李群

▶ 邵丹 邵亮 郭紫 著

科学出版社
www.sciencep.com

李 群

邵丹 邵亮 郭紫 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书系统地论述了李群、李群的李代数、纤维丛和联络论及杨图理论.书中为所述内容提供了全面的论证、详细的运算和大量的实例，也为其在前沿领域中的应用做了准备. 全书结构严谨，自成体系，对与物理学关系密切的内容的论述尤为关注.

本书可作为大学物理系、数学系研究生的教材，也可供大专院校相关专业的师生及科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

李群/邵丹，邵亮，郭紫著. —北京：科学出版社，2008
ISBN 978-7-03-021182-8

I. 李… II. ①邵… ②邵… ③郭… III. 李群–研究
IV. 0152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 026250 号

责任编辑：鄢德平　张　静　杨　然 / 责任校对：张怡君
责任印制：赵德静 / 封面设计：王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2008 年 3 月第 一 版　开本：B5 (720×1000)
2008 年 3 月第一次印刷　印张：18
印数：1—3 000　字数：341 000

定价：48.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

前 言

本书以代数与几何相结合的方式，系统地论述李群及其李代数的内容，以及纤维丛和联络论，同时还介绍了杨图及其应用. 在研究李群的局部性质和李群的李代数的同时，对李群整体结构和拓扑性质也作了研究. 书中为基本内容提供了全面的论证、详细的运算和大量的实例，也为李群、李代数和纤维丛在物理学前沿领域中的应用做了充分的准备和介绍.

第 1 章是关于集合论、群、拓扑空间和流形等的基本知识. 第 2、3 章主要介绍李群并引入李群的李代数. 第 4 章主要用来证明李的三定理和叙述李的三定理的逆定理. 第 5 章研究群的表示理论. 第 6、7 章在前几章的基础上，专门用来阐述正交群、酉群、庞加莱群和洛伦兹群等. 第 8 章简要论述李代数的一般理论. 第 9 章用来论证半单李代数的构造和单李代数的分类. 第 10 章介绍了关于杨图的理论,同时借助杨图研究了群的张量表示理论. 第 11 章从最简单的纤维丛构造开始，阐述了纤维丛和联络论.

全书概念自成体系，结构严谨，论述详尽，在具有数学的完整性的同时，对与物理学关系密切的内容尽量地给予关注. 本书并不要求具备较多的预备知识，具有线性代数和数学分析基础知识的读者即可阅读. 书后备有索引，以便查阅. 本书初稿自 80 年代始在高校使用，现经整理出版.

对江汉大学、武汉科技大学的资助，深表谢忱!

邵丹　邵亮　郭紫
于武汉汤逊湖玉龙岛

主要符号表

一般符号:

$\simeq$	近似相等，同伦
$\cong$	同构
$\Rightarrow$	蕴含，推出
$\Leftrightarrow$	等价
$\forall$	对任一
$\exists$	存在
$\ni$	使得
$\mathbf{R}$	实数域，等
$\mathbf{C}$	复数域，等
1∶1	一一
$*$	复(数)共轭，对偶
A^*	矩阵 A 的复共轭
$\tilde{A}$	矩阵 A 的转置
$A^\dagger$	矩阵 A 的转置共轭
tr	取迹
G_e	群 G 的幺连通支

与流形 M 有关的:

F^t	M 上微分 t-形式的集合
F_p^t	点 $p\in M$ 的微分 t-形式的集合
T_p	点 $p\in M$ 的切矢量空间
T_p^*	点 $p\in M$ 的微分构成的与 T_p 对偶的线性空间
$\hat{\Theta}$	解析无穷小变换的集合

与李群 G 有关的:

$\mathscr{G}$	G 的李代数
$\mathscr{G}^*$	MC 形式的集合($\mathscr{G}$ 的对偶空间)
$\hat{\Theta}^*$	解析微分 1 形式的集合
L_a	$x\mapsto ax$ (左移动)
R_a	$x\mapsto xa$ (右移动)

目　录

第 1 章　群、拓扑空间与流形

1.1　集　　合

这里不准备专门论述关于集合的现代述说，而是由于本书的概念和理论系统将建筑在集合论的有关内容之上，因而把集合作为本书论述的开始.

