

李 群

► 邵丹 邵亮 郭紫 著

 科学出版社
www.sciencep.com

0152.5/7

2008

李 群

邵丹 邵亮 郭紫 著

III

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书系统地论述了李群、李群的李代数、纤维丛和联络论及杨图理论. 书中为所述内容提供了全面的论证、详细的运算和大量的实例, 也为其在前沿领域中的应用做了准备. 全书结构严谨, 自成体系, 对与物理学关系密切的内容的论述尤为关注.

本书可作为大学物理系、数学系研究生的教材, 也可供大专院校相关专业的师生及科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

李群/邵丹, 邵亮, 郭紫著. —北京: 科学出版社, 2008
ISBN 978-7-03-021182-8

I. 李… II. ①邵… ②邵… ③郭… III. 李群-研究
IV. 0152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 026250 号

责任编辑: 鄢德平 张 静 杨 然 / 责任校对: 张怡君

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 3 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2008 年 3 月第一次印刷 印张: 18

印数: 1—3 000 字数: 341 000

定价: 48.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新欣〉)

前 言

本书以代数与几何相结合的方式,系统地论述李群及其李代数的内容,以及纤维丛和联络论,同时还介绍了杨图及其应用.在研究李群的局部性质和李群的李代数的同时,对李群整体结构和拓扑性质也作了研究.书中为基本内容提供了全面的论证、详细的运算和大量的实例,也为李群、李代数和纤维丛在物理学前沿领域中的应用做了充分的准备和介绍.

第1章是关于集合论、群、拓扑空间和流形等的基本知识.第2、3章主要介绍李群并引入李群的李代数.第4章主要用来证明李的三定理和叙述李的三定理的逆定理.第5章研究群的表示理论.第6、7章在前几章的基础上,专门用来阐述正交群、酉群、庞加莱群和洛伦兹群等.第8章简要论述李代数的一般理论.第9章用来论证半单李代数的构造和单李代数的分类.第10章介绍了关于杨图的理论,同时借助杨图研究了群的张量表示理论.第11章从最简单的纤维丛构造开始,阐述了纤维丛和联络论.

全书概念自成体系,结构严谨,论述详尽,在具有数学的完整性的同时,对与物理学关系密切的内容尽量地给予关注.本书并不要求具备较多的预备知识,具有线性代数和数学分析基础知识的读者即可阅读.书后备有索引,以便查阅.本书初稿自80年代始在高校使用,现经整理出版.

对江汉大学、武汉科技大学的资助,深表谢忱!

邵丹 邵亮 郭紫

于武汉汤逊湖玉龙岛

主要符号表

一般符号:

$\approx$	近似相等, 同伦
$\cong$	同构
$\Rightarrow$	蕴含, 推出
$\Leftrightarrow$	等价
$\forall$	对任一
$\exists$	存在
$\rightarrow$	使得
$\mathbf{R}$	实数域, 等
$\mathbf{C}$	复数域, 等
$1:1$	一一
$*$	复(数)共轭, 对偶
A^*	矩阵 A 的复共轭
$\tilde{A}$	矩阵 A 的转置
$A^\dagger$	矩阵 A 的转置共轭
tr	取迹
G_e	群 G 的么连通支

与流形 M 有关的:

F^t	M 上微分 t -形式的集合
F_p^t	点 $p \in M$ 的微分 t -形式的集合
T_p	点 $p \in M$ 的切矢量空间
T_p^*	点 $p \in M$ 的微分构成的与 T_p 对偶的线性空间
$\hat{\mathcal{O}}$	解析无穷小变换的集合

与李群 G 有关的:

$\mathcal{G}$	G 的李代数
$\mathcal{G}^*$	MC 形式的集合 ($\mathcal{G}$ 的对偶空间)
$\hat{\mathcal{O}}^*$	解析微分 1 形式的集合
L_a	$x \mapsto ax$ (左移动)
R_a	$x \mapsto xa$ (右移动)

