现代数学译丛 2

金融数学引论

——从风险管理到期权定价

〔美〕Steven Roman 著

邓欣雨 译

科学出版社

www.sciencep.com

现代数学译丛 2

金融数学引论

——从风险管理到期权定价

〔美〕 Steven Roman 著

邓欣雨 译

科学出版社

北京

图字: 01-2007-3531 号

内 容 简 介

本书介绍投资组合风险管理和期权定价等金融数学的基本知识, 主要包括资本资产定价模型(CAPM)、Black-Scholes 期权定价模型以及未定权益定价中常用的无套利原理和鞅方法. 每章结合实例解释基本概念, 并配有一定量的习题.

本书适合作为高等院校数学、金融或经济学专业的高年级本科生或研究生教材, 也可作为金融证券类从业人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

金融数学引论:从风险管理到期权定价/(美) Steven Roman 著;
邓欣雨译. —北京: 科学出版社, 2008
(现代数学译丛; 2)
ISBN 978-7-03-020744-9

I. 金… II. ①诺… ②邓… III. 金融-经济数学 IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 196408 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 1 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2008 年 1 月第一次印刷 印张: 18 1/2
印数: 1—3 000 字数: 324 000

定价: 63.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈明辉〉)

献给多纳 (Donna)

前言

本书覆盖了金融数学的两大主要领域. 其一是投资组合的风险管理, 在资本资产定价模型处达到最高点; 其二是资产定价理论, 在布莱克 – 舒尔斯期权定价公式处达到最高点. 我们只用一章来讨论投资组合的风险管理. 剩下的部分专注于资产定价模型的研究, 这是当今令人非常感兴趣和研究较多的主题.

本书适合数学、金融或者经济系的高年级本科生或者低年级研究生阅读. 因此, 在本书中没有用到测度论知识.

我认识到本书的读者可能具有不同的背景. 一方面, 数学系的学生在数学上的思考可能有很好的准备, 但是在金融方面 (投资组合、股票期权、远期合约等) 就没有很好的准备了. 另一方面, 金融系和经济系的学生可能精通金融方面的话题, 但是没有数学系学生那么好的数学思维.

既然本书的主题是金融数学, 所以我没有以任何方式来冲淡数学知识 (当然是本书的相应水平). 这就是说, 一方面竭力在相应水平上保持数学上的严谨, 另一方面假设读者没有金融背景, 介绍了一些必要的金融背景知识 (股票期权和远期合约).

我也努力使本书尽量在数学上独立. 除了一定的数学水平外, 掌握一年级的线性代数已经足够. 特别地, 读者应该了解矩阵代数、向量空间和线性变换的核及值域这些概念. 虽然在风险管理方面的一些证明中用到了拉格朗日乘子, 但是如果你喜欢的话, 这些证明可以省略.

当然, 概率论也出现在金融数学领域. 本书在这方面是独立的. 全书有几章专门讲述概率论知识. 该想法是为了提供一些需要了解的必要理论. 这样, 如果读者不打算学习连续情形下的定价理论, 就不需要涉及与连续概率有关的知识.

本书的安排如下. 第 1 章主要讨论离散概率的基础知识. 此章包括诸如随机变量、独立性、期望、方差和最佳线性估计等内容. 如果读者已经学过初等概率论, 那么这一章可以当作一个回顾.

第 2 章主要讨论投资组合理论和风险管理. 主要目的是为了描述著名的资本资产定价模型 (CAPM). 此章与剩余的章节相互独立, 如果喜欢的话, 你可以跳过此章的内容.

本书剩余的章节致力于资产定价模型的讨论. 第 3 章给出了股票期权的必要背景知识. 第 4 章在无套利假设下简要地阐明了资产定价的方法, 主要通过定价标准的远期合约和讨论一些与期权定价相关的话题来说明定价方法, 例如买权和卖权的平价关系, 这牵涉到标的物相同、执行价相同且到期日也相同的买权和卖权的价格.

