普通高等教育
电气工程与自动化类
“十一五”规划教材

OPTIMAL CONTROL THEORY AND APPLICATION

最优控制理论与应用

吴受章　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育电气工程与自动化类“十一五”规划教材

最优控制理论与应用

吴受章　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是工科院校自动控制类各研究方向的硕士研究生和高年级本科生的“最优控制”课程教材。基本内容有：变分法、连续系统最优控制、线性连续系统的二次型调节器（LQR）、离散系统最优控制、最大值原理、动态规划。为配合上述六个基本内容，列举了两个应用实例，即 LQR 在电力系统中的应用、最小值原理在登月软着陆中的应用。本书内容适合于 40 学时的教学。

此外，本书还安排有最优控制的数值计算方法和奇异控制的内容，使读者对“最优控制”有完整的了解。

本书用 MATLAB 完成数值计算，并使用 MATLAB 的 Symbolic Math 工具箱（特别是用符号数学工具箱求取 TPBVP 的解析解）、Control System 工具箱和 Simulink（特别是用它对 Bang-Bang 控制完成仿真）等。

本书注重阐述思想和概念，演算明晰，力求流畅，以利阅读；部分章后附有课外阅读的参考文献、习题和上机安排。所以，本书不仅是硕士研究生和高年级本科生的教材，也可以作为自动控制技术人员的进修读物。

如果需要，读者可免费索取下列多媒体课件：“最优控制”讲授提纲、程序集、图集，联系方式：E-mail：wsz_1@mail.xjtu.edu.cn，wbj@mail.machineinfo.gov.cn。

图书在版编目（CIP）数据

最优控制理论与应用/吴受章编著．—北京：机械工业出版社，2008.1
普通高等教育电气工程与自动化类“十一五”规划教材
ISBN 978-7-111-23180-6

Ⅰ．最…　Ⅱ．吴…　Ⅲ．最佳控制—数学理论—高等学校—教材
Ⅳ．O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 206432 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：王保家　责任校对：张　媛
责任印制：杨　曦
北京机工印刷厂印刷（兴文装订厂装订）
2008 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm・16 印张・393 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-23180-6
定价：26.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639　88379641　88379643
编辑热线电话：（010）88379711

全国高等学校电气工程与自动化系列教材
编 审 委 员 会

序

随着科学技术的不断进步，电气工程与自动化技术正以令人瞩目的发展速度，改变着我国工业的整体面貌。同时，对社会的生产方式、人们的生活方式和思想观念也产生了重大的影响，并在现代化建设中发挥着越来越重要的作用。随着与信息科学、计算机科学和能源科学等相关学科的交叉融合，它正在向智能化、网络化和集成化的方向发展。

教育是培养人才和增强民族创新能力的基础，高等学校作为国家培养人才的主要基地，肩负着教书育人的神圣使命。在实际教学中，根据社会需求，构建具有时代特征、反映最新科技成果的知识体系是每个教育工作者义不容辞的光荣任务。

教书育人，教材先行。机械工业出版社几十年来出版了大量的电气工程与自动化类教材，有些教材十几年、几十年长盛不衰，有着很好的基础。为了适应我国目前高等学校电气工程与自动化类专业人才培养的需要，配合各高等学校的教学改革进程，满足不同类型、不同层次的学校在课程设置上的需求，由中国机械工业教育协会电气工程及自动化学科教育委员会、中国电工技术学会高校工业自动化教育专业委员会、机械工业出版社共同发起成立了“全国高等学校电气工程与自动化系列教材编审委员会”，组织出版新的电气工程与自动化类系列教材。这类教材基于**“加强基础，削枝强干，循序渐进，力求创新”**的原则，通过对传统课程内容的整合、交融和改革，以不同的模块组合来满足各类学校特色办学的需要。并力求做到：

1. 适用性：结合电气工程与自动化类专业的培养目标、专业定位，按技术基础课、专业基础课、专业课和教学实践等环节进行选材组稿。对有的具有特色的教材采取一纲多本的方法。注重课程之间的交叉与衔接，在满足系统性的前提下，尽量减少内容上的重复。

