21世纪高等院校教材

泛函分析引论

曹怀信 主编

陕西师范大学出版社

21 世纪高等院校教材

泛函分析引论

主　编　曹怀信

编　者　曹怀信　张建华

陈峥立

陕西师范大学出版社

图书代号:JC6N0870

泛函分析引论

主编　曹怀信

责任人	田均利
封面设计	徐　明
出版发行	陕西师范大学出版社
社　址	西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网　址	http://www.snuph.com
经　销	新华书店
印　刷	陕西宏业印务有限公司
开　本	787×960　1/16
印　张	11.25
插　页	2
字　数	198 千
版　次	2006 年 8 月第 1 版
印　次	2006 年 8 月第 1 次
书　号	ISBN 7-5613-3723-X/O·105
定　价	18.00 元

开户行:光大银行西安电子城支行　账号:0303080-00304001602

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与本社营销中心联系、调换。

电　话:(029)85251046(传真)　85233753　85307864

E-mail:if-centre@snuph.com

前 言

无穷维线性空间是描述具有无穷多个自由度的物理系统的有力工具. 泛函分析则是研究无穷维线性空间及其上的泛函与算子理论的一门分析数学. 它是现代数学中的一个较新的重要分支. 泛函分析的基本概念与方法起源于经典数理过程中的一些变分问题、边值问题, 概括了经典数学分析与函数论中的某些重要概念、问题与结果. 由于量子力学、现代工程技术与现代力学的深刻影响, 使得这门新兴学科迅速发展. 从上世纪中叶开始, 偏微分方程理论、概率论、计算数学, 由于运用了泛函分析的方法与结果得到大发展. 它综合运用分析、代数、几何与拓扑的方法与观点, 研究分析数学、现代物理、现代方程技术中出现的许多重要问题, 有着广泛而有效的应用. 现在, 泛函分析的概念与方法已经渗透到现代纯粹数学与应用数学, 理论物理及现代工程技术理论的许多分支, 例如, 微分方程、概率论、逼近论、计算数学、量子声场论、统计物理、抽象调和分析、现代控制论与系统论、最优化理论与大范围微分几何、量子计算等许多方法.

泛函分析大体可分为两部分: 一是空间理论, 它研究距离空间、赋范线性空间、Hilbert 空间及一般的拓扑线性空间理论; 另一部分是算子理论, 它可分为线性算子理论与非线性算子理论. 研究线性算子的称为线性泛函分析, 研究非线性算子的称为非线性泛函分析.

由于泛函分析内容之丰富, 不可能用一本专门的书将全部内容都写出来. 因此, 为大学生与其他科技工作者写一本通俗易懂、直观明了的入门书就显的十分必要了. 最近几年, 国内已有许多为本科生与研究生使用的泛函分析教材. 但在写法上大都是以传统的公理体系为基础的推理与演绎. 为了能使学生了解问题的来源与背景, 养成研究性学习的良好习惯, 并培养学生分析问题与解决问题的能力, 我们力求从一些问题中提炼出泛函分析的基本概念与问题, 在讨论有关概念的属性时, 先说明要解决什么问题, 在问题的分析当中逐步引入适当的概念, 再加上适当的条件, 最后给出合理的叙述, 证明便蕴含在分析之中了. 这样或许能使读者不仅学到泛函分析的基本理论, 而且更重要的是领悟到研究问

题与解决问题的方法与技校巧.

与一般教材相比，除了以上讲法（即研究性、分析式教学法）的不同，考虑到篇幅的限制，我们削减了“Hilbert 空间上算子理论”与“算子谱论”的内容，增添了“非线性算子”一章. 旨在使读者了解一点具有广泛应用的非线性泛函分析的简单概念、方法与结论，同时又能看到微积分中关于函数的一些概念如何推广到一般的抽象函数乃至非线性算子.

