角度进行分类。

1. 分布载荷与集中载荷

分布作用在结构上的载荷称为分布载荷,如结构自重和风载荷等。集中作用在结构某一点上的载荷称为集中载荷,如起重机的吊重等。

2. 静力载荷与动力载荷

静力载荷是载荷变化缓慢,不致使结构产生显著的加速度,因而可略去惯性力影响的载荷。动力载荷是载荷的变化迅速,作用于结构上将引起显著的冲击或振动,产生不容忽视的加速度,因而必须考虑惯性力影响的载荷。

3. 固定载荷与移动载荷。

作用位置在结构上固定不变的载荷称为固定载荷。作用点在结构上是可以移动的,则称为移动载荷。桥式起重机上移动小车及吊重就是移动载荷,而结构自重、固定在结构上的设备重量是固定载荷。

第二章 体系的机动分析

结构通常是由若干个杆件组成,但并不是无论怎样组成都能作为工程结构使用。如图 2-1a)所示体系,在任何载荷作用下,如果不考虑杆件材料的变形,其形状和位置均能保持不变,我们称这样的体系为几何不变体系。反之,如不能保持其形状和位置的不变,而发生机械运动,则称为几何可变体系,如图 2-1b)所示。显然,由于结构要起支承载荷的作用,所以结构必须是几何不变体系。

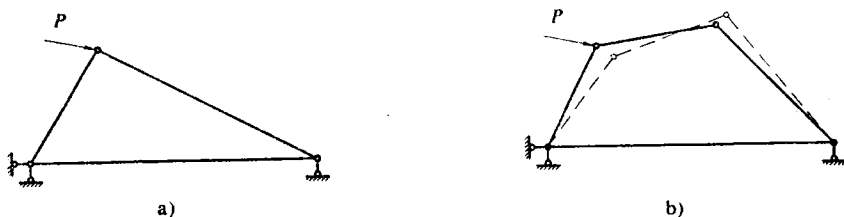


图 2-1

判别结构是否为几何不变体系,以及如何正确地组成结构,以保证其是几何不变体系的工作称为体系的机动分析或体系的几何组成分析。

§ 2-1 平面体系的自由度

要判断一个体系是否为几何不变体系,可首先计算该体系的自由度。一个体系的自由度就是该体系运动时可以独立变化的几何参数的数目,也就是确定该体系位置所需的独立参数的数目。

一个点在平面内运动时,其位置要用两个坐标 x 和 y 来确定(图 2-2a),所以一个点在平面内有两个自由度。平面内一个几何形状不变的刚体(简称刚片)在运动时,可以有三个独立变化的几何参数 x , y 和 φ (图 2-2b),因此一个刚片在平面内有三个自由度。

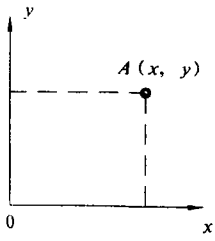
能使体系自由度减少的装置称为联系(又称约束)。能减少一个自由度的装置称为一个联系。由两个独立点 A 和 B 所组成的体系共有四个自由度(图 2-3a)。当用一根链杆把它们连接起来,其位置就只需用三个独立的几何参数 x_1 , y_1 和 φ (图 2-3b)来确定,这样,体系就从四个自由度降为三个自由度。所以一根链杆就是一个联系。

由 2 个独立的刚片组成的体系共有六个自由度。如图 2-4a)所示,用一个铰将它们连接起来,该体系自由度就减为四个。因此一个连接两个刚片的简单铰(简称单铰)是两个联系。连接三个刚片的铰(图 2-4b)能使体系减少四个自由度,所以它是四个联系,相当两个单铰。由此可见,连接 n 个刚片的复铰,其联系数相当 $(n-1)$ 个单铰。

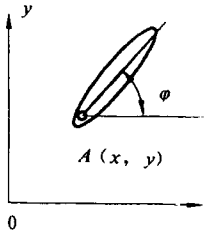
一个平面体系通常是由若干刚片彼此用铰相连,并用支座链杆与基础相连而成。体系的计算自由度 W 为:

$$W = 3m - 2h - r \quad (2-1)$$

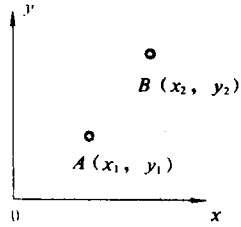
式中： m ——体系内刚片数；
 h ——体系内单铰数；
 r ——体系的支座链杆数。



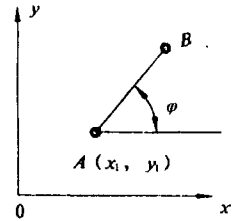
a)



b)



a)