目 录

前言

主要符号表

第 1 章 群、拓扑空间与流形	1
1.1 集合	1
1.2 关系与映射	3
1.3 群	6
1.4 置换群	10
1.5 线性空间	13
1.6 线性代数	14
1.7 拓扑空间与度量空间	17
1.8 连通性、紧致性与同伦	20
1.9 流形	22
1.10 流形上的矢量场和张量场	27
1.11 微分形式与外微分	31
1.12 映射的微分与子流形	32
1.13 伪黎曼流形	33
第 2 章 拓扑群与李群	36
2.1 拓扑群	36
2.2 连续变换群	38
2.3 连续变换群举例	39
2.4 连续群的拓扑性质与商群	42
2.5 李群	49
2.6 李变换群	52
2.7 李子群	53
2.8 经典线性群	54
第 3 章 李群的李代数	61
3.1 无穷小变换的交换子, 李代数	61
3.2 无穷小左右移动、李群的李代数	64
3.3 李群的生成元、构造常数及交换子	69
3.4 李群的几种生成元	72

3.5	$GL(n, \mathbf{R})$ 和 $GL(n, \mathbf{C})$ 的李代数	77
3.6	李子群的李子代数, 指数映射	78
3.7	经典线性群的李代数	85
第 4 章	李的基本定理	89
4.1	莫勒-嘉当形式	89
4.2	李的三定理	91
4.3	李的三定理的逆定理	94
4.4	通用覆盖群	95
第 5 章	群表示理论	99
5.1	一般概念	99
5.2	不变子空间和表示的可约性	102
5.3	群的几种表示	105
5.4	舒尔引理	109
5.5	正交性定理	111
5.6	表示的特征标	115
5.7	既约性的判别准则	117
5.8	物理系统的对称群与有限群表示一例	118
5.9	正则表示	123
5.10	群表示的直积	126
5.11	张量表示	127
5.12	李群的矢量表示	129
5.13	具有同构李代数的单连通李群和多连通李群的表示间的关系	131
第 6 章	正交群和酉群	133
6.1	参数李群生成元的另一种定义	133
6.2	转动群 $SO(2)$	134
6.3	转动群 $SO(3)$	138
6.4	正交群 $O(n)$	143
6.5	特殊酉群 $SU(2)$	145
6.6	$SU(2)$ 到 $SO(3)$ 上的同态	149
6.7	由 $SU(2)$ 的表示得到 $SO(3)$ 的表示	152
6.8	$SU(2)$ 表示的直积	154
6.9	酉群 $U(n)$ 和特殊酉群 $SU(n)$ 的生成元	155
6.10	李代数的直和与李群的直积	161
6.11	$SU(2)$ 和 $SU(3)$ 在物理学中的应用简例	166
第 7 章	洛伦兹群和庞加莱群	168

7.1	洛伦兹群 $O(3,1)$	168
7.2	相对论中的洛伦兹群及其拓扑结构.....	170
7.3	洛伦兹群的张量表示及其生成元的一般交换规则.....	175
7.4	$SL(2, \mathbb{C})$ 到 $O(3,1)_+^\uparrow$ 上的同态.....	178
7.5	庞加莱群 $IO(3,1)$	184
7.6	李群的并缩, 伽利略群.....	185
7.7	德西特群.....	188
第 8 章	李代数的一般理论.....	189
8.1	可解李群和可解李代数.....	189
8.2	单、半单李群和单、半单李代数.....	191
8.3	实李代数的复扩充.....	192
8.4	李代数的表示, 伴随表示.....	193
8.5	李代数基底的变换和卡西米尔算子.....	197
8.6	李代数的自同构与导子.....	200
8.7	几个有关定理.....	201
第 9 章	半单李代数和单李代数.....	204
9.1	半单李代数的嘉当分解.....	204
9.2	半单李代数根的性质.....	207
9.3	根矢图制作.....	210
9.4	半单李代数的单根.....	214
9.5	邓肯图, 复单李代数的分类.....	217
第 10 章	$GL(n, \mathbb{C})$ 和 $SU(n)$ 的既约张量表示.....	220
10.1	杨图与置换群的共轭类.....	220
10.2	置换群 S_k 的正则表示空间与杨元.....	224
10.3	固有幂等元与不变子空间.....	229
10.4	$GL(n, \mathbb{C})$ 下的既约张量.....	232
10.5	$GL(n, \mathbb{C})$ 及其子群的既约张量表示维数的确定.....	236
10.6	$GL(n, \mathbb{C})$ 的既约表示对 $GL(n-1, \mathbb{C})$ 的约化.....	241
10.7	$SU(n)$ 群既约表示直积的分解.....	243
10.8	权与权图.....	245
第 11 章	纤维丛与联络论.....	250
11.1	丛.....	250
11.2	纤维丛.....	251
11.3	主纤维丛.....	254
11.4	配丛.....	257