第 5 章继续讨论离散概率, 包含条件概率和一些较高等的概率知识, 例如样本空间的划分、随机变量、(关于样本空间一个划分的) 条件期望、随机过程和鞅论. 这些都是在离散情形下进行的, 对有些学生来说可能是第一次接触到.

有了第 5 章的概率知识, 读者就已经为处理第 6 章的离散时间模型做好了准备. 第 7 章描述了考克斯 – 罗斯 – 鲁宾斯坦模型 (Cox-Ross-Rubinstein). 此章比较短, 但是介绍了漂移、波动率和随机游走等一些重要问题.

第 8 章介绍了连续概率的一些很基本的知识. 我们需要依分布收敛和中心极限定理的概念, 这样就能在每期的时间长度趋于零时, 对考克斯 – 罗斯 – 鲁宾斯坦模型取极限. 我们在第 9 章实行了极限过程, 得到了著名的布莱克 – 舒尔斯期权定价公式.

第 10 章讨论了可选停时和美式期权. 相对于前面的章节来说, 此章在数学上可能具有挑战.

最后还有两节附录, 都属于可选择的. 在附录 A 中, 我们讨论了在离散模型中对不可达到的未定权益进行定价这个问题. 这可在阅读了第 6 章后的任何时间里来阅读这些材料. 附录 B 涉及了凸性方面的背景知识, 在第 6 章中需用到它.

关于定义的注记

与数学的其他领域不同, 本书的主题 —— 金融数学, 还没有多少适合本科生阅读的著作. 更简单地说, 在金融数学方面很缺乏本科生教材.

因此, 在大学阶段很少有先例制定基本的理论, 因为在该阶段, 教育理论和直觉的运用是第一位的. 缺乏专业的术语来处理某些状况就表明了这一点。

相应地, 很少有情况使我感觉发明新的术语来代替一些特殊的概念是必要的. 可以向读者保证我没有这样做. 我发明术语不是为了任何别的原因，只是为了便于更好地传授知识。

无论如何, 读者会碰到一些我标记了“非标准”的定义. 该标记是为了传达一个事实, 即这些定义可能在其他书中找不到, 也可能超出了本书的范围就不能使用.

致谢

最后, 要感谢我的学生 Lemmee Nakamura,Tristan Egualada 和 Christopher Lin, 他们耐心地听了我的预备课并对原稿提出了宝贵的意见. 当然本书的任何错误 (希望尽量少) 都是我个人的责任, 欢迎读者访问我的网站 www.romanpress.com, 可以更多地了解我的书籍或者留下评论和建议.

Steven Roman

美国加州大学欧文校区 (Irvine)

符号标记和希腊字母表

$\langle , \rangle$	$\mathbb{R}^n$ 上的内积 (点乘)
$\mathbf{1}$	单位向量 $(1, \cdots, 1)$
1_A^S	$A \subseteq S$ 的示性函数
$\mathcal{A} = \{a_1, \cdots, a_n\}$	n 种资产
C	买权价格
e_i	标准单位向量的第 i 个元素
$\mathcal{E}_P(X)$	X 关于概率测度 P 的期望
Φ_i	资产持有过程
K	执行价
μ_X	X 的期望
$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_m\}$	经济的状态
P	卖权价格
$\mathcal{P}_i = \{B_{i,1}, \cdots, B_{i,m_i}\}$	状态的划分
$\mathbb{P}$	概率测度
r	无风险利率
$\mathrm{RV}(\Omega)$	从 Ω 到 $\mathbb{R}$ 的所有随机变量形成的向量空间
$\mathrm{RV}^n(\Omega)$	从 Ω 到 $\mathbb{R}^n$ 的所有随机变量形成的向量空间
S	股票或其他资产的价格
$\sigma = (s_1, \cdots, s_m)$	状态向量
σ_X^2	X 的方差
$\sigma_{X,Y}$	X 与 Y 的协方差
Θ_i	投资组合
$\mathcal{V}_0$	初始成本函数
$\mathcal{V}_T$	损益函数