关于记号的说明：$\mathbf{C},\mathbf{R},\mathbf{Z},\mathbf{N},\mathbf{Q}$ 分别表示全体复数、全体实数、全体整数、全体自然数、全体有理数之集；$\mathbf{C}^n$ 与 $\mathbf{R}^n$ 为复与实的 n 维欧氏空间；“$\in$”表示属于；$A\subset B$ 表示 A 为 B 的子集；$\bigcup$ 与 $\bigcap$ 分别表示并与交；$A\setminus B$ 表示差集；用 A^c 表示集合 A 关于指定集合的余集；$A\times B$ 表示笛卡尔积；“$:=$”表示定义为；“$\exists$”表示存在；$\varnothing$ 表示空集；“$\Rightarrow$”表示蕴含；“$\Leftrightarrow$”表示互相蕴含（当且仅当）.

限于水平,错漏难免,欢迎批评指正.

编　者

2006 年 5 月

目 录

第一章 空间理论 1
§1.1 距离空间 1
1.1.1 定义与例子 1
1.1.2 完备距离空间 3
1.1.3 开集与闭集 7
1.1.4 可分距离空间 8
1.1.5 连续映射 9
1.1.6 列紧空间 11
1.1.7 压缩映射原理 15
习题 1.1 18
§1.2 赋范线性空间 21
1.2.1 定义与例子 21
1.2.2 有限维赋范线性空间 25
习题 1.2 28
§1.3 内积空间 31
1.3.1 内积空间的概念与基本性质 32
1.3.2 正交分解 35
1.3.3 正规正交系 38
习题 1.3 44
§1.4 拓扑空间简介 45
1.4.1 拓扑空间 46
1.4.2 连续映射与同胚 47
第二章 Banach 空间上的有界线性算子理论 49
§2.1 有界线性算子 50
2.1.1 定义、例子与基本性质 50
2.1.2 有界线性算子的范数 54
2.1.3 算子空间与 Banach 代数 58
习题 2.1 61
§2.2 Hahn-Banach 延拓定理 63
2.2.1 线性泛函的延拓 63
2.2.2 有界线性泛函的存在性 68
习题 2.2 69
§2.3 有界线性泛函的表示 70

2.3.1 n 维空间 $\mathbf{K}^n$ 上的有界线性泛函 70
2.3.2 $l^p(\mathbf{K})$ $(1<p<\infty)$ 上的有界线性泛函 71
2.3.3 $L^p[a,b]$ $(1<p<\infty)$ 上的有界线性泛函 73
2.3.4 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函 77
2.3.5 Hilbert 空间上有界线性泛函的表示 77
习题 2.3 78
§2.4 共轭空间与共轭算子 79
2.4.1 共轭空间 79
2.4.2 共轭算子 83
习题 2.4 86
§2.5 Banach 逆算子定理 88
2.5.1 逆算子的概念与基本性质 88
2.5.2 逆算子的有界性 89
习题 2.5 94
§2.6 闭图像定理与一致有界原理 95
2.6.1 闭算子与闭图像定理 95
2.6.2 一致有界原理及其应用 97
习题 2.6 99
§2.7 强弱收敛与弱*-收敛 100
2.7.1 点列的弱收敛 100
2.7.2 算子列的强、弱收敛 102
2.7.3 泛函列的强、弱收敛与弱*-收敛 105
习题 2.7 106
§2.8 紧算子 107
2.8.1 定义与例子 107
2.8.2 紧算子的性质 108
习题 2.8 111
第三章 非线性算子 113
§3.1 连续性与有界性 113
3.1.1 定义与例子 113
3.1.2 连续算子的性质 114
3.1.3 一类复合算子的连续性与有界性 115
习题 3.1 117
§3.2 紧性与全连续性 119
3.2.1 定义与基本性质 119
3.2.2 全连续算子的结构 120
习题 3.2 124