11.5 张量丛	259
11.6 线性联络	260
11.7 曲率与挠率	265
11.8 主纤维丛上的联络	267
索引	271

第 1 章 群、拓扑空间与流形

1.1 集 合

这里不准备专门论述关于集合的现代述说,而是由于本书的概念和理论系统将建筑在集合论的有关内容之上,因而把集合作为本书论述的开始.

1. 集合

集合是数学中的基本概念之一. 本书使用的集合(或集)是指满足某种条件的对象的全体. 例如:

自然数的全体;

实数的全体(记为 $\mathbf{R}$);

复数的全体(记为 $\mathbf{C}$);

开区间内点的全体(记为 (a, b));

闭区间内点的全体(记为 $[a, b]$);

某几何图形上点的全体;

n 维矢量空间中线性变换的全体;

实数域上 $m \times n$ 矩阵的全体;

复数域上 $n \times n$ 方阵的全体

等都是集合. 集合通常用大写字母表示. 集合中的对象称为集合中的点或元素,有时也简称为元,通常用小写字母表示.

设 A 为一个集合,若 a 是 A 的一个元素,记为 $a \in A$,读作 a 属于 A ;若 a 不是 A 的元素,记为 $a \notin A$,读作 a 不属于 A . 为了表示集合 A 是由满足某种条件 P 的对象 a 构成的,并且是只由满足这种条件的对象构成,可采取记法:

$$A = \{a | \text{条件 } P\}.$$

例如

$$A = \{a | a \text{ 是正整数}\}$$

表示 A 是由正整数全体构成的集合.

当集合的元素可以具体写出来时,也可将该集合的元素写在花括号(或圆括号)之内,以表示这个集合. 例如

$$x = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$$

表示 x 是由 x^1, x^2, x^3, x^4 四个元素构成的集合. 也可将集合 x 简写成 $x = (x^i)$, $i=1, \dots, 4$.

2. 运算

集合 A 和 B 包含的元素相同时, 记为 $A=B$.

集合 B 的每一元素都属于 A 时, B 称为 A 的子集(见图 1.1), 记为 $B \subset A$ (或 $A \supset B$), 读作 B 包含于 A (或 A 包含 B).

定理 1.1.1 若 $B \subset A$, 同时 $A \subset B$; 则 $A=B$.

定义 1.1.1 既属于集合 A 又属于集合 B 的元素构成的集合, 称为 A 和 B 的交, 记为 $A \cap B$ (见图 1.2). 即 $A \cap B = \{a | a \in A, a \in B\}$.

定义 1.1.2 由集合 A 的所有元素和集合 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 和 B 的并, 记为 $A \cup B$ (见图 1.3). 即 $A \cup B = \{a | a \in A \text{ 或 } a \in B\}$.

