BOOK HOUSE 学海书道 高等学校数学学习辅导丛书

10年金版

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

高等数学

全程学习指导

丛书主编/北京航空航天大学 徐兵

编著 王丽燕 秦禹春

配同济五版

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

碧海书道 BOOK HOUSE 高等学校数学学习辅导丛书

10年金版

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

高等数学
全程学习指导

丛书主编/北京航空航天大学 徐兵

编著 王丽燕 秦禹春

配同济五版

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程学习指导(配同济五版) / 王丽燕,秦禹春编著. —4 版
—大连:大连理工大学出版社,2006.7
高等学校数学学习辅导丛书
ISBN 7-5611-1831-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①王… ②秦… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 075384 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:19 字数:775 千字
2006 年 7 月第 4 版 2006 年 9 月第 12 次印刷

责任编辑:梁 锋 吴孝东 责任校对:碧 海
封面设计:熔 点

定 价:22.80 元

丛书特色

名校名师亲自编写 作者教学经验丰富，深受学生欢迎，作者亲力亲为。

立体化多层次设计 精心设计四大系列丛书：

◆习题全解（全析）系列 “不是好学生的作业本，而是优秀教师习题课的教案”。

◆同步辅导系列 帮助学生适应从中学到大学学习方式的转变。

◆全程学习指导系列 培养学生基本解题能力，同时兼顾考研基本题型的介绍，使课程学习与考研准备相衔接。

◆典型题精讲系列 在更高层次上引导学生掌握数学算理与数学思想。

全新理念，全新组合 帮助读者培养用数学思想进行逻辑思考的能力，用数学力增强读者的竞争力。

编读互动

免费下载学习资源 设有专用网站，读者可以免费下载自测试题，拜读相关知名人士的教学、人生心得。

自选名师亲自答疑 读者可以将问题发到指定邮箱，并可指定编委会的任一老师给予解答。

挑错有礼 真诚欢迎读者指正书中的编写及印刷错误并提出合理化建议，一经核实并采纳，我们将对最早提出的读者赠送相关图书。

联系方式

网　　址：http//[redacted]bhsd.dutp.cn
E-mail：bihaishudao@dutp.cn
电　　话：0411-84708947　84707962
通讯地址：大连市软件园路80号理工科技园B座
大连理工大学出版社
科技教育出版中心“碧海书道”收
邮政编码：116023
团购热线：0411-84708898

我们坚决反对假借知名高校名义并编造作者的行为！

我们坚决抵制让学生代笔的行为！

我们致力于打造“零差错”图书！

封面设计：熔点创意 MELTING POINT

高等学校数学学习辅导丛书
编写委员会

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

总序

大学数学是高等学校各门类、专业学生必修的基础课,对理工类、经管类学生都非常重要。21世纪是知识经济时代,数学的重要性更显突出,人们甚至把“数学力”看作是“竞争力、成功力、管理力、领导力”。对于准备报考研究生的同学来说,其重要性更是不言而喻。

作为一名从事大学数学教学和科研工作40余年的教师,我一直密切关注着大学数学的教育状况。我很早就注意到大连理工大学出版社一直在为学生提供高质量的教学辅导书而努力着。10多年来,该社先后出版了50余种相关的大学数学辅导图书,我经常在课堂上、自习课上、考研辅导班上看到学生们在使用。我也多次仔细阅读他们的辅导书,对于图书的内在质量和选题设计,我非常认可,因此经常向学生推荐。在目前浮躁的图书市场上,大连理工大学出版社的这种真正为学生考虑的做法是非常值得弘扬的。

在出版社推出《高等学校数学系列辅导丛书》10周年之际,我受出版社之托,担任该系列丛书编委会主任,深感责任重大。一方面,需要延续出版社一直追求的高质量的图书内在品质;另一方面,需要在对现有图书进行规划和整合的基础上,结合目前学生的需求、高校课程教学的基本要求与教学状况以及最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》有所创新。为此,本次修订主要围绕以下几个方面展开:

第一,坚持聘请名校名师亲自编写的原则。本套丛书编委会的成员全部来自知名高校,并且都是知名教师。例如,韩云瑞教授在清华大学“学生心目中的好老师”评选活动中,2005、2006连续两年全校排名第一;大连大学的王丽燕教授一直是“学生最喜爱的老师”;南开大学的周概容教授连续17年担任考研《概率论与数理统计》命题组组长。这些优秀教师多年积累的教学经验一定会给学生带来意想不到的收获。