2. 示范性：力求教材中展现的教学理念、知识体系、知识点和实施方案在本领域中具有广泛的辐射性和示范性，代表并引导教学发展的趋势和方向。

3. 创新性：在教材编写中强调与时俱进，对原有的知识体系进行实质性的改革和发展，鼓励教材涵盖新体系、新内容、新技术，注重教学理论创新和实践创新，以适应新形势下的教学规律。

4. 权威性：本系列教材的编委由长期工作在教学第一线的知名教授和学者组成。他们知识渊博，经验丰富。组稿过程严谨细致，对书目确定、主编征集、资料申报和专家评审等都有明确的规范和要求，为确保教材的高质量提供了有

力保障。

此套教材的顺利出版，先后得到全国数十所高校相关领导的大力支持和广大骨干教师的积极参与，在此谨表示衷心的感谢，并欢迎广大师生提出宝贵的意见和建议。

此套教材的出版如能在转变教学思想、推动教学改革、更新专业知识体系、创造适应学生个性和多样化发展的学习环境、培养学生的创新能力等方面收到成效，我们将会感到莫大的欣慰。

全国高等学校电气工程与自动化系列教材编审委员会

汪槱生 陈伯时 郑大钟

前　　言

“最优控制”是控制类硕士研究生的重要课程之一，它的前继课程是：①大学阶段的“微积分”、“线性代数”、“自动控制原理”（含频域法及状态空间法）；②硕士研究生阶段的“线性系统理论”。有些硕士研究生已学过那些前继课程，但另有些硕士研究生却没有学过“线性系统理论”。对于后者，在学习“最优控制”时，应本着“边干边学”和“缺什么补什么”的原则，补充自己的“线性系统理论”知识，否则，时间上也不允许。

本书是为配合“最优控制”课程（40 学时）而写。与本书配套有：①最优控制讲授提纲；②程序集；③图集。这三者，如果读者需要，可免费索取。

“最优控制”讲授提纲用 PowerPoint 制成，无论是授课或学习皆宜。程序集与本书中程序相呼应，是为了免除读者的劳役而设立的。这些程序绝大部分是 M 文件，只有少数才是 M 函数文件与 M 脚本文件。这些 M 文件调入历史窗中，可供逐句调入指令窗观察运行。图集也是为了授课方便而设立的。

本书含有的六个基本内容不包含 H_∞ 控制（本书“尾声”中阐述了不宜把 H_∞ 控制挤入“最优控制”课程的理由）。

虽然同样含有六个基本内容，但使用 MATLAB 后，“最优控制”课程面貌改观了。一方面，理论、算法、计算融合为一体，不再是割裂的；另一方面，方便快捷的计算犹如手边增添了一具新的“计算器”。由 MATLAB 带给“最优控制”的新感觉，希望读者在授课或学习过程中好好地享用！

本书是工科院校自动控制各研究方向的研究生和高年级本科生的教材，也可以作为自动控制技术人员的进修读物。

笔　者

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
普通高等教育电气工程与自动化类“十一五”规划教材

书　名	主　编	
★电路基础	东南大学	黄学良
电路实验教程	燕山大学	毕卫红
工程电磁场基础及应用	山东大学	刘淑琴
数字电子技术	中国计量学院	王秀敏
电子技术实验	天津大学	王萍
★计算机软件技术基础	哈尔滨工程大学	李金
通信技术基础(非通信类)	重庆邮电大学	鲜继清
★微型计算机原理及应用	西安交通大学	张彦斌
计算机网络与通信	清华大学	张曾科
★自动控制理论	合肥工业大学	王孝武　方敏　葛锁良
★自动控制理论	西安理工大学	刘丁
★现代控制理论基础(第2版)	合肥工业大学	王孝武
现代控制理论	浙江大学	赵光宙
控制工程基础	浙江工业大学	王万良
信号分析与处理(第2版)	浙江大学	赵光宙
自动化概论	四川大学	赵曜
★电力电子技术(第5版)	西安交通大学	王兆安　刘进军
电力电子技术(少学时)	华南理工大学	张波
Power Electronics		吴斌
★电机及拖动基础(第4版)(上下册)	合肥工业大学	顾绳谷
电力拖动基础	四川大学	张代润
★电力拖动自动控制系统——运动控制系统(第4版)	上海大学	阮毅　陈伯时
电力拖动自动控制系统——运动控制系统(少学时)	上海海运大学	汤天浩
控制系统数字仿真与CAD(第2版)	哈尔滨工业大学	张晓华
★过程控制与自动化仪表(第2版)	西安理工大学	潘永湘