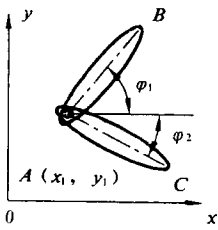
b)

图 2-2

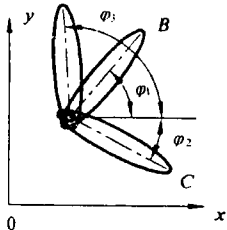
图 2-3

例如图 2-5 所示平面刚架,其刚片数 $m=4$,单铰数 $h=3$,支座链杆数 $r=6$ 。根据公式(2-1)可得体系的计算自由度为:

$$W=3m-2h-r=3\times 4-2\times 3-6=0$$



a)



b)

图 2-4

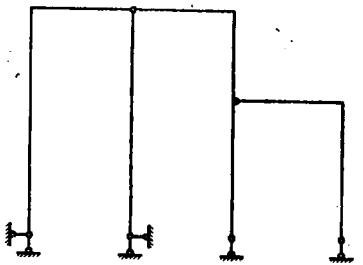


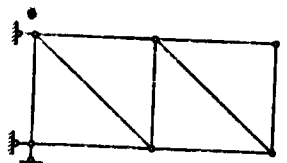
图 2-5

在算单铰数 h 时要注意不能把刚片与支座链杆相连接的铰计算进去,更不能把支座链杆与基础连接的铰算进去。分析复铰时应根据它所连接的刚片数来确定它相当 n 个单铰。

如果体系是平面桁架结构,用公式(2-1)来计算体系的自由度是不方便的。如把结点看成是具有两个自由度的点,把杆件看成是连接各点的链杆,即看成是一个联系,这样计算平面桁架计算自由度的公式为:

$$W=2j-b-r \tag{2-2}$$

式中： j ——平面桁架的结点数；
 b ——平面桁架的内部链杆数；
 r ——平面桁架的支座链杆数。

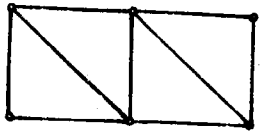


a)

例如图 2-6a)所示平面桁架,其结点数 $j=6$,内部链杆数 $b=9$,支座链杆数 $r=3$ 。它的计算自由度为:

$$W=2j-b-r=2\times 6-9-3=0$$

当体系并不与基础相连接,即无支座链杆时, $r=0$ 。这时整个体系在平面内的整体自由度为 3,体系内各杆件之间的内部相对运动自由度(又称内部可变量) V 的计算公式为:



b)

图 2-6

$$V=3m-2h-3 \tag{2-3}$$

或

$$V=2j-b-3 \tag{2-4}$$

如图 2-6b) 所示桁架, 其计算内部可变量为:

$$V = 2j - b - 3 = 2 \times 6 - 9 - 3 = 0$$

§ 2-2 平面几何不变体系组成规律

从几何不变体系的定义可知, 几何不变体系必须是计算自由度 $W \leq 0$ 的体系, 体系的计算自由度 $W > 0$ 表征体系几何可动。但是体系的计算自由度 $W \leq 0$ 并不能保证体系一定是几何不变。如图 2-7 所示的两个平面桁架, 计算自由度均等于零。但很明显, 图 2-7a) 桁架为几何不变体系, 而 2-7b) 桁架则是几何可变体系。为什么一个计算自由度为零的体系而又几何可变, 即该体系实际存在自由度? 这是由于一个联系只具有使体系减少一个自由度的可能, 如不能合理布置, 不一定能使体系减少一个自由度。如图 2-7b) 中两斜杆由于安排不当, 没能使体系减少两个自由度, 因而该体系虽然计算自由度 $W = 0$, 而体系的实际自由度为 1。所以用公式 (2-1) 和 (2-2) 计算出来的自由度称为计算自由度, 以区别实际的自由度。

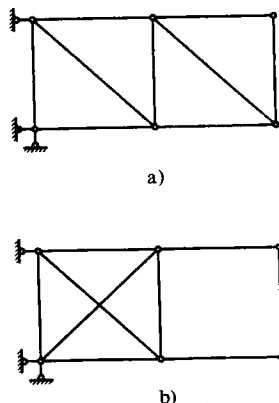


图 2-7

由此可见, 体系的计算自由度 $W \leq 0$ 只是体系几何不变的必要条件, 而不是充分条件。同样, 体系的计算内部可变量 $V \leq 0$ 也不一定就能保证体系内部几何不变, 即保持体系内各杆件之间没有相对运动。要完全判别体系的几何不变性, 还要进一步研究几何不变体系的组成规律。

一、二元体规律

如图 2-8 所示, 在一个刚片上增加两根不在一直线上的链杆 AB 和 BC , 两杆在 C 点用铰相连。这种用两根不在一直线上的链杆连接一个新结点的构造称为二元体。