第二,对于全部习题进行重新演算,以保证解题过程的正确,而

且在编委会成员之间相互切磋。对于典型习题，努力寻求最优解法，对于重点例题、习题给出多种解法，以帮助学生打开解题思路。我们希望通过编委会的共同努力，可以让读者真正掌握大学数学的思想和算理。

第三，针对学生不同的学习阶段，设计了不同层次的系列图书，力图为学生提供学习数学的立体空间，引导学生全方位、多角度逐步认识并掌握大学数学，从而使得每本书都成为学生天天见面的辅导老师。大一新生刚进大学校门，要尽快适应大学的学习环境，注重夯实大学数学的基础，为学习专业课打下基础；高年级阶段，很多学生准备进一步学习深造，报考研究生，对大学数学需要进行全面复习及提高。针对这些特点，本套丛书设计了四大系列。

习题全解（全析）系列　为读者解答教材中的习题，像习题课一样，与学生们一起通过对习题的分析、讨论、求解、总结，扎实掌握基础知识，领悟数学的真谛。本系列图书“不是好学生的作业本，而是优秀教师习题课的教案”。读者也可以将该系列丛书作为工具书与教材配套使用。

同步辅导系列　按节同步，讲解细致，其主要特点是“基础、同步”，帮助读者重点掌握大学数学中的“基本概念、基本理论、基本方法”。本书可以帮助学生逐步适应从中学时代“以老师讲解为主”到大学时代“以学生自学为主”学习方式的转变。

全程学习指导系列　指导学生准确理解大学数学中的概念、原理，熟练掌握解题的基本思路、方法，提高分析问题、解决问题的能力，同时，让学生熟悉研究生考试的各类题型，在大学低年级阶段就为将来报考研究生打下坚实的基础并提前做好准备。

典型题精讲系列　以习题讲解为主，在注重基本解题能力培养的同时，增加了一些题目难度较大、但颇具特色的习题，在更高层次上引导学生掌握数学的算理与数学思想。

我们欢迎读者通过各种方式与我们联系，提出建议与意见，以利于本套丛书千锤百炼，惠及更多学子。

祝大家学习进步，前程似锦！

徐　兵

2006年6月

于北京航空航天大学

编者的话

从事大学数学教学已接近20年。在此过程中,我深深感受到了数学的理性之美,力量之美,乃至清柔之美。她远不只是工具,更像是一位哲人,启发你,熏陶你,伴你追寻人生的理想。我在讲台上,自然地,将这种意境传递给了学生,使他们在学习大学数学的过程中以新的角度体味“数学”,体味学习。作为教师,我愿意将我的教学经验与大家共享,与大家共同学习,共同提高,这就是我写作《全程学习指导》系列图书的初衷。加上导师秦禹春的热情鼓励和指导,更增添了我写好本书的信心。

《高等数学》是大学各门类、各专业学生必修的基础课,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。本书的目的是帮助广大学生扩大课堂信息量,提高应试能力。本书严格按照教育部高等院校教学指导委员会审订的“本科数学基础课程教学基本要求”(教学大纲),以及教育部最新的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求编写。

本书与被全国许多高校采用的《高等数学》(同济五版)配套,共12章,每章有4个版块。

知识点考点精要 列出基本概念、重要定理、主要内容,突出必须掌握或考试出现频率高的核心内容。

典型题真题精解 精选具有代表性的例题进行详尽解析。这些例题涉及内容广,类型多,技巧性强,旨在提高大家分析问题、解决问题的能力,帮助大家掌握基本概念和理论,开拓解题思路,熟练掌握解题技巧。

目 录

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

第一章 函数与极限

知识点考点精要

高等数学的研究对象是变量，研究变量的一种基本方法是极限方法，要学好高等数学，理解极限的概念是十分必要的。

第一章主要包括函数的极限与连续两部分内容。

本章的第1节主要是复习中学数学知识，比如集合、函数的概念及性质等。但邻域、函数的有界性、复合函数、初等函数等是在中学数学中不曾有过的新知识点，我们将在本章“内容精讲”中作详细介绍。函数的有界性是本节的难点，复合函数的复合与分解既是重点又是难点，准确地进行复合函数的复合与分解是学习复合函数的导数与积分的前提。

