主　编　赵鸣霖

副主编　白　岩　张　衡　李宾

高等数学习题课教程

吉林大学出版社

高等数学习题课教程

主　编　赵鸣霖
副主编　白　岩
　　　　张　衡
　　　　李　宾

吉林大学出版社

高等数学习题课教程
主编　赵鸣霖

责任编辑、责任校对：崔晓光　封面设计：孙　群

吉林大学出版社出版　吉林大学出版社发行
（长春市东中华路29号）　省九三彩色印刷厂印刷

开本：850×1168毫米　1/32　1996年9月第1版
印张：19　1996年9月第1次印刷
字数：473千字　印数：1－5 200册

ISBN 7－5601－1973－5/O·216　定价：27.00元

前 言

为适应教育改革、加强基础教学和不断提高教学质量的需要，由长春市高校工科数学专业委员会协调组织长春市六所高等院校（长春地质学院、长春光机学院、吉林工学院、长春邮电学院、长春大学、吉林职业师范学院）按照国家教委颁布的教学大纲要求，结合各校多年的教学经验，编写了一套高校工科数学系列教材。《高等数学习题课教程》是其中的一本。

高等数学习题课，是高等数学教学的一个重要环节，它对提高学生的学习质量，培养学生的思维和分析问题、解决问题的能力起着至关重要的作用。

本书是集中了参编院校从事高等数学教学的教师，汇集了他们在教学实践中积累下的丰富 经验和雄厚的资料编写而成的。在编写中，一方面考虑到不同层次的院校各专业对高等数学教学的要求有所差异，共编写了 30 讲，可供 60 学时习题课教学用；另一方面还注意到习题课教学的特点：总结与提高相结合，讲与练相结合，课内习作与课外练习相结合，每一讲中编有内容提要、基本要求、典型例题、练习题和答案与提示四个部分。“基本要求”指出了本讲的教学目标，可使学生学习时目的明确，便于检查学习效果；“典型例题”注意选择具有启发性、广泛性、典型性的例题，数量较多并具有相当的深广度和技巧性，不少题目给出一题多解，使学生学习后会起到举一反三的作用；课后“练习题”分为 A、B 两类：A 类是具有一定难度的基本题和综合题，侧重培养和检查学生对基本概念、基本理论和基本解题技能的综合运用能力；B 类是具有较高难度的习题，可作为学生深入思考练习。

参加本书编写的教师和具体分工如下：

赵鸣霖：主编，负责全书的统稿和定稿工作，并编写第十六、十七讲和第廿八至卅讲。

白　岩：副主编，并编写第六至十讲。

张　衡：副主编，并编写第十八至廿二讲。

李　宾：副主编，并编写第一至五讲。

杨显文：编写第十一至十五讲。

高海音：编写第廿三至廿七讲。

本书主审工作由长春光机学院李懋和教授担任，他对全书进行了详细审阅，并提出了许多宝贵意见和建议，在此表示衷心感谢。

限于编者水平，疏漏和不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1996 年 3 月于长春

目录

第一讲　函数的概念及性质

一、内容提要

1. 函数的概念

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是已知数集，如果对于每一数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则 f 有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 叫做自变量，y 叫做因变量，数集 D 叫做这个函数的定义域，数集 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 叫做这个函数的值域.

2. 函数的特性

(1)函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在某一正数 M，使得对于一切 $x\in I$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界，否则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

(2)函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意的 x_1、$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时都有

$$f(x_1)<f(x_2)\qquad(\text{或}\ f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或单调减少)的.

(3)函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 $(-l,l)$ 上有定义，如果对于任意

的 $x\in(-l,l)$ 都有

$$f(-x)=-f(x)\qquad(\text{或} f(-x)=f(x))$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数(或偶函数).

(4)函数的周期性

设函数 $y=f(x)$,如果存在不为零的实数 T,使得对于定义域内的任何 x 都有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说的周期是指最小正周期.

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W,如果对任一 $y\in W$,都有 $x\in D$ 使得

$$f(x)=y$$

则 x 是 y 的函数,称此函数为已知函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 W,值域为 D.

习惯上,把 $y=f(x)$ 的反函数表示为 $y=f^{-1}(x)$.

4. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,值域为 W_φ,且 W_φ 与 D_f 的交集非空,记 $G=W_\varphi\cap D_f$,$D_1=\{x\mid x\in D_\varphi \text{且} u=\varphi(x)\in G\}$,若对任一 $x\in D_1$,通过变量 u 有 y 值与之对应,则在 D_1 上确定 y 是 x 的函数,称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$,其定义域为 D_1,其中 x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量.

5. 初等函数

(1)基本初等函数

幂函数 $y=x^\mu(\mu\in R \text{且} \mu\neq 0)$;

指数函数　$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；
对数函数　$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；
三角函数　$y=\sin x, y=\cos x, y=\mathrm{tg}x, y=\mathrm{ctg}x$,
$y=\sec x, y=\csc x$；
反三角函数　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\mathrm{arctg}x$,
$y=\mathrm{arcctg}x$.