希腊字母表

A α alpha	H η eta	N ν nu	T τ tau
B β beta	Θ θ theta	Ξ ξ xi	Υ, υ upsilon
Γ γ gamma	I ι iota	O o omicron	Φ ϕ phi
Δ δ delta	K κ kappa	Π π pi	X χ chi
E ϵ epsilon	Λ λ lambda	P ρ rho	Ψ ψ psi
Z ζ zeta	M μ mu	Σ σ sigma	Ω ω omega

目　录

导　言

投资组合的风险管理

为了比其他人赚更多的钱，风险是不可能避免的. 固然，钱生钱这个过程可以不需承担任何风险就可以完成：投资者所需要做的就是购买联邦国债，一般被认为是无风险投资. 该类投资得到的收益率一般不令人满意.

现实问题是，如果每个人都得到相同的收益率，那么该收益仅仅是为了维持现状. 换句话说，如果你想买一辆劳斯莱斯或者一艘游艇，甚至是一块劳力士手表，那么你需要比其他人赚更多的钱，这就需要承担风险.

首要问题就是如何度量一种资产的风险. 这被证明是很简单的. 然而，像生命的剩余部分那样，简单的答案经常被证明是不完美的. 特别地，不仅度量资产的风险很重要，而且度量组合中一种资产与另一资产的交互风险也很重要. 毕竟，最后是靠投资者的整个投资组合表现来区别各投资者的.

当然，一般来说，一种资产的未来回报在当前是未知的. 从概率方面说，资产的回报是**随机变量**. 因此，整个资产组合的回报也是随机变量. 然而，不难发现，通过细心组合资产可能改变组合的全部风险，该风险甚至低于每一单个资产的风险. 这种通过资产选择降低风险的过程称为**分散化**.

从数学上讲，被普遍接受的一种度量资产风险的好方法就是回报的方差 (或标准差). 读者可能知道，方差 (或标准差) 衡量了随机变量可能取值的分散程度. 方差越大，风险显著偏离平均值的这个概率值就越大. 利用相同的表示，组合中一种资产的回报与另一资产的回报的协方差就为交互风险提供了一种很好的度量.

因此，在投资组合管理理论中，需要求资产回报的期望值，也需要求它的方差以及与其他资产之间的协方差. 基于风险 – 收益分析考虑，只有通过这些统计量才能确定将一特定资产加入到组合中去是否合适，如我们将看到的，一个值得注意的简单程序是由资本资产定价模型 (CAPM) 提供的.

CAPM 引出了**市场组合**概念，市场组合是**完全分散化**的风险资产组合. 从理论上看，该组合一定包含了所有可行的资产. 这是因为所有的投资者都想唯一地投资该组合 (与无风险资产一起)，从而任何不被市场组合包含的资产都会被忽视而消失.

从实践的角度来看，市场组合就只是一股热空气. 另一方面，研究表明，可以通过有效地投资少数资产来逼近市场组合. 幸运的是，这也部分地减轻了不良资产问题，因为一种未能进入一投资者“市场组合”的资产可能进入另一投资者的组合.

一旦市场组合 (或者它的近似组合) 被确定, 对于理性投资者 (至少在理论上) 来说, 需要考虑的唯一问题就是如何在风险组合和无风险资产上投资. 这不是数学问题而是投资者的个人内部问题了.

期权定价模型

金融证券或**金融工具**是具有法律效力的合约, 该合约传达了所有权 (比如股票情形)、信用度 (如债券情形) 或者所有者的权力 (如股票期权情形).

一些金融证券的价值依赖另一证券的价值, 这时前一证券称为后一证券的**衍生品**, 而后一证券称为衍生品的**标的证券**. 衍生产品中最著名的例子就是普通的股票期权 (卖权和买权). 这种情况下的标的证券就是股票.