第2～4节都在介绍极限的概念与性质。尽管教学大纲中要求要理解极限的概念，但真正理解确有难度，希望你能“硬挺”过去。极限是函数的一种变化趋势，即使你对极限的定义完全不理解，也不要轻言放弃，因为后面的基本计算很容易学会，极限的思想也可以通过以后的学习（如导数的定义、定积分的定义等）慢慢体会，总有一天你也会体会到“ε-δ 语言”有种古诗般意犹未尽的美。

第5～7节重在如何具体地计算极限。本章共总结出10种计算极限的方法供读者参考，掌握这10种方法，第一章所涉及的求极限问题可迎刃而解。

第8～10节是函数的连续性问题。要求理解函数在一点连续和在一区间连续的概念，了解函数间断点的概念，会判断间断点的类型，了解初等函数的连续性以及闭区间上连续函数的性质（最大值最小值定理、有界性定理、介值性定理）。

一、几个重要概念

函数与反函数的概念，以及函数的单调性、奇偶性、周期性等在中学数学中就已经很熟悉了，这里不再赘述。

1. 函数的有界性

定义	设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在数 k，对于所有的 $x \in X$，恒有 $$f(x) \leqslant k(f(x) \geqslant k)$$ 则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有上界(下界)的。如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称它在 X 上有界，否则称它在 X 上无界。
几何意义	假设 $X = [a,b]$，$f(x)$ 在 X 上有界是指一定存在两条直线 $y = k_1$ 和 $y = k_2$，使曲线 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ 夹在直线 $y = k_1$ 和 $y = k_2$ 之间(参见图 1-1)，否则就是无界。

函数 $f(x)$ 在 X 上有界的一个充要条件是：存在一个正数 M，使得对于所有的 $x \in X$，总有

$$|f(x)| \leqslant M \quad (\text{证明见习题 1-1 的 15 题})$$

例如 $y = \sin x$。

由于 $|\sin x| \leqslant 1$(参见图 1-2)，所以函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

又如 $y = \dfrac{1}{x}$。

由于 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内，有 $0 < \dfrac{1}{x} < 1$，所以 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内有界。但在 $(0,1]$ 内却是无界的(参见图 1-3)。因为对于任意的 $M > 0$(无论它多么大)，总存在 $x_0 = \dfrac{1}{2M} \in (0,1]$，使得 $y(x_0) = 2M > M$，即不存在直线 $y = k_1$，使曲线 $\{(x, \dfrac{1}{x}) \mid x \in (0,1]\}$ 在直线 $y = k_1$ 和 $y = 1$ 之间。

由于 $\dfrac{1}{x} \geqslant 1(x \in (0,1])$，所以 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上是有下界的，无界的原因是没有上界。

同样，$y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty, -1)$ 上有界，在 $[-1, 0)$ 有上界但无下界，是无界的。

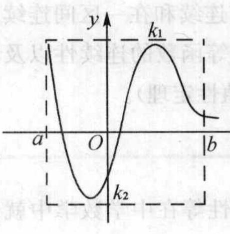

图 1-1

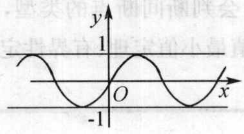

图 1-2

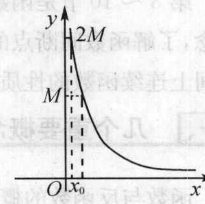

图 1-3

2. 初等函数

(1) 基本初等函数

下列函数称为基本初等函数。

幂函数	$y=x^{\mu}$(μ 为常数)
指数函数	$y=a^{x}$(a 是常数,$a>0$ 且 $a\neq 1$)
对数函数	$y=\log_a x$(a 是常数,$a>0$ 且 $a\neq 1$)
三角函数	$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$
反三角函数	$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$

(2) 复合函数

若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2,值域为 $W_2=\{u\mid u=\varphi(x),x\in D_2\}$ 且 $W_2\cap D_1\neq\varnothing$,则 $y=f[\varphi(x)]$ 确定了一个函数,称为由 $y=f(u)$,$u\in D_1$ 和 $u=\varphi(x)$,$x\in D_2$ 复合而成的复合函数。f 又称为外函数,φ 称为内函数,x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量。