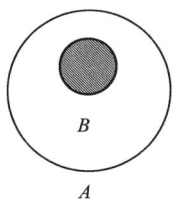


图 1.1

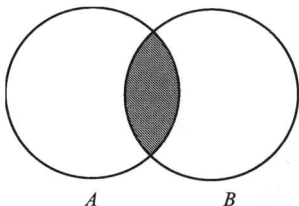


图 1.2

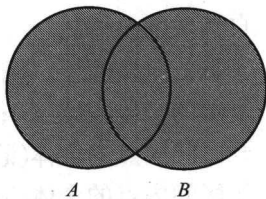


图 1.3

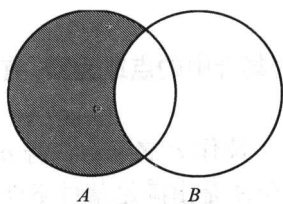


图 1.4

定义 1.1.3 设 A 和 B 是两个集合, 由 A 的那些不属于 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 与 B 的差, 记为 $A-B$ (见图 1.4). 由于 $A-B$ 是 A 中除去 A 在 B 中的所有元素后, 余下的元素形成的集合, 因而 $A-B$ 也称为 B 关于 A 的余集. 即 $A-B = \{a | a \in A \text{ 且 } a \notin B\}$.

一个集合的元素可以是有限的, 也可以是无限的.

元素是有限的集合, 叫做有限集; 元素是无限的集合, 叫做无限集. 若一个集合只有一个元素, 则称为单元素集. 一个集合也可以不含任何元素, 这样的集合称为空集, 记为 $\emptyset$. 由数 0 形成的单元素集可记为 $\{0\}$, 显然 $\{0\}$ 与空集 $\emptyset$ 是不同的两个集合. 如果集合 A 和 B 的交是个空集, 即 $A \cap B = \emptyset$, 则 A 和 B 不含有共同的元素, 并称 A 和 B 为非交的.

定义 1.1.4 设 A 和 B 是两个集合, 由所有的序偶 (a, b) , $a \in A$, $b \in B$, 所构成的集合称为 A 和 B 的直积或笛卡儿积, 记为 $A \times B$. 即 $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$.

例 1.1.1 令 $\mathbf{R}$ 为实数集合, $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 便是所有实数序偶 (a, b) 构成的集合

$\{(a, b) | a \in \mathbf{R}, \text{ 且 } b \in \mathbf{R}\}$; $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$ 则是所有 n 个有次序的实数 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 构成的集合 $\{(a_i) | a_i \in \mathbf{R}, i=1, \cdots, n\}$, 称为 n 重数空间.

1.2 关系与映射

1. 关系

定义 1.2.1 设 A 和 B 为两个集合, S 为直积 $A \times B$ 的一个子集, 则称 S 为 A 到 B 中的关系. 若 $(a, b) \in S$, 则称 a 与 b 是 S -相关的, 记为 aSb .

例 1.2.1 设 $A = (1, 2, 3, 4, 5)$, $B = (1, 2, 3, 4)$, 令

$$\begin{aligned} S &= \{(a, b) | a \in A, b \in B, a < b\} \\ &= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}, \end{aligned}$$

则上述序偶的集合 S 是直积 $A \times B$ 的一个子集, S 是 A 到 B 中的一个关系, 即小于关系. 当集合 $A = B$ 时, $S \subset A \times A$, 此时 S 将成为 A 到 A 中的关系, 称为 A 中的关系. $I = \{(a, a) | a \in A\}$ 称为单位关系; $\emptyset = \{\emptyset | \emptyset \subset A \times A\}$, 称为空关系.

设 f 与 g 分别是 A 到 B 中与 B 到 C 中的关系, 则 $g \circ f$ 是 A 到 C 中的合成关系.

若 f 与 g 都是 A 到 B 中的关系, 且 $f \subset g$, 则 f 称为 g 的限制, g 称为 f 的延拓.

关系是数学中经常使用的概念. 例如, 数的相等、大于或小于, 图形的全等、相似, 集合间的包含、对应等, 这些都是关系. 下面介绍一种重要的关系(即等价关系)和等价类.