然而, 衍生产品已变得如此流行, 以致它们的标的物更多是一些奇异金融实体, 有一些都不能称为正式的金融证券, 比如利率和汇率. 可能这就是通常将标的实体简单地称为**标的物**的原因吧.

衍生品也可能基于其他衍生品而被衍生出来的. 例如, 可以交易期货合约上的期权. 因此, 某一给定的金融实体在一些情况下可能是衍生品, 在另一些情况下可能就是标的物.

确实, 投资者的商业行为就是为了赚钱, 这可通过承担风险而实现, 意思是说赌博. 与拉斯维加斯的娱乐场所总是在寻找新的赌博来增加自己的利润一样, 投资团体也总在寻找新的金融赌博机会. 这些赌博通常采用奇异衍生品的形式.

在本书中, 我们专注于简单衍生品, 主要是普通的股票期权. 我们对买卖这样的证券很感兴趣. 买方购买一种证券, 就说他在该证券上处于**多头** (long position), 卖方卖出一种证券, 就说他处于**空头** (short position). 称这两种头寸互为**相反头寸** (opposite position).

本书在该部分的中心主题就是寻找一种用来确定衍生品初始价格的方法, 其中衍生品的初始价格为标的资产价格的函数. 这就是**衍生品定价问题**.

衍生品定价问题相对容易解决的唯一时刻就是衍生品的到期时刻. 例如, 如果某一衍生品给你一个权力, 在到期时可以以 \$100 每股的价格购买一股票, 那么, 如果那时的股价低于 \$100, 则该期权没有价值. 另一方面, 如果那时股价为 \$110, 那么衍生品的价值为 \$10. 更一般地, 如果那时股价为 S, 假设不涉及其他额外费用, 则期权价值为 $\max\{S-100,0\}$.

在到期前的任何时候, 衍生品当前价值与标的资产当前价值之间的关系是复杂的, 这就是衍生品定价理论很复杂的原因. 在已知当前情况下, 处理这种复杂关系的唯一方式就是通过假设.

假设

金融市场是复杂的. 与众多复杂系统一样, 建立该系统的数学模型需要做一些简单化假设.

在我们的分析过程中, 将作出一些简单化假设. 例如, 我们假设市场是一个**完美市场**, 意思是该市场满足:

- 没有手续费或交易成本,
- 借贷利率相等,
- 没有卖空限制.

当然, 在现实世界中不存在这样的完美市场, 但是该假设会使分析更简单, 也使我们将精力集中在一些重要问题上, 而这些问题在较少的条件限制下就不那么明显了.

套利

令人惊奇的是, **套利**这个术语包含两种含义. 一般地, 从非技术角度上说, 该术语用来表示一种条件, 在该条件下, 不管环境如何, 投资者能够保证获利.

该术语在技术层面上的使用更广泛, 其含义就有点不同了. **套利机会**是一种投资机会, 保证不会有损失且可能 (存在正的概率) 有收益. 注意不能保证该收益有多大, 但保证不会有损失. 在如何度量收益上我们必须非常小心. 例如, 如果今天的 \$100 在 1 年后变为 \$100.01, 这是真的收益吗? 换句话说, 你愿意参与这样的投资吗? 可能不会, 因为毫无疑问有个无风险收入选择, 比如把钱存在联邦担保的银行里可能会得到更好的收益.

如我们将看到的, 资产定价背后的重要原理就是市场会尽力避免套利. 更具体地说, 如果有一套利机会存在, 那么价格就会被调整以使得该套利机会消失.

举一个简单的例子, 假设在纽约每盎司黄金的价格为 \$380.10, 而伦敦为 \$380.20. 那么投资者可以在纽约购买黄金然后在伦敦卖出, 每盎司获利 10 美分 (假设交易成本没有全部吞没 10 美分). 然而, 在纽约市场上购买黄金会使其在纽约的价格上涨, 而在伦敦市场上出售黄金会使其在伦敦的价格下跌, 结果就是不再有套利.