1. 集合

集合是数学中的基本概念之一. 本书使用的集合(或集)是指满足某种条件的对象的全体. 例如：

自然数的全体；

实数的全体(记为 $\mathbf{R}$)；

复数的全体(记为 $\mathbf{C}$)；

开区间内点的全体(记为(a, b))；

闭区间内点的全体(记为$[a, b]$)；

某几何图形上点的全体；

n 维矢量空间中线性变换的全体；

实数域上 $m\times n$ 矩阵的全体；

复数域上 $n\times n$ 方阵的全体

等都是集合. 集合通常用大写字母表示. 集合中的对象称为集合中的**点**或**元素**，有时也简称为**元**，通常用小写字母表示.

设 A 为一个集合，若 a 是 A 的一个元素，记为 $a\in A$，读作 a 属于 A；若 a 不是 A 的元素，记为 $a\notin A$，读作 a 不属于 A. 为了表示集合 A 是由满足某种条件 P 的对象 a 构成的，并且是只由满足这种条件的对象构成，可采取记法：

$$A=\{a|条件\ P\}.$$

例如

$$A=\{a|a\ 是正整数\}$$

表示 A 是由正整数全体构成的集合.

当集合的元素可以具体写出来时，也可将该集合的元素写在花括号(或圆括号)之内，以表示这个集合. 例如

$$x=\{x^1,x^2,x^3,x^4\}$$

表示 x 是由 x^1，x^2，x^3，x^4 四个元素构成的集合. 也可将集合 x 简写成 $x=(x^i)$，$i=1,\cdots,4$.

2. 运算

集合 A 和 B 包含的元素相同时，记为 $A=B$.

集合 B 的每一元素都属于 A 时，B 称为 A 的**子集**(见图 1.1)，记为 $B\subset A$(或 $A\supset B$)，读作 B 包含于 A(或 A 包含 B).

定理 1.1.1　若 $B\subset A$，同时 $A\subset B$；则 $A=B$.

定义 1.1.1　既属于集合 A 又属于集合 B 的元素构成的集合，称为 A 和 B 的**交**，记为 $A\cap B$ (见图 1.2). 即 $A\cap B=\{a\,|\,a\in A,a\in B\}$.

定义 1.1.2　由集合 A 的所有元素和集合 B 的所有元素构成的集合，称为 A 和 B 的**并**，记为 $A\cup B$ (见图 1.3). 即 $A\cup B=\{a\,|\,a\in A$ 或 $a\in B\}$.

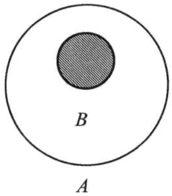

图 1.1

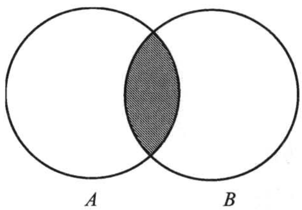

图 1.2

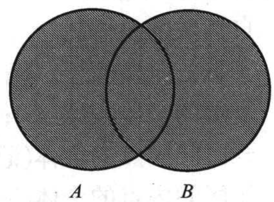

图 1.3

定义 1.1.3　设 A 和 B 是两个集合，由 A 的那些不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$(见图 1.4). 由于 $A-B$ 是 A 中除去 A 在 B 中的所有元素后，余下的元素形成的集合，因而 $A-B$ 也称为 B 关于 A 的**余集**. 即 $A-B=\{a\,|\,a\in A$ 且 $a\notin B\}$.

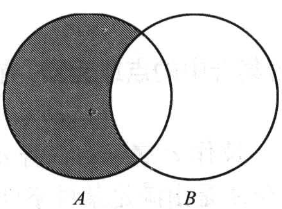

图 1.4

一个集合的元素可以是有限的，也可以是无限的. 元素是有限的集合，叫做**有限集**；元素是无限的集合，叫做**无限集**. 若一个集合只有一个元素，则称为**单元素集**. 一个集合也可以不含任何元素，这样的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$. 由数 0 形成的单元素集可记为 $\{0\}$，显然 $\{0\}$ 与空集 $\varnothing$ 是不同的两个集合. 如果集合 A 和 B 的交是个空集，即 $A\cup B=\varnothing$，则 A 和 B 不含有共同的元素，并称 A 和 B 为**非交的**.

定义 1.1.4　设 A 和 B 是两个集合，由所有的序偶 (a,b), $a\in A$，$b\in B$，所构成的集合称为 A 和 B 的**直积**或笛卡儿积，记为 $A\times B$. 即 $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A$ 且 $b\in B\}$.

例 1.1.1　令 $\mathbf{R}$ 为实数集合，$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 便是所有实数序偶 (a,b) 构成的集合

$\{(a,b)\mid a\in\mathbf{R}$ ，且 $b\in\mathbf{R}\}$ ； $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}$ 则是所有 n 个有次序的实数 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 构成的集合 $\{(a_i)\mid a_i\in\mathbf{R},i=1,\cdots,n\}$ ，称为 n 重数空间.