书　名	主　编	
过程控制与自动化仪表	浙江大学	张宏建
过程控制系统	华东理工大学	俞金寿
传感器与检测技术	清华大学	赵勇
自动检测技术与系统设计	东南大学	周杏鹏
计算机控制技术	沈阳大学	范立南
现场总线技术及应用	哈尔滨工业大学	佟为明
电磁兼容原理及应用	华中科技大学	熊蕊
★电气绝缘技术基础(第4版)	西安交通大学	曹晓珑
★电机学	重庆大学	韩力
电力工程基础	河海大学	鞠平
★供电技术(第4版)	西安理工大学	余健明
智能控制理论及应用	湖南大学	王耀南　孙炜
智能电器	大连理工大学	邹积岩
建筑智能化系统	东北大学	吴成东
控制电机	山东大学	李光友
智能机器人引论	中国科学技术大学	关胜晓
机器人引论	清华大学	张涛
嵌入式系统原理与应用	青岛大学	范延滨
数字图像处理与应用基础	西安理工大学	朱虹
电网络理论	浙江大学	周庭阳
非线性电路理论	北京机械工业学院	刘小河
非线性系统理论	上海大学	康惠骏
最优控制理论与应用	西安交通大学	吴受章
系统建模理论与方法	东南大学	夏安邦
高等数字信号处理	海军工程技术大学	吴正国
高等电力电子技术	合肥工业大学	张兴
现代电机控制技术	沈阳工业大学	王成元

1. 本套教材全部配有免费电子课件，欢迎选用本套教材的老师索取，索取邮箱：wbj@mail.machineinfo.gov.cn

2. 书名前标“★”号的为“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”

目　录

绪 论

0.1 从经典的反馈控制到最优控制

经典的反馈控制和最优控制都是自动控制理论的一个组成部分。自动控制理论关心自动控制系统的设计,即关心控制器的设计。所设计的自动控制系统都应有优良的暂态和稳态性能。但是,从经典的反馈控制到最优控制却经历了“改朝换代”。以下叙述经典的反馈控制和最优控制的发展背景和各自的特点,由此可清晰地把握其“改换”的脉络。

1. 经典的反馈控制

它以第二次世界大战的炮火控制为背景,到1950年左右已相当成熟。经典的反馈控制有下列特点:

1) 单输入-单输出(SISO)系统,用常系数(非时变)微分方程描写。于是,采用了传递函数,这是一种输入-输出描写,即外部描写。

2) 受控对象的传递函数 $G(s)$ 不宜复杂,阶数最好低些,才能便于自动控制系统的设计。

3) 建模要准确,不能有未建模动态,否则自动控制系统的设计结果将脱离实际。

4) 各种冲突的设计目标(像增益裕量与闭环带宽)不能太苛刻,否则达不到要求;而且,当年全凭设计师的经验,折中处理各种冲突的设计目标,花费时间和精力较多。由于全凭经验设计,所以设计结果必然因人而异。

5) 自动控制系统的设计只着重于静态与动态性能的好坏,完全不顾能量消耗问题。只要静态与动态性能好,即使是很大的能量消耗也舍得花。而能量消耗问题,要到自动控制系统的具体实现时才考虑。早年自动控制系统的设计不考虑能量消耗是件很普遍的事,但只有在钱学森著《工程控制论》中,曾明确地作为一个特点提出来。

6) 与传递函数 $G(s)$ 相应的频率特性 $G(j\omega)$ 很直观,又有物理意义。自动控制系统的设计结果无非是采用一些无源或有源校正网络,易于用模拟器件实现。