定义 1.2.2 若元素 $a, b, c, \cdots$ 构成的集合 A 中的关系 S 具有如下性质:

- (1) 自反性: aSa ;
- (2) 对称性: $aSb \Rightarrow bSa$;
- (3) 传递性: $aSb, bSc \Rightarrow aSc$,

则称 S 为 A 中的等价关系.

定义 1.2.3 若 S 是 A 中的等价关系, 集合 A 的元素 a 的等价类是 A 的一个子集 $\{b \in A | bSa\}$, 记为 $[a]$.

从该定义可知, 相互等价的元素属于同一等价类, A 是各个等价类的一个非交集. 每一等价类可用一个元素代表.

这些等价类的集合通常用 A/S 表示, A/S 称作 A 关于等价关系 S 的商集.

例 1.2.2 令 $\mathbf{R}$ 为实数域, 设 $a_0 \in \mathbf{R}$, 若 $a - a_0 = \pm 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$; 则可规定等价关系 $S: aSa_0$, 从而得到等价类 $[a_0] = \{a \in \mathbf{R} | a \pm 2\pi n = a_0\}$. 显然, 等价

类 $[a_0]$ 可看作圆周上的一点.

2. 映射

定义 1.2.4 若 A 和 B 是两个集合, 如果存在一个 A 到 B 的关系 f , 使得任一元素 $a \in A$, 有一确定的元素 $b \in B$ 与之相对应, 则关系 f 叫做 A 到 B 中的映射, 记为

$$f: A \rightarrow B, \quad a \mapsto b \text{ 或 } A \xrightarrow{f} B, \quad a \xrightarrow{f} b.$$

例 1.2.3 令 $A = (a, b, c)$, $B = (a', b', c', d')$. 若规定

$$f: a \mapsto a', \quad b \mapsto b', \quad c \mapsto a',$$

则 f 便是 A 到 B 中的一个映射.

例 1.2.4 令 $A = B = (a, b, c)$, 则

$$f: a \mapsto a, \quad b \mapsto b, \quad c \mapsto a$$

是 A 到 B 中的一个映射. 由于 $A = B$, 实际上 f 是 A 到 A 中的一个映射.

例 1.2.5 令 $A = B$ 是全体自然数的集合, 对于这一无限集, 可规定如下对应法则:

$$f: 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 6, \dots, n \mapsto 2n, \dots,$$

f 便是自然数集合到其自身中的一个映射.

设 f 是集合 A 到 B 中的映射:

$$\begin{array}{ccc} f & & f \\ A \mapsto B, & & a \mapsto b, \end{array}$$

则 b 叫做 a 在映射 f 下的象, 记为 $f(a) = b$; a 叫做 b 的原象或逆象. b 的原象的全体叫做 b 在映射 f 下的原象, 记为 $f^{-1}(b)$.

若 $f(A)$ 是 B 的一个子集 $\{f(a) | a \in A\}$, 则称 $f(A)$ 是 A 在映射 f 下的象, 若 $f^{-1}(B)$ 是 A 的一个子集 $\{a | f(a) \in B\}$, 则称 $f^{-1}(B)$ 是 B 在映射 f 下的原象或逆象.

若对任一 $b \in f(A)$, 存在唯一的一个 $a \in A$, 使得 $f(a) = b$, 则 f 具有逆映射 f^{-1} :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} & & f^{-1} \\ f(A) \mapsto A, & & b \mapsto a = f^{-1}(b), \end{array}$$

将这种映射 f 称为一一映射或单射.

若 $f(A) = B$, 则映射 f 称为到上的映射, 即是 A 到 B 上的映射, 也称为满射.

若映射 f 是一一和到上的, 则 f 称为双射(或称为 A 与 B 间的 $1:1$ 对应).

例 1.2.6 前面例 1.2.3 至例 1.2.5 的三例中的映射都不是到上的. 例 1.2.3 和例 1.2.4 中的映射不是一一的. 如果将例 1.2.5 中的集合 B 改为自然数中的所有偶数的集合, 则映射 f 将成为到上的.