§3.3 抽象函数的导数 …… 124
3.3.1 实变抽象函数的导数 …… 124
3.3.2 复变抽象函数的导数 …… 127
习题 3.3 …… 130
§3.4 抽象函数的积分 …… 130
3.4.1 定义 …… 130
3.4.2 可积条件 …… 131
3.4.3 运算性质 …… 134
习题 3.4 …… 135
§3.5 Fréchet 导算子 …… 136
3.5.1 定义与性质 …… 136
3.5.2 中值定理与导算子的全连续性 …… 143
3.5.3 高阶导算子与 Taylor 公式 …… 145
习题 3.5 …… 149
§3.6 Gâteaux 导算子 …… 150
3.6.1 定义与性质 …… 150
3.6.2 两种微分之间的关系 …… 151
习题 3.6 …… 156
§3.7 偏导算子与隐算子定理 …… 156
3.7.1 偏导算子 …… 157
3.7.2 隐算子存在定理 …… 159
3.7.3 反算子存在定理 …… 164
习题 3.7 …… 165
附 录 …… 167
I. 半序集与 Zorn 引理 …… 167
1.1 概念与例子 …… 167
1.2 Zorn 引理 …… 168
II. 泛函延拓定理的证明 …… 169
III. 算子谱论简介 …… 171
3.1 正则点与谱点 …… 171
3.2 谱半经 …… 172
3.3 紧算子的谱理论 …… 173
参考书目 …… 174

第一章　空间理论

前言中已经指出，泛函分析研究的对象是定义在线性空间上的泛函与算子．为了深入研究泛函与算子，我们首先要讨论一下它们的定义域空间，包括：距离空间、赋范线性空间与 Hilbert 空间．

在研究某些物理系统时，往往要用无穷多个参数来决定系统的状态．例如，一个物体在一点 $\vec{\tau}$ 处的温度 $\theta(\vec{\tau})$ 与某种信号在时刻 t 的情况 $x(t)$ 等都是由无穷多个参数值决定．一般来说系统的状态可用函数或数列来描述．因此，从数学上来看就是要研究某种函数或数列．为了全面研究系统的变化规律，不单是考虑个别状态，而要研究某些状态的集合．从数学上来说，就是要研究函数或数列之集．由于两个信号可以叠加，一个信号可以放大或缩小，因而在以上的函数或数列之集中引入加法与数乘，即引入线性空间结构是自然的．在处理实际问题（如天气预测等）时，系统的状态总是观测得到，而观测必有误差，是近似值．为了得到合乎实际的结果，要求近似值可以“任意逼近”精确性．为了准确描述“任意逼近”的概念，还需要在线性空间中引入距离的概念．这就是所谓“赋有距离的线性空间”，即赋范线性空间．

§1.1　距离空间

1.1.1 定义与例子

为了描述“任意逼近”的概念，需要引入两个状态(研究对象)之间的距离，用它来刻画两状态的远近程度．如果将每个状态叫做一个点，则距离这个数应满足一下条件：

1° 任意一点到自身的距离为零，任意两个不同点之间的距离大于零；

2° 从 x 到 y 的距离等于从 y 到 x 的距离；

3° 直线段最短，即从 x 到 y 的距离不超过从 x 到 z 的距离与从 z 到 y 的距离之和．

由此我们引入以下定义．

定义 1.1.1 设 E 是任一非空集合，如果存在二元函数 $\rho: E\times E\to \mathbf{R}$ 使得 $\forall x,y,z\in E$，有

(M_1)　$\rho(x,y)\ge 0;\ \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$；

(M_2)　$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

$(M_3)\quad \rho(x,y)\le \rho(x,z)+\rho(z,y)$，

则称 ρ 是集 E 上的一个距离（或度量），称 $\rho(x,y)$ 是点 x 与 y 之间的距离，称二元序对 (E,ρ) 为距离空间，简称 E 是距离空间（或度量空间）.

例 1 在 $\mathbf{R}^n$ 中定义

$$\rho_1(P,Q)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

$$\rho_2(P,Q)=\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho_\infty(P,Q)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|,$$

则 ρ_1,ρ_2 与 ρ_∞ 都是 $\mathbf{R}^n$ 上的距离.