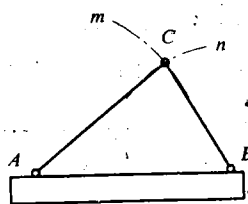


图 2-8

假设刚片固定不动。结点 C 如果只受链杆 AC 约束, 可沿圆弧 m 运动; 如果只受链杆 BC 约束, 则可沿圆弧 n 运动。现结点同时受两根链杆约束, 则它只有一个确定的位置无法移动。所以该体系是内部几何不变体系。这样, 二元体规律可表达为: 一个刚片和一个结点用不在一直线上的两根链杆相连接, 则组成一个内部几何不变体系。如果该刚片或两根链杆中的一根能保证体系位置不变, 则该体系为几何不变体系。

二元体规律表明, 一个内部几何不变体系加上一个二元体, 所组成的新体系仍是内部几何不变体系。反之, 将一个体系拆去一个二元体, 如果所得体系是一个内部几何不变体系, 则原体系也一定是内部几何不变体系。

用二元体规律对桁架进行机动分析是很方便的。如图 2-9 所示桁架, 以铰接三角形 1-2-3 为基础。由于它由三根支座链杆支承, 很容易看出是一个几何不变体系。在其上加一个二元体 1-4-3, 所组成的新体系 1-2-3-4 仍是一个几何不变体系。再加一个二元体 2-5-3, 所组成的新体系 1-4-3-5-2 还是一个几何不变体系。以此类推……, 最后可得图示桁架是一个几何不变体系。反过来进行也可以, 将图 2-9 所示桁架拆去二元体 10-13-11, 不影响体系的几何不变或几何可变。再拆去二元体 11-12-9, ……。最后得到被支承在三根支座链杆上的铰接三角形 1-3-2。由

于这是一个几何不变体系,根据二元体规律原桁架也一定是一个几何不变体系。

特别注意二元体规律规定两根链杆不在一直线上。如果两根链杆在一直线上,如图 2-10a)所示,则结点 C 将可沿垂直方向作微小移动。但发生微小移动后,两根链杆将不在一条直线上,移动也就停止。这种在某一瞬时可以产生微小移动的体系称为瞬变体系。瞬变体系是几何可变体系的一种特殊形态,是不允许用于工程结构的。试以最简单的两链杆等长来分析。在 C 点作用一垂直力 P,两链杆将与水平线产生一很小倾角 θ 。取 C 点为隔离体,如图 2-10b)所示,由 C 点的平衡条件得:

$$P - 2N\sin\theta = 0$$

$$N = \frac{P}{2\sin\theta}$$

从上式可以看出:当 θ 很小时,杆件内力 N 将很大。这表明,如果工程结构采用瞬变体系,即使外载荷不大,也会产生很大的内力,从而导致结构的破坏。另外还应特别指出:工程结构不但允许采用瞬变结构,还应避免采用接近于瞬变的结构。

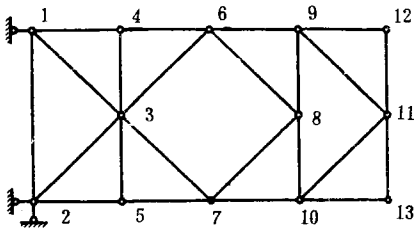


图 2-9

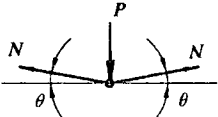
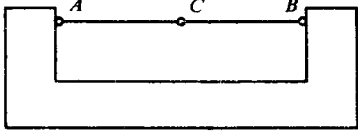


图 2-10

二、两刚片规律

若将图 2-8 所示的二元体中链杆 AC 看成刚片,如图 2-11 所示,则二元体规律演变成两刚片规律,即两个刚片用一个铰和一根不通过此铰的链杆相连接,则组成一个内部几何不变体系。如果两个刚片中的一个或该链杆能保证体系位置不变,则该体系为几何不变体系。

两个刚片用两根链杆相连接相当于用一个铰连接。如图 2-12 所示,设刚片②不动。当刚片①相对刚片②移动时,A 点将垂直于链杆 AB 运动,C 点将垂直于链杆 CD 运动。因而刚片①将绕着 AB 和 CD 延长线的交点 O 转动。由于这转动中心的位置是变化的,所以 O 点是两刚片相对运动的瞬心,相当于连接两刚片的一个虚铰。

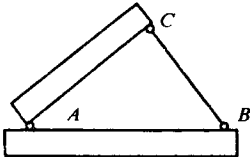


图 2-11

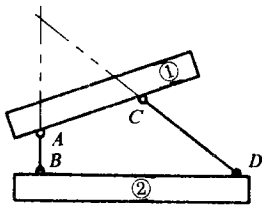


图 2-12

如果用虚铰代替实铰,即用三根链杆连接两刚片如图 2-13a)所示。可得两刚片规律的另一种形式:两个刚片用三根既不完全平行也不汇交于一点的链杆相连接,则组成内部几何不变体系。如果两个刚片中的一个能保证体系位置不变,则该体系为几何不变体系。