(2)初等函数

由常数和基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合所构成且能用一个解析式子表示的函数叫做初等函数.

二、基本要求

1. 理解函数的概念,了解函数的几个特性;
2. 理解反函数、复合函数的概念;
3. 熟悉基本初等函数的性质及其图形;
4. 能列出简单实际问题中的函数关系.

三、典型例题

1. 判定下列每对函数是否相同?

(1)$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$　　(2)$y=\sqrt{x^2}$与 $y=|x|$

解　两个函数 $f(x)$和 $g(x)$相同是指它们有相同的定义域和相同的对应规则.

(1)$y=\ln x^2$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $y=2\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,因此它们是两个不同的函数. 如果只考虑 $x>0$,则 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 就是相同的函数.

(2)$y=\sqrt{x^2}$与 $y=|x|$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,且$\sqrt{x^2}=|x|$,因此 $y=\sqrt{x^2}$与 $y=|x|$是同一个函数.

2. 已知$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,求$f[f(x)]$,$f[f[f(x)]]$及其定义域.

解 由于$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,$x\neq-1$,所以

$$f[f(x)]=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=x$$

$$x\neq 1, f(x)\neq -1$$

但$f(x)$不可能等于-1,故$f[f(x)]$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

$$f[f[f(x)]]=\frac{1-f[f(x)]}{1+f[f(x)]}=\frac{1-x}{1+x}=f(x)$$

定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

3. 设$\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$,$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>\frac{1}{2}\\ 0 & x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$,

求$f[\varphi(x)]$,$\varphi[f(x)]$的表达式.

解

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}\ln\varphi(x) & \varphi(x)>\frac{1}{2}\\ 0, & \varphi(x)\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\ln x^2, & -\infty<x<-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0, & -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant 0\\ \ln 1, & 0<x<+\infty\end{cases}$$

$$\varphi[f(x)]=\begin{cases}[f(x)]^2, & f(x)\leqslant 0\\ 1, & f(x)>0\end{cases}$$

$$
=\begin{cases} 0, & -\infty < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ (\ln x)^2, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \\ 1, & 1 < x < +\infty \end{cases}
$$

4. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2(1+\sqrt{x^2+1})$，求 $f(\sqrt{x})$.

解

$$
f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2(1+\sqrt{x^2+1})
$$

$$
=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left[1+\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}+1}\right]
$$

故

$$
f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)
$$

所以

$$
f(\sqrt{x})=\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+1}\right)
$$

5. 已知 $f(x)=2\ln x$，$f[\varphi(x)]=\ln(1-\ln x)$，求 $\varphi(x)$ 的表达式及定义域.

解　由于 $f(x)+2\ln x\ (x>0)$

所以

$$
f[\varphi(x)]=2\ln x\ (x>0)
$$

又

$$
f[\varphi(x)]=\ln(1-\ln x)
$$

于是有

$$
\ln(1-\ln x)=2\ln\varphi(x)
$$

即

$$
\varphi^2(x)=1-\ln x
$$

由于 $\varphi(x)>0$，故得

$$\varphi(x)=\sqrt{1-\ln x}$$

$\varphi(x)$的定义域为$(0,e)$.

6. 求函数 $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$的反函数，并求函数的定义域.

解 由 $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$得 $e^x=\dfrac{y}{1-y}$，则

$$x=\ln\frac{y}{1-y}$$

用 x 表示自变量，y 表示因变量，则 $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$的反函数为

$$y=\ln\frac{x}{1-x}$$

下面求它的定义域，解不等式

$$\frac{x}{1-x}>0$$

得定义域为$(0,1)$.

7. 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$;

(2) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $f(x)=(x^2+x)\sin x$.

解

(1) $f(-x)=(2+\sqrt{3})^{-x}+(2-\sqrt{3})^{-x}$

$$=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^x}+\frac{1}{(2-\sqrt{3})^x}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{3})^x}{(2+\sqrt{3})^x(2-\sqrt{3})^x}$$

$$+\frac{(2+\sqrt{3})^x}{(2-\sqrt{3})^x(2+\sqrt{3})^x}$$

$$=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x=f(x)$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2)因为

$$f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\frac{1+x}{1-x}$$

$$=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 为奇函数

(3) $f(-x)=[(-x)^2+(-x)]\sin(-x)=-(x^2-x)\sin x$

它不满足 $f(-x)=f(x)$，也不满足 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)=(x^2+x)\sin x$，即不是奇函数，也不是偶函数.

8. 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 a、b、c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，证明 $f(x)$ 是奇函数.

证 先要设法求出 $f(x)$ 的表达式，在 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$ 中，把 x 换成 $\frac{1}{x}$，得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$$

若 $a=0$，$f(x)=\frac{c}{b}x$，显然 $f(x)$ 为奇函数.