易见,对任意 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Q=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,有

$$\rho_2(P,Q)\le\rho_1(P,Q)\le n\rho_\infty(P,Q).$$

一般地，$\rho_p(P,Q)=\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$ $(1\le p<\infty)$ 也定义了 $\mathbf{R}^n$ 上的距离. 对于 $\mathbf{C}^n$ 也可类似定义距离 ρ_p，从而它成为距离空间. 若不特别指明，则视 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 赋距离 ρ_2.

例 2 记 $C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上全体连续函数之集，对于 $f,g\in C[a,b]$，定义

$$\rho_1(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|\,dt,$$

$$\rho_\infty(f,g)=\max_{a\le t\le b}|f(t)-g(t)|,$$

则 ρ_1，ρ_∞ 都是 $C[a,b]$ 上的距离. 若不特别指明，则视 $C[a,b]$ 上赋距离 ρ_∞.

例 3 记 $S(\mathbf{K})=\{\{x_n\}:x_n\in\mathbf{K}\ (n=1,2,\cdots)\}$ 是 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上的数列的全体. 对 $x=\{x_n\}$ 与 $y=\{y_n\}\in S(\mathbf{K})$，定义

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^n(|x_n-y_n|+1)},$$

则 $(S(\mathbf{K}),\rho)$ 是距离空间，称为序列空间.

例 4 设 E 是任一非空集，定义 $\rho=E\times E\to\mathbf{R}$ 为

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y,\end{cases}$$

则(E,ρ)是距离空间，称为离散空间.

可见，任一非空集上都可定义距离使其成为距离空间.

例 5　若(E,ρ)是距离空间，定义$\overline{\rho}:E\times E\to\mathbf{R}$为

$$\overline{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}.$$

则$\overline{\rho}$也是E上的距离，其证明由函数$f(t)=\dfrac{t}{1+t}$在$[0,\infty)$上的递增性可知．可见，一个集上可有很多种距离.

如果(E,ρ)是距离空间，E_1是E的非空子集，则ρ限制在$E_1\times E_1$上成为E_1上的距离．于是(E_1,ρ)也是一个距离空间，叫做(E,ρ)的子空间．例如$([a,b],\rho_1)$是$(\mathbf{R},\rho_1)$的子空间，其中$\rho_1(x,y)=|x-y|$.

1.1.2　完备距离空间

在距离空间中，因为有了距离便可考虑“任意接近”的问题即收敛性问题．数列以及点列是数学分析的重要概念．因此我们有必要将点列的收敛问题引入到一般的距离空间之中.

定义 1.1.2 设(E,ρ)是距离空间，$x_n\in E\ (n\in\mathbf{N})$．如果存在$x_0\in E$使得

$$\rho(x_n,x_0)\to 0\ (n\to\infty),$$

则称点列$\{x_n\}$收敛，且称x_0为$\{x_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，或记为$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，此时亦称$\{x_n\}$收敛于$x_0$.

收敛点列的极限是否唯一呢？若在(E,ρ)中，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=y_0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_0)=0.$$

于是$\forall\varepsilon>0$，存在N_1与N_2，使得

$$n>N_1\Rightarrow\rho(x_n,x_0)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$n>N_2\Rightarrow\rho(x_n,y_0)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而，当$n>\max\{N_1,N_2\}$时，有

$$\rho(x_0,y_0)\le\rho(x_0,x_n)+\rho(x_n,y_0)<\varepsilon.$$

由于ε的任意性，从而$\rho(x_0, y_0)=0$，即$x_0 = y_0$. 可见，距离空间中收敛点列的极限必唯一. 类似可以证明关于数列的有界性定理与子列定理也成立. 于是，得到

定理 1.1.3 若$\{x_n\}$为距离空间(E,ρ)中的收敛点列，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，则