7) 依靠自动控制系统所固有的幅度裕量和相位裕量,可以在一定程度上承受对象的不确定性变化,即有一定的鲁棒性(Robustness)。

8) 在军事工业和一般工业中获得广泛的应用,甚至沿用至今。

2. 最优控制

它以20世纪60年代空间飞行器的制导为背景。在20世纪60年代初开始形成状态空间法,并发展出线性系统理论、最优控制、滤波与系统辨识。当年把这三者统称为现代控制理论。时至今日,所谓现代控制理论早已成为经典的内容,现代控制理论这一名称也早已废弃不用了。当年由于上述三个内容对空间飞行器的制导获得成功,所以各大学凡涉及自动控制的都设立了线性系统理论、最优控制、滤波与系统辨识三个内容的课程,供研究生学习。经久不变地设立这些课程,实际上认为这些课程是基础,有了它足以应对自动控制理论的千万种变化。

最优控制有下列特点：

1）多输入-多输出(MIMO)系统，用非时变及时变微分方程描写，但这种时变是已知的随时间变化。采用了状态向量方程，这是对系统的内部描写，比传递函数的输入-输出描写更深入了一步。

2）受控对象的状态向量方程的系数矩阵阶数不宜高，最好低些，才能便于自动控制系统的设计。

3）建模要准确，不能有未建模动态，否则自动控制系统的设计结果将脱离实际。

4）各种冲突的设计目标(像静态误差、动态误差、控制输入的能量消耗等)自动折中考虑；而且，全靠解析计算，不依赖于设计师的经验，所以设计结果不会因人而异。由于自动控制系统的设计以优化形式表达，所以，所谓设计就是求解优化问题，得出的设计结果是最优的或近似最优的。设计者在做完设计后，完全不必担心是否还有更好的设计结果存在(只要计算无误)。最优控制以优化的形式表达设计问题，并以解析计算组成设计步骤，不凭经验，不必反复试凑，使人们在沉闷的氛围中感受到清新的气息，人们开始认为设计工作的轻松和舒坦的日子终于来临了。最优控制采用优化、重视算法的风格为自动控制理论树立了榜样，并影响到随后的许多发展。

5）自动控制系统的设计不仅可以考虑静态与动态性能的好坏，还可以考虑能量消耗问题。换言之，自动控制系统的设计不仅仅是停留在信息流的层次上，而且还结合了能量消耗问题。

6）在时域中，状态反馈的通道数比输出反馈的通道数多；而且，如果曾经采用非异变换，就有可能使状态向量的某些分量在物理上并不存在，因此，状态反馈不如频域中的输出反馈那样直观。最优控制的设计结果以前用模拟器件实现，甚至构成专用的模拟计算机；现在可以改用数字计算机实现。

7）线性二次型调节器(LQR)的相位裕量至少有 60°，幅度裕量无限大(性能优异)。

8）在航空航天领域中应用很成功，甚至沿用至今。对于一般工业控制却不很成功，因为工业对象的数学模型都具有非线性，完全不像航空航天领域具有准确的线性模型，此外，工业控制对象所受的扰动未必是 Gauss 分布，因此，线性二次型 Gauss 控制(LQG)就不适用。

0.2 如何使用本书

最优控制有六个基本内容：①变分法；②连续系统最优控制；③线性连续系统的二次型调节器（LQR)；④离散系统最优控制；⑤最大值原理；⑥动态规划。控制工程界普遍认为，这六个基本内容对于教学是合适的。所以，本书遵循这一原则。本书前 6 章恰与这六个基本内容相匹配，第 9、10 章是这六个基本内容的辅助。这些内容适合于 40 学时的教学。

在过去不短的一个时期内，人们曾尝试对这六个基本内容增添些内容，以体现出发展与改革：虽曾尝试过增添静态优化，但并不成功；虽曾尝试过增添自适应控制，但并不成功；虽曾尝试过增添基于 H_∞ 的鲁棒控制，但并不成功。其增添的结果往往会出现两个极端：如果增添多了，会反客为主，或者本末倒置；如果增添少了，会感到像蜻蜓点水，太肤浅。总之，增添的结果是不伦不类，还不如不增添。所以，使用本书时，首先要静下心来，接受六个基本内容的框架。带 * 号的各章节，则在六个基本内容之外，但带 * 的章节维系着“最优

控制”课程的完整性。

最优控制的书藉很多，早年，最有影响力的书藉有三本：

M Athans，P L Falb. Optimal Control. McGraw - Hill，1966.

A E Bryson，Y C Ho. Applied Optimal Control. Blaisdell，Waltham，Mass.，1969.