无套利原理

关于定价的无套利原理其实很简单. 假设有两个投资组合 (包含股票、债券、衍生品等资产), 我们将这两个投资组合标记为组合 A 和组合 B. 考虑两个时期: 初始时期 $t=0$ 和未来时期 $t=T$.

从而每个投资组合有初始价值 (在 0 时的价值) 和最终价值 (在 T 时的价值) 或损益. 记两个组合的初始价值分别为 $\mathcal{V}_{A,0}$ 和 $\mathcal{V}_{B,0}$, 最终价值为 $\mathcal{V}_{A,T}$ 和 $\mathcal{V}_{B,T}$. 组

合 A 的价值如图 1 所示, 对组合 B 也有类似的图.

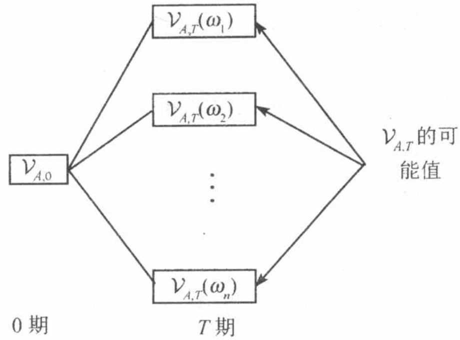

图 1　组合 A 的价值

从图中可以看到, 组合 A 的初始价值已知或者能被确定. 另一方面, 组合 A 的最终价值在 $t=0$ 时未知. 事实上, 我们假设该值依赖 T 时的经济状态, T 时有 n 个可能状态 $\omega_1,\cdots,\omega_n$. 因此, 最终价值 $\mathcal{V}_{A,T}$ 实际上是这些状态的一个函数.

同样地, 我们假设组合 B 的初始价值已知或者能被确定, 最终价值为经济状态的一个函数.

现在, 考虑在任何经济状态下组合 A 和组合 B 都有一模一样的损益时会发生什么, 即对 $i=1,\cdots,n$, 有

$$\mathcal{V}_{A,T}(\omega_i)=\mathcal{V}_{B,T}(\omega_i).$$

则无套利原理暗示着两个组合的初始价值一定相等, 即

$$\mathcal{V}_{A,0}=\mathcal{V}_{B,0}.$$

假设有 $\mathcal{V}_{A,0}>\mathcal{V}_{B,0}$, 那么在完美市场假设下, 投资者可以买入较便宜的组合 B 而卖出较贵的组合 A, 将价差据为己有. 到 T 时, 不管经济处于什么状态, 那时投资者的收入与支出相等. 因此, 他最后没什么损失而享受着最初的利润. 这就是套利.

从而我们看到无套利原理可以用来定价投资组合, 也就是说用来确定投资组合的初始价值. 例如, 为了定价投资组合 A, 我们所需要做的所有事情就是寻找另一投资组合 B, 该组合与组合 A 有相同的损益函数且其初始价值已知. 故组合 A 的初始价值一定等于组合 B 的初始价值.

可以以其他形式使用无套利原理来确定价格. 例如, 如果两个组合的初始价值相等, 那么不可能有一个组合的收益总高于另一组合的收益.

在本书中我们会看到许多利用无套利原理的例子.

第 1 章　概率论 1：离散概率引论

资产定价涉及对未来事件的预测，同样也很依赖概率论知识. 在这一章中，我们开始讨论概率论的基础知识. 考虑到本书后面涉及的主题对概率论知识的需要，我们在后面的章节里还会继续讨论.

概率论似乎起源于对赌博结果的预测，且一般认为它成为一门正式学科是始于 1654 年夏天 Blaise Pascal 和 Pierre de Fermat 两位数学家的一系列书信往来.

1.1　综　　述

在概率论的研究中，典型的场景是试验，比如说掷一对骰子、给病人开药或者预测股票的未来价格. 那么关键点就是试验必须有一个容易确定的可能结果集，该集合被称作试验的样本空间.