（1）x_0由$\{x_n\}$唯一确定；

（2）$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$也收敛于x_0；

（3）$\{x_n\}$有界，即存在$a\in E$及$\mathrm{M}>0$使得

$$\rho(x_n,a)\le M \ (\forall n\in \mathbf{N}).$$

例 6 （i）$(\mathbf{R}^n,\rho_p)$中点列的收敛性等价于按坐标收敛， 即

$$P_k \xrightarrow{\rho_p} P_0 \Leftrightarrow \forall i\in\{1,2,\cdots,n\} \text{ 有 } x_i^{(k)} \to x_i^{(0)},$$

其中

$$P_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}),\ P_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})\in\mathbf{R}^n.$$

（ii）$(C[a,b],\rho_\infty)$中的点列以ρ_∞收敛等价于函数列在$[a,b]$上的一致收敛（应用一致收敛的 Cauchy 准则）.

（iii）离散空间(E,ρ)中点列$\{x_n\}$收敛于x_0当且仅当

$$x_n \equiv x_0 \ (n=1,2,\cdots),$$

即$\{x_n\}$为常点列.

例 7 设$E\subset\mathbf{R}^n$是 Lebesgue 可测集，且$mE<\infty$. 记$M(E)$是E上所有几乎处处有限的可测函数之集，其中几乎处处相等的函数视为同一元素. 对$f,g\in M(E)$，定义

$$\rho(f,g)=\int_E \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}dt,$$

则ρ是$M(E)$上的距离且

$$f_n \xrightarrow{\rho} f \Leftrightarrow f_n(t)\overset{E}{\Rightarrow} f(t),$$

其中“$\overset{E}{\Rightarrow}$”表示在E上依测度收敛，$f_n \xrightarrow{\rho} f$表示以距离ρ收敛.

证明 显然，ρ满足距离公理的(M_1)与(M_2). 应用函数

$$f(t)=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t}$$

在$[0,\infty)$上的递增性可知，ρ也满足(M_3). 从而ρ为$M(E)$上的距离.

设 $f_n, f \in M(E)$，且 $f_n \xrightarrow{\rho} f\ (n \to \infty)$，则 $\forall \sigma > 0$ 有

$$\begin{aligned}
\rho(f_n, f) &= \int_E \frac{|f_n(t) - f(t)|}{1 + |f_n(t) - f(t)|} dt \\
&\geq \int_{E(|f_n - f| \geq \sigma)} \frac{|f_n(t) - f(t)|}{1 + |f_n(t) - f(t)|} dt \\
&\geq \int_{E(|f_n - f| \geq \sigma)} \frac{\sigma}{1 + \sigma} dt \\
&= \frac{\sigma}{1 + \sigma} \cdot mE(|f_n - f| \geq \sigma)(n = 1, 2, \cdots).
\end{aligned}$$

因此，$mE(|f_n - f| \geq \sigma) \to 0\ (n \to \infty)$，故 $f_n(t) \overset{E}{\Rightarrow} f(t)$.

反之，若 $f_n(t) \overset{E}{\Rightarrow} f(t)$，则 $\forall \sigma > 0$ 有

$$\begin{aligned}
\rho(f_n, f) &\leq \int_{E(|f_n - f| \geq \sigma)} \frac{|f_n(t) - f(t)|}{1 + |f_n(t) - f(t)|} dt \\
&\quad + \int_{E(|f_n - f| < \sigma)} \frac{|f_n(t) - f(t)|}{1 + |f_n(t) - f(t)|} dt \\
&\leq mE(|f_n - f| \geq \sigma) + \frac{\sigma}{\sigma + 1} mE.
\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$，再令 $\sigma \to 0^+$ 可知: $\rho(f_n, f) \to 0\ (n \to \infty)$，故 $f_n \xrightarrow{\rho} f$. 这证明了在距离空间 $(M(E), \rho)$ 中

$$f_n \to f\ (n \to \infty) \Leftrightarrow f_n(t) \overset{E}{\Rightarrow} f(t).$$

数学分析告诉我们: 数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ 是基本列(即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ 使得当 $m, n > N$ 时，有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$). 这一结论在距离空间中是否成立呢？首先，我们把基本列的概念推广到距离空间之中.