1.2 关系与映射

1. 关系

定义 1.2.1 设 A 和 B 为两个集合，S 为直积 $A\times B$ 的一个子集，则称 S 为 A 到 B 中的**关系**. 若 $(a,b)\in S$ ，则称 a 与 b 是 S-相关的，记为 aSb .

例 1.2.1 设 $A=(1,2,3,4,5)$，$B=(1,2,3,4)$，令

$$S=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B,a<b\}$$

$$=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}\ ,$$

则上述序偶的集合 S 是直积 $A\times B$ 的一个子集，S 是 A 到 B 中的一个关系，即小于关系. 当集合 $A=B$ 时，$S\subset A\times A$ ，此时 S 将成为 A 到 A 中的关系，称为 A 中的关系. $I=\{(a,a)\mid a\in A\}$ 称为**单位关系**；$0=\{\varnothing\mid\varnothing\subset A\times A\}$ ，称为**空关系**.

设 f 与 g 分别是 A 到 B 中与 B 到 C 中的关系，则 $g\circ f$ 是 A 到 C 中的**合成关系**.

若 f 与 g 都是 A 到 B 中的关系，且 $f\subset g$ ，则 f 称为 g 的**限制**，g 称为 f 的**延拓**.

关系是数学中经常使用的概念.例如，数的相等、大于或小于，图形的全等、相似，集合间的包含、对应等，这些都是关系. 下面介绍一种重要的关系(即等价关系)和等价类.

定义 1.2.2 若元素 $a,b,c,\cdots$ 构成的集合 A 中的关系 S 具有如下性质：

(1) 自反性：aSa ;

(2) 对称性：$aSb\Rightarrow bSa$;

(3) 传递性：aSb ，$bSc\Rightarrow aSc$,

则称 S 为 A 中的**等价关系**.

定义 1.2.3 若 S 是 A 中的等价关系，集合 A 的元素 a 的**等价类**是 A 的一个子集 $\{b\in A\mid bSa\}$ ，记为 $[a]$.

从该定义可知，相互等价的元素属于同一等价类，A 是各个等价类的一个非交集. 每一等价类可用一个元素代表.

这些等价类的集合通常用 A/S 表示，A/S 称作 A 关于等价关系 S 的**商集**.

例 1.2.2 令 $\mathbf{R}$ 为实数域，设 $a_0\in\mathbf{R}$ ，若 $a-a_0=\pm2\pi n$ ，$n=0,1,2,\cdots$ ；则可规定等价关系 $S:aSa_0$ ，从而得到等价类 $[a_0]=\{a\in\mathbf{R}\mid a\pm2\pi n=a_0\}$. 显然，等价

类$[a_0]$可看作圆周上的一点.

2. 映射

定义 1.2.4 若A和B是两个集合，如果存在一个A到B的关系f，使得任一元素$a \in A$，有一确定的元素$b \in B$与之相对应，则关系f叫做A到B中的**映射**，记为

$$f: A \to B,\ a \mapsto b \text{ 或 } A \xrightarrow{f} B,\ a \overset{f}{\mapsto} b.$$

例 1.2.3 令$A=(a,b,c)$，$B=(a',b',c',d')$. 若规定

$$f: a \mapsto a',\ b \mapsto b',\ c \mapsto a',$$

则f便是A到B中的一个映射.

例 1.2.4 令$A=B=(a,b,c)$，则

$$f: a \mapsto a,\ b \mapsto b,\ c \mapsto a$$

是A到B中的一个映射. 由于$A=B$，实际上f是A到A中的一个映射.

例 1.2.5 令$A=B$是全体自然数的集合，对于这一无限集，可规定如下一对应法则：

$$f: 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 6, \cdots, n \mapsto 2n, \cdots,$$

f便是自然数集合到其自身中的一个映射.

设f是集合A到B中的映射：

$$A \overset{f}{\mapsto} B, \quad a \overset{f}{\mapsto} b,$$

则b叫做a在映射f下的**象**，记为$f(a)=b$；a叫做b的**原象或逆象**. b的原象的全体叫做b在映射f下的原象，记为$f^{-}(b)$.

若$f(A)$是B的一个子集$\{f(a) \mid a \in A\}$，则称$f(A)$是A在映射f下的象，若$f^{-1}(B)$是A的一个子集$\{a \mid f(a) \in B\}$，则称$f^{-1}(B)$是B在映射f下的原象或逆象.