例 1.2.7 若 $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \exp x$, $x \mapsto x^3 + x^2$, $x \mapsto \sin x$ 均为实数域 $\mathbf{R}$ 到实数域 $\mathbf{R}$ 中的映射, 不难知道这些映射具有如下性质:

$x \mapsto x^3$ 是个双射;

$x \mapsto \exp x$ 是个一一的但不是到上的映射;

$x \mapsto x^3 + x^2$ 是个到上的但不是一一的映射;

$x \mapsto \sin x$ 既不是到上的也不是一一的映射.

若 f 和 g 是集合 A 到 B 中的两个映射, 如果 $\forall a \in A$, 有 $f(a) = g(a)$, 则称映射 f 和 g 相等.

若 A 、 B 、 C 为三个集合, 令 $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, 且令 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$; 则可写成

$$c = g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a),$$

这里 $g \circ f$ (或简写为 gf) 称为映射 f 与 g 的合成或积 (应注意二者的次序). 若 f 、 g 为两个任意映射, 由它们构成的积通常并不具有交换性, 即 $g \circ f \neq f \circ g$. 如果

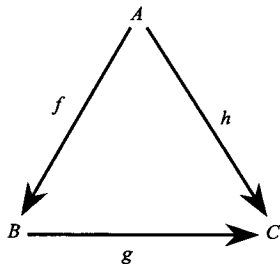
三个映射: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$, 不难证明它们具有结合性:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

若 f 、 g 、 h 是如下三个映射:

$$A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C, A \xrightarrow{h} C,$$

则可将如上映射关系画成如下面的三角图所示. 若三个映射满足 $h = g \circ f$, 则这个图叫做对易的 (或交换的).



若 f 和 g 是两个双射, 可以证明, f 和 g 之积的逆具有下面的性质:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

定义 1.2.5 集合 A 到自身上的任一双射叫做 A 的一个变换. 若 A 是个有限集, 则 A 的变换称为 A 的置换.

若一映射将集合 A 的每一元素映射成该元素自身, 则该映射称为 A 的恒同映射或单位映射.

集合 A 中任意元素 a 和集合 B 中任意元素 b , 以一定法则与集 C 中的唯一元素 c 之间的对应关系称为代数运算, 可以“ $\circ$ ”记之, 即 $a \circ b = c$. 当 $A = B$, $c \in A$ 时, 则称 A 对运算“ $\circ$ ”是封闭的; A 的任意三元素 a, b, c 满足等式 $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$, 则称 A 对运算“ $\circ$ ”是结合的; 如果 $a \circ b = b \circ a$ 成立, 则称 A 对运算“ $\circ$ ”是交换的.

1.3 群

1. 群的定义

定义 1.3.1 群是一个定义了合成运算的集合 G , 满足如下性质:

1) 封闭性

若 $a, b \in G$, 由合成运算将规定一元素 $c = a \circ b \in G$ (这里用“ $\circ$ ”表示 G 的两元素的合成运算). 由群的这一性质可知, 集合 G 在合成运算下是封闭的. 封闭性可简写为

$$a \circ b \in G, \quad \forall a, b \in G.$$

2) 结合性

群元素的合成运算是可结合的. 即对任意的 $a, b, c \in G$, 有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

结合性可简写成

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \quad \forall a, b, c \in G.$$

3) 单位元

存在 G 的一元素 e , 称为 G 的单位元或恒元, 使得对于所有的 $a \in G$, 有

$$e \circ a = a \circ e = a.$$

这一性质, 可写成

$$\exists e \in G, \rightarrow e \circ a = a \circ e = a, \quad \forall a \in G.$$

4) 逆元

对每一元素 $a \in G$, 存在一逆元素 $a^{-1} \in G$, 使得

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

这一性质可写成

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, \rightarrow a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

群元素的合成运算又称群的乘法或合成律. 对于具体的群, 其乘法可以是通常的加法、乘法或矩阵乘法等. 表示群元素相乘的符号“ $\circ$ ”, 通常可以省略.