A P Sage，C C White. Optimum Systems Control. Second Edition，Prentice - Hall，1979.

这三本书虽已没人用作教材，但仍有参考价值。本书是在学习这三本书的基础上，反映我国的教学内容。

在写作时，曾考虑过一些问题，可作为如何使用本书的说明：

1. 着重理论，也要有实际应用

最优控制是理论性课程，它介绍控制器设计，故数学的思考多于物理的思考。在介绍控制器设计时，尽量结合 MATLAB 的数值计算和符号计算，这是重视应用的一种表示；此外，列出了 LQR 的实际应用，列出了最大值原理的实际应用，这也是重视应用的一种表示。

这两种实际应用都是现役的，而这两种实际应用的场合都属“机要”性质。有些读者可能会由于不熟悉专业因此看不懂，这可能反而是件好事，它至少告诉我们实际应用会遇到各种困难。切莫“没有应用有意见，有应用还有意见”。

2. 推演仔细些，便于自学

对研究生的课堂讲授宜讲思想、宜讲思路，具体推演应自学。所以，推演过程以写仔细些为宜。本书是教材，即使是理所当然的运算，也不宜一跳好几步，为的是不要在这些简单问题上故弄玄虚，去浪费读者的时间。如果有读者讨厌这些推演，尽可越过，改为自己推演。但是，应该提倡：最终合上书，自己会推演。多年的经验告诉我们，凡能坚持这样做的，会有好的效果。切莫“讨厌教材的推演，自己也不愿推演”。

3. 关于作业

前 6 章有习题和编程，后续几章不重视习题和编程。此种安排的目的是：应开始转入文献阅读了。

4. 关于参考文献

学习最优控制或讲授最优控制的目的，不是为了死守这个地盘，应该把读者引向新的境界。所以，各章并未列出最优控制的参考文献，而列出克服最优控制缺点的参考文献（提倡去阅读）。

第1章 变分法

1.0 引言

变分法是一个古老的数学分支,其发展可追溯到17世纪末。而20世纪60年代初发展起来的最优控制正是利用了古老的变分法。变分问题的求解,有两条路可走:①把变分问题推演成微分方程的边值问题,然后求解;②直接求解变分问题。最优控制是走的第一条路。在数学中,第二条路也很有价值,因为常微分方程和偏微分方程的边值问题也很难解,所以,甚至有把微分方程的边值问题推演为变分问题,然后直接求解。本章仅介绍与最优控制密切相关的变分法内容,并且暂不联系最优控制,但其概念和推导将被第2章直接套用,足见本章的重要。

1.1 泛函

定义 1-1(泛函)

泛函是一映射 $J:D(J)\to K,D(J)\subset Y,Y$ 为向量空间,$D(J)$为 J 的域,K 为 R 或 C。

该定义说明泛函是一种变换,它把向量空间 Y 中某一子集 $D(J)$的元变换为标量 K(实数或复数)。R 为 real 的第一个字母的大写,C 为 complex 的第一个字母的大写。本书中仅用 R。

例 1-1 曲线的弧长(见图 1-1)。

在 xy 平面上 $A(x_0,y_0),B(x_1,y_1)$两点之间的弧长公式为

$$\widehat{AB}=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

通过 A,B 两点的函数若为 $y=f(x)$,则不同的函数有不同的弧长,即弧长是 y 的函数,记为 $J(y)$,即

$$\widehat{AB}=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=J(y)$$

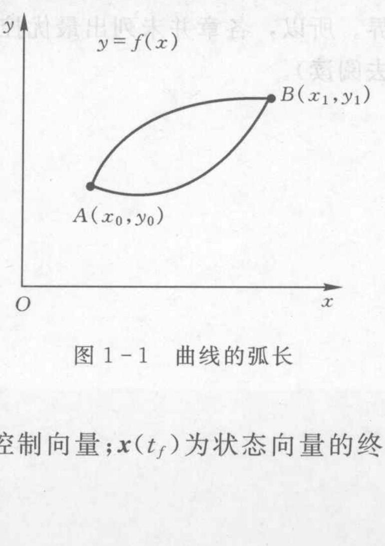

图 1-1 曲线的弧长

因此,求弧长的定积分是一种变换,它把 x 轴上沿 x_0、x_1 之间各点相应的 y 变换为标量(弧长)。由此例可看出定积分为泛函。

例 1-2 最优控制的目标函数。

以下各章经常要用下列形式的目标函数

$$J=\theta[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}\phi(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)\,\mathrm{d}t$$