定义 1.1.4　若距离空间 (E, ρ) 中的点列 $\{x_n\}$ 满足: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ 使得当 $m, n > N$ 时，有 $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$， 则称 $\{x_n\}$ 为 (E, ρ) 中的基本列（或 Cauchy 列）.

基本列与收敛点列有何关系呢？若 $\{x_n\}$ 为距离空间 (E, ρ) 中的收敛点列且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ 使得当 $n > N$ 时，有 $\rho(x_n, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 从而当

$m, n > N$ 时，有

$$\rho(x_m, x_n) \le \rho(x_m, x_0) + \rho(x_n, x_0) < \varepsilon,$$

可见，$\{x_n\}$ 为基本列．因此，收敛点列必为基本列．反之如何呢？容易看出：点列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是 $(\mathbf{Q}, \rho_1)$ 中的基本列（因为它在 $(\mathbf{R}, \rho_1)$ 中收敛）．但它在 $(\mathbf{Q}, \rho_1)$ 中不收敛．这说明在距离空间中，基本列不一定收敛．为此，我们引入以下定义．

定义 1.1.5 若距离空间 (E, ρ) 中的任一基本列都收敛，则称 (E, ρ) 是完备的，亦称 ρ 是完备距离．

例 8 离散空间 (E, ρ) 是完备的．

事实上，$\{x_n\}$ 为 (E, ρ) 中的基本列等价于 $\{x_n\}$ 为近似常点列，即当 n 充分大时，有 $x_n = x_{n+1} = \cdots = x_m = \cdots$．

例 9 $(C[a,b], \rho_1)$ 不是完备的，但 $(C[a,b], \rho_\infty)$ 完备．

证明 记 $c = \dfrac{1}{2}(a+b)$，$f_n(t) = \arctan(t-c)$，则 $f_n \in C[a,b]\ (n = 1, 2, \cdots)$ 且当 $t \in [a,b]$ 时，有

$$f_n(t) \to f(t) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(t-c) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, c < t \le b, \\ 0, \quad t = c, \\ -\dfrac{\pi}{2}, a \le t < c. \end{cases}$$

由勒贝格控制收敛定理知

$$\rho_1(f_n, f) \to 0\ (n \to \infty).$$

但是 f 既不属于 $C[a,b]$ 也不对等于一个连续函数，故 $\{f_n\}$ 在 $(C[a,b], \rho_1)$ 中不收敛．由 $\rho_1(f_n, f) \to 0$ 可知，$\{f_n\}$ 为 $(C[a,b], \rho_1)$ 中的基本列．因此，$(C[a,b], \rho_1)$ 是不完备的距离空间．至于 $(C[a,b], \rho_\infty)$ 的完备性，本质上是一致收敛的 Cauchy 准则．

从直观上来说，完备距离空间就是 Cauchy 收敛准则成立的空间．在数学分析中我们知道：Cauchy 准则、闭区间套定理、有限覆盖定理等重要结论在实数系 $\mathbf{R}$ 中成立，而在有理数系 $\mathbf{Q}$ 中不成立．基于这点，我们说实数系 $\mathbf{R}$ 是完备的，而有理数系 $\mathbf{Q}$ 不完备，为了克服有理数系的不足，引入了实数系，称后者为前者的完备化．应用这种想法与方法，我们可将不完备的距离空间完备化．有兴趣的读者可参考 Conway 泛涵分析．

1.1.3　开集与闭集

在数学分析与实变函数论中我们学习了$(\mathbf{R}^n,\rho_2)$中的开集、闭集与紧集的概念，并利用开集、闭集刻画了函数的连续性．为了研究距离空间映射的连续性，必须将开集、闭集等概念推广到一般的距离空间．