如 $y=\tan\dfrac{x}{2}$ 可以看做由 $y=\tan u$ 和 $u=\dfrac{x}{2}$ 复合而成的。又如 $y=\sqrt{x^2}=|x|$,可看做由 $y=\sqrt{u}$,$u=x^2$ 复合而成的。$y=\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$ 可以看做由 $y=\sqrt{u}$,$u=\tan v$,$v=\dfrac{x}{2}$ 复合而成的,这里 u、v 都是中间变量。

但是,并不是任意两个函数都能复合成一个复合函数,如 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=-(x^2+1)$,由于 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $D_1=[0,+\infty)$,$u=-(x^2+1)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $W_2=(-\infty,-1]$,$D_1\cap W_2=\varnothing$,即对于 $u=-(x^2+1)$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任何 x 值所对应的 u 值($u\leqslant -1$),都不能使 $y=\sqrt{u}$ 有意义。

思考　$y=\arccos u$ 和 $u=2+x^2$ 也不能复合成一个复合函数,为什么?

复合函数的复合与分解一定要分清内函数与外函数,就像穿衣服与脱衣服一样,如果里外不分,将是很可笑的,当然还要分清饰物不是一件衣服。

例如 $y=a\sqrt[3]{1+2x}$ 是由 $y=a\sqrt[3]{u}$ 和 $u=1+2x$ 复合而成的复合函数,$y=a\sqrt[3]{u}$ 的 a 是对幂函数 $\sqrt[3]{u}$ 的装饰,$u=1+2x$ 是一次函数,2 和 1 是对 x 的装饰,不能再分解。

(3) 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成,并可用一个式子表示的函数,称为初等函数。

如 $y=\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$,$y=\sqrt{3x-1}$,$y=(1+\ln x)^3$ 等都是初等函数。

尽管“分段函数一定不是初等函数”的说法是错误的(如 $y=|x|$ 是分段函数,也是初等函数),但绝大多数的分段函数由于它不能用一个式子表示,所以不是初等函数。

3. 数列极限的定义(ε-N 定义)及性质

定义	$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $\|x_n-a\|<\varepsilon$	
性质	惟一性	数列 $\{x_n\}$ 不能收敛于两个不同的极限。
	有界性	如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,则数列 $\{x_n\}$ 必有界。
	收敛数列与其子数列的关系	如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,则它的任一子数列也收敛,且极限也是 a。

1° 在数列极限定义中,$\varepsilon>0$ 必须任意给定,它反映了 x_n 与 a 的接近程度。

2° N 不是惟一的,它随 ε 的变化而变化,通常记为 $N(\varepsilon)$,但 N 并不是 ε 的函数,因对于每一个 $\varepsilon>0$,对应的 $N(\varepsilon)$ 不是确定的。

3° 如果将常数 a 及数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 在数轴上用它们对应的点表示出来,则数列 $\{x_n\}$ 落在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内的有无穷多项,而落在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之外的至多有有限项(至多有 N 项)。

4° 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,则它的任一子数列也收敛,且极限也是 a。但如果数列 $\{x_n\}$ 有一子数列收敛,原数列 $\{x_n\}$ 未必收敛。如数列 $\{(-1)^n\}$,有一子数列 $1,1,1,\cdots$ 是收敛的,但 $\{(-1)^n\}$ 发散。这说明发散数列也可能有收敛的子数列。如果数列 $\{x_n\}$ 有两个子数列收敛于不同的极限,则数列 $\{x_n\}$ 是发散的。

4. 函数极限的定义及性质

	分　类	内　容
定义	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ (ε-δ 定义)	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时,有 $\|f(x)-a\|<\varepsilon$
	$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)=a$(左极限)	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,有 $\|f(x)-a\|<\varepsilon$
	$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)=a$(右极限)	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,有 $\|f(x)-a\|<\varepsilon$
	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,当 $\|x\|>X$ 时,有 $\|f(x)-a\|<\varepsilon$
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,当 $x<-X$ 时,有 $\|f(x)-a\|<\varepsilon$
	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,当 $x>X$ 时,有 $\|f(x)-a\|<\varepsilon$