若对任一$b \in f(A)$，存在唯一的一个$a \in A$，使得$f(a)=b$，则f具有**逆映射**f^{-1}：

$$f(A) \overset{f^{-1}}{\mapsto} A, \quad b \overset{f^{-1}}{\mapsto} a = f^{-1}(b),$$

将这种映射f称为**一一映射或单射**.

若$f(A)=B$，则映射f称为**到上的映射**，即是A到B上的映射，也称为**满射**.

若映射f是一一和到上的，则f称为**双射**(或称为A与B间的**1∶1对应**).

例 1.2.6 前面例 1.2.3 至例 1.2.5 的三例中的映射都不是到上的. 例 1.2.3 和例 1.2.4 中的映射不是一一的. 如果将例 1.2.5 中的集合 B 改为自然数中的所有偶数的集合，则映射 f 将成为到上的.

例 1.2.7 若 $x \mapsto x^3$，$x \mapsto \exp x$，$x \mapsto x^3+x^2$，$x \mapsto \sin x$ 均为实数域 $\mathbf{R}$ 到实数域 $\mathbf{R}$ 中的映射，不难知道这些映射具有如下性质：

$x \mapsto x^3$ 是个双射；

$x \mapsto \exp x$ 是个一一的但不是到上的映射；

$x \mapsto x^3+x^2$ 是个到上的但不是一一的映射；

$x \mapsto \sin x$ 既不是到上的也不是一一的映射.

若 f 和 g 是集合 A 到 B 中的两个映射，如果 $\forall a \in A$，有 $f(a)=g(a)$，则称映射 f 和 g **相等**.

若 A、B、C 为三个集合，令 $a \in A$，$b \in B$，$c \in C$，且令 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$，$a \overset{f}{\mapsto} b \overset{g}{\mapsto} c$；则可写成

$$c=g(b)=g(f(a))=g \circ f(a),$$

这里 $g \circ f$ (或简写为 gf)称为映射 f 与 g 的**合成**或**积**(应注意二者的次序). 若 f、g 为两个任意映射，由它们构成的积通常并不具有交换性，即 $g \circ f \neq f \circ g$. 如果三个映射：$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$，$a \overset{f}{\mapsto} b \overset{g}{\mapsto} c \overset{h}{\mapsto} d$，不难证明它们具有结合性：

$$h \circ (g \circ f)=(h \circ g) \circ f.$$

若 f、g、h 是如下三个映射：

$$A \xrightarrow{f} B,\ B \xrightarrow{g} C,\ A \xrightarrow{h} C,$$

则可将如上映射关系画成如下面的三角图所示. 若三个映射满足 $h=g \circ f$，则这个图叫做**对易**的(或**交换**的).

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\ B \arrow[rr, "g"'] & & C \end{tikzcd}$$

若 f 和 g 是两个双射，可以证明，f 和 g 之积的逆具有下面的性质：

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

定义 1.2.5　集合 A 到自身上的任一双射叫做 A 的一个**变换**. 若 A 是个有限集，则 A 的变换称为 A 的**置换**.

若一映射将集合 A 的每一元素映射成该元素自身，则该映射称为 A 的**恒同映射**或**单位映射**.

集合 A 中任意元素 a 和集合 B 中任意元素 b，以一定法则与集 C 中的唯一元素 c 之间的对应关系称为**代数运算**，可以“$\circ$”记之，即 $a \circ b = c$. 当 $A = B$，$c \in A$ 时，则称 A 对运算“$\circ$”是**封闭**的；A 的任意三元素 a, b, c 满足等式 $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$，则称 A 对运算“$\circ$”是**结合**的；如果 $a \circ b = b \circ a$ 成立，则称 A 对运算“$\circ$”是**交换**的.

1.3　群

1. 群的定义

定义 1.3.1　群是一个定义了合成运算的集合 G，满足如下性质：

1) 封闭性

若 a，$b \in G$，由合成运算将规定一元素 $c = a \circ b \in G$（这里用“$\circ$”表示 G 的两元素的合成运算）. 由群的这一性质可知，集合 G 在合成运算下是封闭的. 封闭性可简写为

$$a \circ b \in G, \quad \forall a, b \in G.$$

2) 结合性

群元素的合成运算是可结合的. 即对任意的 $a, b, c \in G$，有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

结合性可简写成

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \quad \forall a, b, c \in G.$$