样本空间的子集，也就是可能结果的子集，被称作事件. 当特定事件里面的一个结果发生时，我们就说该事件发生了. 因此，比如说在掷骰子的试验中得到的点数和为 7，病人吃药后温度下降到华氏 98.6°，或者股票的价格上升了 10%，这些都可以看成事件.

接下来，必须确定一种测量试验中各种各样的事件发生的概率或者可能性的方法. 更加特别的是，一个事件发生的概率是介于 0 到 1 之间的实数，该数测量了试验发生的结果在该事件中的可能性. 概率为 0 表示该事件不可能发生，而概率为 1 表示该事件一定会发生.

用来确定这些概率的方法并不是概率论这门学科主要研究的. 一般说来有两种方法，一种就是简单地假定概率. 比如，我们考虑抛一枚硬币的试验，那么假设该硬币是均匀的就等价于假定硬币出现正面和反面的概率都是 1/2. 另外一种自然的方法就是统计，利用经验数据来确定概率. 比方说，如果抛 10000 次，出现正面的次数 5003 次，则我们可以说出现正面的概率等于 5003/10000.

概率论的有趣很显然依赖于样本空间的本性. 当处理有限的样本空间时，概率论的基本概念所要求的数学机理非常少，因为在这种情形下，对样本空间中的每一个结果都能够很好地赋予概率，就像上面抛硬币这个例子. 我们很快就将看到，全部的要求就是所有概率值在 0 到 1 之间且加起来等于 1. 那么一个事件的概率就等于该事件所包含的结果的概率和. 有限概率论通常是指有限样本空间的概率论.

举例说明，假设根据对市场的研究，对当前每股价格为 \$100 的股票，我们确定

该股票当天收盘价可能为 \$99、\$100 或者 \$101. 因此, 我们得到一个试验, 其样本空间由该股票所有可能的价格组成

$$\Omega = \{99, 100, 101\}.$$

更进一步, 通过对该股票历史价格的研究, 我们可以确定经验概率如下

$$\mathbb{P}(99) = 0.25, \quad \mathbb{P}(100) = 0.5, \quad \mathbb{P}(101) = 0.25.$$

在该例中, 若收盘时股票价格没有下降, 即 $\{100, 101\}$ 这个事件中的概率为 $\mathbb{P}(100) + \mathbb{P}(101) = 0.75$.

对样本空间的状态无限可数的概率论也可以做同样研究, 至少在起始阶段. 其次, 概率值能够赋予给样本空间中的单个结果. 然而, 这涉及无穷和收敛问题. 离散概率这个术语一般是指样本空间有限或无限可数的概率. 在离散概率方面已经有了许多专著.

作为一个离散样本空间 (不一定有限) 的例子, 我们考虑直到首次出现正面才结束的这样一个抛硬币的试验. 结果就是首次出现正面时所需要抛硬币的次数. 开始我们不能确定试验结果集合是任何有限样本空间, 因为事先没有办法知道在首次出现正面之前需要抛多少次. 所以, 样本空间一定是如下集合

$$\Omega = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

由所有的正整数组成. 确实, 有人会说最终肯定会出现正面, 因为如果不是, 那么该集合也就不能表示所有可能的结果了.

如果该硬币是均匀的, 也就是说出现正面和反面的可能性相等, 那么首次出现正面的**等待时间**等于 k 的概率为

$$\mathbb{P}(\text{第 } k \text{ 次才出现正面}) = \frac{1}{2^k}.$$

因为无限和

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2^k}$$

收敛到 1, 我们得到一个合理的概率测度 (我们将会精确地定义该术语).

为了解释如上概率值为什么是合理的, 显然当 $k = 1$ 时首次出现正面的概率为 $1/2 = 1/2^1$. 当 $k = 2$ 时首次出现正面的唯一情形就是第一次出现反面且第二次出现正面. 但是对于这两次抛硬币会出现四种等可能性的结果

$$(H, H), \quad (H, T), \quad (T, H), \quad (T, T).$$