设(E,ρ)是一距离空间，$x_0\in E$，称E中的点集

$$B(x_0,r)=\{x\mid x\in E,\rho(x,x_0)<r\},$$

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\mid x\in E,\rho(x,x_0)\le r\},$$

分别为以点x_0为中心、r为半径的开球与闭球．$B(x_0,r)$又叫点x_0的r－邻域，简称为x_0的邻域．又称点集

$$S(x_0,r)=\{x\mid x\in E,\rho(x,x_0)=r\}$$

是以点x_0为中心、以r为半径的球面，其中$r>0$．

定义 1.1.6　设M是距离空间(E,ρ)的子集，点$x_0\in E$叫做M的内点，指存在$B(x_0,r)\subset M$．M的所有内点之集称为M的内部，记为M°．如果$M=M^\circ$，则称M是(E,ρ)中的开集．

例 10　(i) 离散空间(E,ρ)中，任一子集M是开集，因为对于任意$x_0\in E$，存在$\delta>0$使得$B(x_0,\delta)=\{x_0\}\subset M$；

(ii) 在(E,ρ)中，开球$B(x_0,r)$，E及$\varnothing$恒为开集;

(iii) 若$M\subset(E,\rho)$，则M的内部M°恒为开集．

证明　与$(\mathbf{R}^n,\rho_2)$中的证明类似．

类似于$(\mathbf{R}^n,\rho_2)$中的情况，可以证明开集具有以下性质：

定理 1.1.7　在距离空间中，有限多个开集之交是开集，任意多个开集之并仍为开集．

下面给出聚点与接触点的定义，由此得到闭集的概念．

定义 1.1.8　设M为距离空间(E,ρ)的子集．点$x_0\in E$称为M的聚点，指$\forall r>0$，

$$(B(x_0,r)-\{x_0\})\cap M\ne\varnothing.$$

点$x_0\in E$称为M的接触点，指$\forall r>0$，有

$$B(x_0,r)\cap \mathrm{M}\ne\varnothing.$$

M的全体接触点之集称为M的闭包，记为$\overline{M}$．如果$M=\overline{M}$，则称M为闭集．

显然，聚点必是接触点，接触点分为聚点与孤立点（即存在$r>0$使得$B(x_0,r)\cap M=\{x_0\}$）．

类似 $\mathbf{R}^n$ 中的情况，可以证明

定理 1.1.9 设 $x_0 \in (E,\rho)$，$M \subset E$，则

(1) x_0 是 M 聚点 $\Leftrightarrow$ 存在点列 $\{x_n\} \subset M \setminus \{x_0\}$ 使得 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$；

(2) x_0 是 M 的接触点 $\Leftrightarrow$ 存在点列 $\{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$.

容易证明：在任意空间 (E,ρ) 中，E，$\varnothing$，$\overline{B}(x_0,r)$ 与 $S(x_0,r)$ 恒为闭集；任意集的闭包恒为闭集.

下面定理说明，闭集与开集有着“对偶”的关系与性质.

定理 1.1.10 设 M 为距离空间 (E,ρ) 的子集，则

（1）M 是闭集 $\Leftrightarrow$ M 包含其一切聚点；

（2）M 是闭集 $\Leftrightarrow$ $M^C := E \setminus M$ 是开集；

（3）E 中任意多个闭集之交是闭集，有限多个闭集之并是闭集.

由于离散空间中任一集均为开集，从而由定理 1.1.10(2)知：离散空间中的任一子集既是开集又是闭集.

1.1.4 可分距离空间

熟知，有理数集在实数集中稠密，即每个实数都可用有理数列任意逼近. 在数学分析中已证明了：$[a,b]$ 上的任一连续函数可用代数多项式任意一致逼近，又因实系数多项式可用有理系数的多项式一致逼近，因此 $(C[a,b],\rho_\infty)$ 中的任意元 f 都可用有理系数的多项式一致逼近. 虽然以上两个问题针对不同的对象，但其实质是用某个可数集中的元素任意逼近另外一些元素. 将这两个问题抽象出来，我们引入

定义 1.1.11 若距离空间 (E,ρ) 中的两个子集 M 与 D 满足：$\overline{D} \supset M$，则称 D 在 M 中稠密. 如果 D 在全空间 E 中稠密，则称 D 是 (E,ρ) 中的稠密集. 如果 (E,ρ) 有可数的稠密集，则称 (E,ρ) 是可分的.