3) 单位元

存在 G 的一元素 e，称为 G 的单位元或恒元，使得对于所有的 $a \in G$，有

$$e \circ a = a \circ e = a.$$

这一性质，可写成

$$\exists e \in G, \ni e \circ a = a \circ e = a, \quad \forall a \in G.$$

4) 逆元

对每一元素 $a\in G$，存在一逆元素 $a^{-1}\in G$，使得

$$a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e.$$

这一性质可写成

$$\forall a\in G,\ \exists a^{-1}\in G,\ \ni a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e.$$

群元素的合成运算又称群的乘法或合成律. 对于具体的群，其乘法可以是通常的加法、乘法或矩阵乘法等. 表示群元素相乘的符号“∘”，通常可以省略.

若群的元素数目是有限的，则这种群称为**有限群**；如果元素数目是无限的，则这种群称为**无限群**.

有限群的元素数目叫做这个群的**阶**.

例 1.3.1

(1) 最简单的群是由一个元素构成的**平庸群**，这个元素即是单位元 e，单位元的逆元，是其自身；而且容易验证，由单位元 e 构成的集合也满足群的其他三个规则.

(2) 另一个简单的群是由两个元素构成的二阶有限群. 如，由数 1 和−1 在乘法下构成的群. 对于这个群，1 是其单位元；规定元素−1 的逆元仍是−1，可知这个由 1 和−1 构成的集合满足群的四个规则.

(3) 整数集合在加法下构成一个群，叫做**整数加(法)群**. 对于任意两个整数 a 和 b，$a+b$ 也是个整数，整数加法的结合律便是整数加群的结合性；整数零是单位元，即 $0+a=a+0=a$；对于任一整数 a，都存在一整数 $-a$，使得 $a+(-a)=-a+a=0$；所以整数集合将满足群的规则. 显然整数加群是个无限群.

然而正整数集合不能构成群. 因为这个集合中的元素不存在逆元素，同时也不存在单位元. 稍后将看到，正整数集合将构成一个半群.

(4) 容易看出，实数集合在加法下构成一个无限群. 复数集合在复数加法下也构成一个无限群. 它们分别称为**实数加群**和**复数加群**.

(5) 正实数集合在乘法下构成一个无限群，单位元是 1，任一正实数 a 的逆元为 $1/a$.

(6) 两个矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，在矩阵乘法下将构成一个二阶群.

(7) 复数 $1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}$ 在复数乘法下将构成一个四阶群.

(8) 所有 $n\times n$ 非奇异实方阵(即其行列式不为零)在矩阵乘法下构成一个无限群，叫做**一般线性群**，记为 $GL(n,R)$.

(9) 所有 $m\times n$ 矩阵在矩阵加法下构成一个无限群. 单位元是 $m\times n$ 零矩阵，元

素a的逆元为$-a$.

若群的任意两个元素相乘时，都是可对易的，即$\forall a$，$b\in G$，有$a\circ b=b\circ a$，则这种群叫做**交换群**或**可换群**，也称 Abel 群.

上述 9 个例子中，除例(8)外，其余都是交换群.

若集合A中定义了合成运算，但不能全部满足群的四个性质，而只能满足其中部分性质,则A将成为胚群、半群或广群. 群、胚群、半群和广群所满足的性质如表 1.1 所示.

表 1.1　群、胚群、半群和广群所满足的性质

	封闭性	结合性	单位元	逆　元
群	有	有	有	有
胚　群	有	有	有	
半　群	有	有		
广　群	有			

2. 群的共轭类

设a，b为群G的两个元素，若有一元素$g\in G$，使$a=gbg^{-1}$，则称a是b的**共轭元素**，或简称**共轭**. 这种运算叫做b在g下的**相似变换**. 显然，这里的共轭是群G中的一个关系.

共轭关系的性质：

(1) 任一元素是其自身的共轭：

$$a=eae^{-1}.$$

(2) 若a是b的共轭，则b是a的共轭：

$$a=gbg^{-1}\Rightarrow b=g^{-1}ag=(g^{-1})a(g^{-1})^{-1}.$$

(3) 若a是b的共轭，b是c的共轭，则a是c的共轭：

$$\left.\begin{aligned}a=gbg^{-1}\\ b=g'cg'^{-1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow a=(gg')c(g'^{-1})(g^{-1})=(gg')c(gg')^{-1}.$$

所以共轭是个等价关系.

这样，群G可按共轭关系划分成一些等价类，使每一等价类中的所有元素都是相互等价的，而不存在相互共轭又分别属于不同等价类的元素. 群G的这些等