若群的元素数目是有限的, 则这种群称为有限群; 如果元素数目是无限的, 则这种群称为无限群.

有限群的元素数目叫做这个群的阶.

例 1.3.1

(1) 最简单的群是由一个元素构成的平庸群, 这个元素即是单位元 e , 单位元的逆元, 是其自身; 而且容易验证, 由单位元 e 构成的集合也满足群的其他三个规则.

(2) 另一个简单的群是由两个元素构成的二阶有限群. 如, 由数 1 和 -1 在乘法下构成的群. 对于这个群, 1 是其单位元; 规定元素 -1 的逆元仍是 -1, 可知这个由 1 和 -1 构成的集合满足群的四个规则.

(3) 整数集合在加法下构成一个群, 叫做整数加(法)群. 对于任意两个整数 a 和 b , $a+b$ 也是个整数, 整数加法的结合律便是整数加群的结合性; 整数零是单位元, 即 $0+a=a+0=a$; 对于任一整数 a , 都存在一整数 $-a$, 使得 $a+(-a)=-a+a=0$; 所以整数集合将满足群的规则. 显然整数加群是个无限群.

然而正整数集合不能构成群. 因为这个集合中的元素不存在逆元素, 同时也不存在单位元. 稍后将看到, 正整数集合将构成一个半群.

(4) 容易看出, 实数集合在加法下构成一个无限群. 复数集合在复数加法下也构成一个无限群. 它们分别称为实数加群和复数加群.

(5) 正实数集合在乘法下构成一个无限群, 单位元是 1, 任一正实数 a 的逆元为 $1/a$.

(6) 两个矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 在矩阵乘法下将构成一个二阶群.

(7) 复数 $1, i, -1, -i$ 在复数乘法下将构成一个四阶群.

(8) 所有 $n \times n$ 非奇异实方阵(即其行列式不为零)在矩阵乘法下构成一个无限群, 叫做一般线性群, 记为 $GL(n, R)$.

(9) 所有 $m \times n$ 矩阵在矩阵加法下构成一个无限群. 单位元是 $m \times n$ 零矩阵, 元

素 a 的逆元为 $-a$.

若群的任意两个元素相乘时, 都是可对易的, 即 $\forall a, b \in G$, 有 $a \circ b = b \circ a$, 则这种群叫做交换群或可换群, 也称 Abel 群.

上述 9 个例子中, 除例(8)外, 其余都是交换群.

若集合 A 中定义了合成运算, 但不能全部满足群的四个性质, 而只能满足其中部分性质, 则 A 将成为胚群、半群或广群. 群、胚群、半群和广群所满足的性质如表 1.1 所示.

表 1.1 群、胚群、半群和广群所满足的性质

	封闭性	结合性	单位元	逆元
群	有	有	有	有
胚群	有	有	有	
半群	有	有		
广群	有			

2. 群的共轭类

设 a, b 为群 G 的两个元素, 若有一元素 $g \in G$, 使 $a = bgb^{-1}$, 则称 a 是 b 的共轭元素, 或简称共轭. 这种运算叫做 b 在 g 下的相似变换. 显然, 这里的共轭是群 G 中的一个关系.

共轭关系的性质:

(1) 任一元素是其自身的共轭:

$$a = eae^{-1}.$$

(2) 若 a 是 b 的共轭, 则 b 是 a 的共轭:

$$a = bgb^{-1} \Rightarrow b = g^{-1}ag = (g^{-1})a(g^{-1})^{-1}.$$

(3) 若 a 是 b 的共轭, b 是 c 的共轭, 则 a 是 c 的共轭:

$$\left. \begin{array}{l} a = bgb^{-1} \\ b = g'cg'^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow a = (gg')c(gg')^{-1} = (gg')c(gg')^{-1}.$$

所以共轭是个等价关系.

这样, 群 G 可按共轭关系划分成一些等价类, 使每一等价类中的所有元素都是相互等价的, 而不存在相互共轭又分别属于不同等价类的元素. 群 G 的这些等