若 $a\neq0$，解出 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{a}[cx-bf(x)]$ 代入原式，得

$$af(x)+\frac{b}{a}[cx-bf(x)]=\frac{c}{x}$$

$$f(x)=\frac{\frac{c}{x}-\frac{bc}{a}x}{a-\frac{b^2}{a}}=\frac{c\left(\frac{a}{x}-bx\right)}{a^2-b^2}$$

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)$$

$$=-\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)=-f(x)$$

由此知 $f(x)$ 为奇函数.

9. 获利克莱函数的表达式为

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

试问(1)该函数是否有界?(2)是否为周期函数?若是周期函数,最小正周期是多少?(3)是否为单调函数?(4)是否具有奇偶性?

解 (1)$D(x)$是有界函数.因为对一切$x\in(-\infty,+\infty)$都有$|D(x)|\leqslant 1$.

(2)设r是任意有理数,因为对任意x都有

$$D(x+\gamma)=D(x)$$

所以$D(x)$是周期函数.但由于有理数中没有最小正有理数,故$D(x)$无最小正周期.

(3)$D(x)$不是单调函数.

(4)$D(x)$是偶函数.因为若x为有理数,则$-x$也为有理数,有

$$D(-x)=D(x)$$

若x为无理数,则$-x$也为无理数,也有

$$D(-x)=D(x)$$

10. 若函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,且为偶函数,又$f(x)$的图形关于直线$x=2$对称,证明$f(x)$是以4为周期的周期函数.

证 由已知知$f(x)=f(-x)$,又$f(x)$的图形关于直线$x=2$对称,故有

$$f(x)=f(4-x)$$

于是由上两式得

$$f(-x)=f(4-x)$$

再用x代替$-x$得$f(x)=f(4+x)$,即知$f(x)$是以4为周期的函数.

11. 设$\varphi(x)$、$f(x)$、$F(x)$均为单调增函数,试证:若$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant F(x)$,则$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant F[F(x)]$.

证 因为 $\varphi(x)$、$f(x)$、$F(x)$ 均为单调增函数，又 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant F(x)$，于是可得

$$f[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant f[F(x)]$$

而 $\varphi(x)\leqslant f(x)$，所以 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[\varphi(x)]$.

又 $f(x)\leqslant F(x)$，可得 $f[F(x)]\leqslant F[F(x)]$.

因此

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant F[F(x)].$$

12. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求 $f[\lg x]$，$f(\sin x)$，$f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域.

解 由于 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，因此有 $0\leqslant \lg x\leqslant 1$，解得 $1\leqslant x\leqslant 10$，故 $f(\lg x)$ 的定义域为 $[1,10]$.

对于 $f(\sin x)$，有 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$ 得，

$$2n\pi\leqslant x\leqslant (2n+1)\pi \qquad (n\text{ 为整数})$$

所以 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2n\pi,(2n+1)\pi]$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的并集.

对于 $f(\sqrt{1-x^2})$，有 $0\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant 1$，得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，故 $f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域为 $[-1,1]$.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求 $f(2x)+f(x+1)$.

解 由

$$f(2x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant 2x\leqslant 1\\ 2, & 1<2x\leqslant 2\end{cases}$$

得

$$f(2x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}\\ 2, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

其定义域为 $[0,1]$.

由

$$f(x+1)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x+1\leqslant 1\\ 2, & 1<x+1\leqslant 2\end{cases}$$

得

$$f(x+1)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 2, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

其定义域为[-1,1]. 故

$$f(2x)+f(x+1)=\begin{cases}1+1, & x=0\\ 1+2, & 0<x\leqslant\frac{1}{2}\\ 2+2, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2, & x=0\\ 3, & 0<x\leqslant\frac{1}{2}\\ 4, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

14. 在图 1-1 中所示的等腰梯形 $ABCD$ 中设 $AD=a$, $BC=b$ $(a<b)$, 高 $HB=h$, 引直线 $MN\parallel BH$, MN 与顶点 A 相距 $AM=x$ $(0\leqslant x\leqslant a)$, 试将直线 MN 的左边图形的面积 S 表示成变量 x 的函数

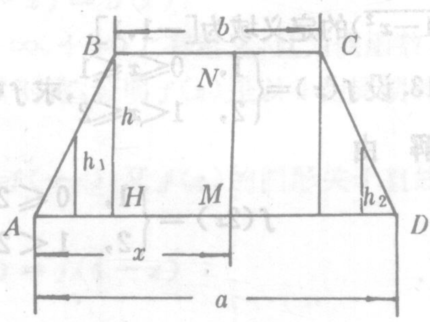

图 1-1

解 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{a-b}{2}$ 时，图形为一三角形，面积为

$$S_1(x)=\frac{1}{2}xh_1$$