注意上述定义中的条件。因为三根链杆相交于一点,就意味着第三根链杆将通过前两根链杆所组成的虚铰,如图 2-13b)所示。三根平行的链杆相当于它们在无穷远处交于一点,如图 2-13c)所示,这都是瞬变体系。用三根平行且相等的链杆连接两刚片,则组成一个几何可变体系,

如图 2-13d)所示。

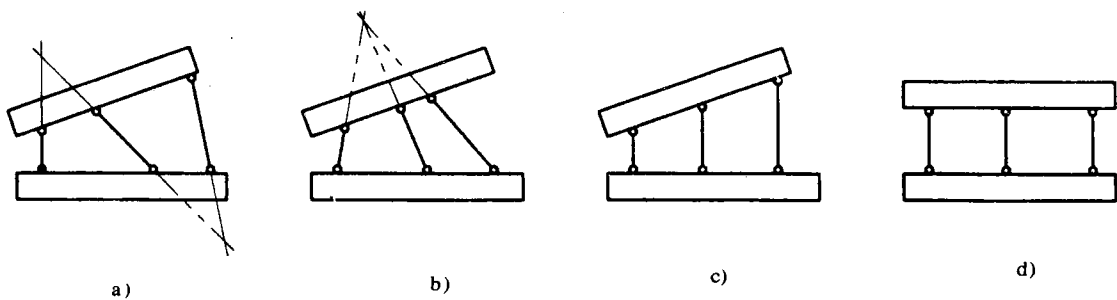


图 2-13

三、三刚片规律

如果将图 2-8 中二元体的 AC 和 BC 链杆都看作刚片,如图 2-14 所示。二元体规律就变成三刚片规律:三个刚片用三个铰两两相联,且三个铰不在一直线上,则组成一内部几何不变体系。如果三个刚片中的一个能保证体系位置不变,则该体系为几何不变体系。上述定义中两两相连就是每两个刚片均用一个单铰相连接。

上述几条规律虽然表达方式不同,但实质上是一致的:由不在一直线上的三个铰组成一个铰接三角形,构成一个内部几何不变体系。铰可以是实铰,也可以是由两根相交的链杆所组成的虚铰。

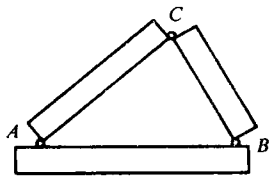


图 2-14

通过以上讨论,可以得出如下几点结论:

(1)若体系的计算自由度 $W > 0$,体系一定是几何可变的。

(2)若体系的计算自由度 $W = 0$,表明体系无多余的联系。它可能是几何不变体系,也可能是几何可变(或瞬变)体系,这要由机动分析来确定。

(3)若体系的计算自由度 $W < 0$,表明体系有多余的联系。它同样可能是几何不变体系,也可能是几何可变(或瞬变)体系,也要由机动分析来确定。

以上结论也适用于对体系内部几何不变的判别。

下面通过几个例题来说明如何灵活应用这几条规律来对结构进行机动分析。

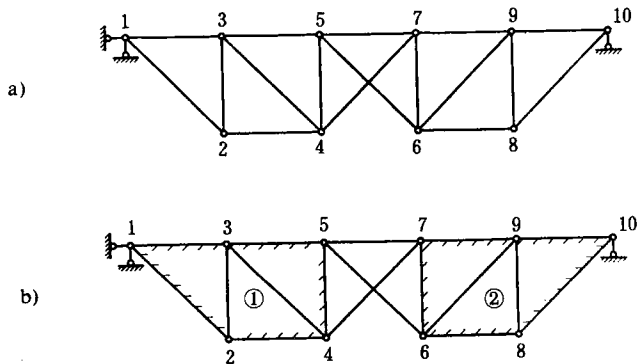


图 2-15

例 2-1 试对图 2-15a)所示桁架进行机动分析。

解:首先按公式(2-2)计算体系的计算自由度:

$$W = 2j - b - r = 2 \times 10 - 17 - 3 = 0$$

计算结果表明该体系具有几何不变所必需的联系数,但是否几何不变还必需进行几何组成分析。

根据二元体规律,可以组成刚片 1-2-4-5-3 和刚片 10-9-7-6-8。两刚片用三根不交于一点的杆 5-7、4-7、5-6

相连接。根据两刚片规律组成一个大刚片。此大刚片又以三根不交于一点的支座链杆与基础