例 11 （i）离散空间 (E,ρ) 可分 $\Leftrightarrow$ E 是可数集；

（ii）$(C[a,b],\rho_\infty)$ 是可分的；

（iii）$(\mathbf{R}^n,\rho_p)$ 可分，因为可数集 $\mathbf{Q}^n$ 是稠密集；

（iv）$(\mathbf{C}^n,\rho_p)$ 可分，因为可数集:

$$\{(r_1,r_2,\cdots r_n) \mid \operatorname{Re} r_k, \operatorname{Im} r_k \in \mathbf{Q}(k=1,2,\cdots,n)\}$$

是稠密集；

（v）$(S(\mathbf{R}),\rho)$ 可分，因为可数集

$$D = \{(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots) \mid r_i \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{N}\}$$

是稠密集.

1.1.5　连续映射

有了距离与收敛的概念，应用类似于数学分析中的方法，我们就可以建立连续映射的概念并讨论有关性质.

定义 1.1.12　设 T 是从距离空间 (E_1,ρ_1) 到 (E_2,ρ_2) 的映射，点 $x_0\in E_1$. 如果 $\forall x_n\in E_1\ (n=1,2,\cdots)$ 有

$$x_n \xrightarrow{\rho_1} x_0(n\to\infty) \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{\rho_2} Tx_0(n\to\infty),$$

则称映射 T 在 x_0 处连续. 若 T 在 E_1 的每一点都连续，则称 T 为连续映射.

例 12　(i) 设 (E,ρ) 为距离空间，则对任何固定的 $a\in E$，$\rho(a,\cdot):E\to\mathbf{R}$ 是连续映射 $(\mathbf{R}=(\mathbf{R},\rho_1))$.

(ii) 设 (E_1,ρ_1) 与 (E_2,ρ_2) 是两个距离空间，定义

$$(\rho_1\times\rho_2)((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2),$$

则 $\rho_1\times\rho_2$ 是 $E_1\times E_2$ 上的一个距离. 因此, $(E_1\times E_2,\rho_1\times\rho_2)$ 是一个距离空间,称为 (E_1,ρ_1) 与 (E_2,ρ_2) 的乘积空间.

(iii) 对任一距离空间 (E,ρ)，距离函数 $\rho:E\times E\to\mathbf{R}$ 自动连续，其中 $E\times E$ 赋以乘积距离 $\rho\times\rho$.

证明　(i) 设 $x_n,x_0\in E$ 且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，则

$$\begin{aligned}\rho(a,x_n)-\rho(a,x_0)&\le\rho(a,x_0)+\rho(x_0,x_n)-\rho(a,x_0)\\&=\rho(x_n,x_0).\end{aligned}$$

交换 x_n 与 x_0 的位置可得

$$\rho(a,x_0)-\rho(a,x_n)\le\rho(x_n,x_0),$$

从而

$$|\rho(a,x_n)-\rho(a,x_0)|\le\rho(x_n,x_0)(n=1,2,\cdots).$$

因此,

$$\rho(a,x_n)\to\rho(a,x_0)(n\to\infty).$$

可见，$\rho(a,\cdot):E\to\mathbf{R}$ 连续.

(ii) 显然

$$\rho_1\times\rho_2:(E_1\times E_2)\times(E_1\times E_2)\to\mathbf{R}$$

满足距离公理的 (M_1) 与 (M_2)，下证它满足 (M_3).

$\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in E_1\times E_2$，我们有

$$(\rho_1\times\rho_2)((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2)$$