式中,t 为时间;t_0 为始时;t_f 为终时;$\boldsymbol{x}(t)$为状态向量;$\boldsymbol{u}(t)$为控制向量;$\boldsymbol{x}(t_f)$为状态向量的终

态；θ 和 ϕ 都是标量函数。

上式中，第一项 θ 把向量 $\boldsymbol{x}(t_f)$ 及 t_f 变换为标量，的确为泛函（此外，θ 也只不过是普通的标量函数）；第二项定积分把 t 及向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{u}(t)$ 所构成的标量函数 ϕ 变换为标量，的确为泛函。第一项和第二项相加仍为泛函。因此，目标函数也有目标泛函之称。

定义 1-2（函数空间中的距离）

连续函数空间 $C[a,b]$ 是一种抽象空间，其中的每个抽象的点对应于连续函数所表示的一条曲线（C 为 continuous 的第一个字母；闭区间 $[a,b]$ 表示连续函数的定义域）。曲线间的距离如图 1-2 所示。在 $C[a,b]$ 空间中两点之间的距离定义为

$d_0=\max|F(x)-G(x)|$，d_0 称为零级距离；

$d_1=\max|F'(x)-G'(x)|$，$d=\max(d_0,d_1)$ 称为一级距离；

$d_2=\max|F''(x)-G''(x)|$，$d=\max(d_0,d_1,d_2)$ 称为二级距离；

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$d_n=\max|F^{(n)}(x)-G^{(n)}(x)|$，$d=\max(d_0,d_1,\cdots,d_n)$ 称为 n 级距离。

该定义说明在闭区间 $[a,b]$ 内，两条曲线纵坐标的差取绝对值（因距离总为正）。并从所有绝对值中找出最大的作为零级距离。如果零级距离小，表示两条曲线很靠近。但是零级距离小并不能保证两条曲线形状相同，因此还要看一阶导数，二阶导数，…，n 阶导数是否接近。由于一级距离是从 d_0，d_1 中取出最大的一个形成的，所以一级距离小就表示两条曲线的函数值很接近，一阶导数也很接近。对于二级距离，…，n 级距离的解释可以类推。

定义 1-3（n 级 ε 邻区和泛函的局部极值）

泛函求局部极值如图 1-3 所示。在图 1-3 中，以函数 $\hat{y}=\varphi(x)$ 为中心，由 $\varphi(x)+\varepsilon$ 和 $\varphi(x)-\varepsilon$ 构成的带状（ε 为无穷小），称为函数 $\hat{y}=\varphi(x)$ 的 ε 邻区。若另有一函数 $y=F(x)$，$\hat{y}$ 和 y 的零级距离落入 ε 邻区内，称该 ε 邻区为零级 ε 邻区。若 $\hat{y}$ 和 y 的一级距离落入 ε 邻区内，称该 ε 邻区为一级 ε 邻区。n 级 ε 邻区的定义可类推。

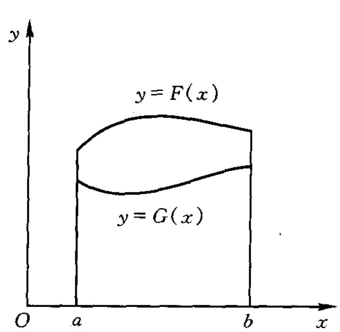

图 1-2　曲线间的距离

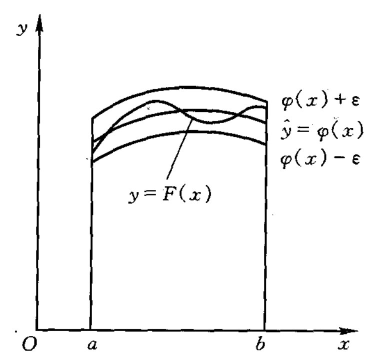

图 1-3　泛函求局部极值

所谓泛函求局部极值，通常就是指泛函求极值，它是：设存在极值曲线 $\hat{y}=\varphi(x)$，寻找 $y=F(x)$，使 y 落入 $\hat{y}$ 的 n 级 ε 邻区内，则 $y=F(x)$ 就是所求的极值曲线。该 y 可使泛函有局部极值。