性质	惟一性	若极限$\lim f(x)=a$存在，则极限值惟一。
	有界性	若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$($\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$)存在，则$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域($\|x\|>X$)内有界。
	保号性	(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，且$a>0$(或$a<0$)，则必存在$x_0$的某一去心邻域$\mathring{U}(x_0)$，当$x\in\mathring{U}(x_0)$时，$f(x)>0$(或$f(x)<0$)。 (2) 若在$x_0$的某一去心邻域内$f(x)\geqslant 0$(或$f(x)\leqslant 0$)，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，则$a\geqslant 0$(若$a\leqslant 0$)。
	保序性	若$f(x)\geqslant g(x)$，则$\lim f(x)\geqslant\lim g(x)$。

注：这里符号$\lim f(x)$表示对于$x\to x_0$或$x\to\infty$这两种自变量变化过程均成立。

1° 研究$x\to x_0$时$f(x)$的极限，是为了研究在自变量$x\to x_0$的变化过程中$f(x)$的性态，此时$f(x)$有无极限与$f(x)$在点x_0有无定义完全无关，即使$f(x)$在点x_0有定义，在讨论$x\to x_0$时$f(x)$的极限的过程中，函数值$f(x_0)$不起任何作用，因此在定义中要求$0<|x-x_0|<\delta$。

2° 在上述定义中，若$a=0$，则称$f(x)$为$x\to x_0$或$x\to\infty$时的无穷小量，即无穷小是以0为极限的函数。0是惟一的作为无穷小的数。

3° 若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$，则称直线$y=c$为曲线$y=f(x)$的水平渐近线。

5. 无穷大

在自变量的某一变化过程中，若$|f(x)|$无限地增大，则称$f(x)$为无穷大量。

1° 在自变量的某一变化过程中，$f(x)$为无穷大量也记为$\lim f(x)=\infty$，此时$f(x)$的极限是不存在的，为了反映$|f(x)|$无限增大这种性态，也说成$f(x)$的极限为无穷大。若$f(x)>0$而$f(x)$无限增大，称$f(x)$为正无穷大量，记为$\lim f(x)=+\infty$；若$f(x)<0$而$|f(x)|$无限增大，称$f(x)$为负无穷大量，记为$\lim f(x)=-\infty$。

2° 若$f(x)$为无穷大量，则$f(x)$必为无界函数；反之，若$f(x)$为无界函数，$f(x)$不一定为无穷大量(如习题1-4的第6题和第7题)。

3° 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则直线$x=x_0$称为曲线$y=f(x)$的铅直渐近线。

4° 无穷大与无穷小是互为倒数关系，即若在自变量的某一变化过程中，α是无穷大(或无穷小)，则$\dfrac{1}{\alpha}$为无穷小(或无穷大)。

二、极限存在的判别法

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

通常分段函数在分段点处的极限都要用这一充要条件去解决。

例如，$f(x)=\begin{cases}1, x<0\\ x, x\geqslant 0\end{cases}$，研究当$x\to 0$时，$f(x)$的极限是否存在。

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 = 1, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在。

又如，研究当 $x\to 0$ 时，$f(x) = |x|$ 的极限。

解 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

即 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$。

2. $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$，其中 α 为无穷小量

3. 两边夹定理

若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足

(1) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n (n = 1,2,\cdots)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

则数列$\{x_n\}$的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

这一准则可以推广到函数极限情形。

4. 单调有界准则：单调有界数列必有极限

若数列$\{x_n\}$单调递增且有上界 k，即 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant k$，则可取 $M = \max\{|x_1|, |k|\}$，必有 $|x_n| \leqslant M (n = 1,2,\cdots)$ 成立，即$\{x_n\}$有界；同理，若数列$\{x_n\}$单调递减且有下界，则$\{x_n\}$必有界。由此可知，利用单调有界准则时，若是单调递增数列，只需证明有上界；若是单调递减数列，只需证明有下界。

三、 极限的运算法则

四则运算	加、减	$\lim[f(x)\pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$	可以推广到有限个函数的和、差、积的情形。有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小，无穷小与有界函数之积仍为无穷小。
	乘	$\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$	
	商	$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (\lim g(x) \neq 0)$	
复合运算	若 $\lim\varphi(x) = a$（或 $\lim\varphi(x) = \infty$），$\lim\limits_{u\to a} f(u) = A$（或 $\lim\limits_{u\to\infty} f(u) = A$），则 $\lim f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u\to a} f(u) = A$（或 $\lim f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u\to\infty} f(u) = A$）		