该定义中，n 级 ε 邻区所指 n 取决于泛函表达式，若泛函含有 y 的 n 阶导数，则泛函求极值就要用 n 级 ε 邻区。该定义中，寻找 $y=F(x)$ 是在极值曲线 $\hat{y}=\varphi(x)$ 的 n 级 ε 邻区中进行的，

是与 $\hat{y}$ 的周围比较后获得的，故求得 $y=F(x)$ 是局部极值或称相对极值。另外要注意，泛函求极值是求 y，而不是求 $\hat{y}$；求得 y 后，即可得泛函的极值。

定义 1-4(泛函的全局极值)

设 $J(y)$ 为泛函，y 为规定的取值范围内可以取的曲线，简称可取曲线，$\hat{y}$ 为极值曲线。若 $J(\hat{y})>J(y)$ 则称泛函有全局极大，又称最大；若 $J(\hat{y})<J(y)$ 则称泛函有全局极小，又称最小。

该定义说明泛函的全局极大值存在的充要条件为 $J(\hat{y})-J(y)>0$；泛函的全局极小值存在的充要条件为 $J(\hat{y})-J(y)<0$。

1.2 变分的推演

泛函求极值

$$\min_y J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y(x),y'(x))\mathrm{d}x \tag{1-1}$$

式中，F 为 x，$y(x)$ 及 $y'(x)$ 的函数，即对高阶导数并未提出要求。虽然以下的推演可以推广到目标函数中具有高阶导数的情况，但在自动控制中都是用一阶的状态向量方程描写系统的，因此目标函数中通常不出现二阶以上的高阶导数(仅在混沌的最优控制中使用过含高阶导数的目标函数)。

设极值曲线为 $\hat{y}=\hat{y}(x)$，可取曲线为 $y=y(x)$。

若 $\hat{y}$ 和 y 的差用 η 表示，则 $\hat{y}(x)-y(x)=\eta(x)$，显然 η 是 x 的函数，因为不同 x 时 $\hat{y}$ 和 y 的差是不同的(当然也可以令 $y(x)-\hat{y}(x)=\eta(x)$，最后结果是一样的)。

移项，得 $\hat{y}=y+\eta$；

求导，得 $\hat{y}'=y'+\eta'$。

由式(1-1)得

$$\begin{aligned}J(\hat{y})-J(y)&=\int_{x_0}^{x_1}[F(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))-F(x,y(x),y'(x))]\mathrm{d}x\\&=\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y+\eta,y'+\eta')-F(x,y,y')]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1-2}$$

回顾多元函数的导数中值定理，若有函数 $F(x,y,z)$，而一阶偏导数 F_x，F_y，F_z 存在且连续，当自变量 x，y，z 各有增量 h，k，l 时，函数的增量为

$$\begin{aligned}F(x+h,y+k,z+l)-F(x,y,z)=&\,hF_x(x+\theta_1 h,y+\theta_2 k,z+\theta_3 l)+\\&\,kF_y(x+\theta_1 h,y+\theta_2 k,z+\theta_3 l)+\\&\,lF_z(x+\theta_1 h,y+\theta_2 k,z+\theta_3 l)\end{aligned} \tag{1-3}$$

式中，$0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$，$0<\theta_3<1$。

利用式(1-3)，得

$$\begin{aligned}F(x,y+\eta,y'+\eta')-F(x,y,y')=&\,\eta F_y(x,y+\theta_2\eta,y'+\theta_3\eta')+\\&\,\eta' F_{y'}(x,y+\theta_2\eta,y'+\theta_3\eta')\end{aligned} \tag{1-4}$$

式中，因 x 无增量，故缺一项。

为书写便利起见，令 $\overline{F}_y=F_y(x,y+\theta_2\eta,y'+\theta_3\eta')$，$\overline{F}_{y'}=F_{y'}(x,y+\theta_2\eta,y'+\theta_3\eta')$，代入式(1-4)，并代入式(1-2)，得