林 强 王绍民 著

Q. LIN S. WANG

张量光学

——广义光束变换和光束质量

TENSOR OPTICS

——GENERALIZED BEAM TRANSFORMATION AND BEAM QUALITY

杭州大學出版社

Hangzhou University Press

1994

光学前沿丛书

张量光学

——广义光束变换和光束质量——

林　强　王绍民
杭州大学物理系，杭州310028，中国

杭州大学出版社

（浙）新登字第 12 号

张量光学

林　强　王绍民　著

*

杭州大学出版社出版
（杭州天目山路 34 号）

*

浙江省新华书店发行　　杭州市余杭人民印刷厂印刷
787×1092 毫米 1/32　　4.75 印张　　80 千字
1994 年 2 月第 1 版　　1994 年 2 月第 1 次印刷
印数：0001—1000
书号：ISBN7-81035-615-1/O·044
定　价：6.50 元

前　言

张量在数学中被定义为满足一定关系的一组元素所组成的整体，元素的个数由空间的维数 N 及张量的阶数 n 决定. 在三维空间中，零阶张量就是标量，一阶张量就是矢量，二阶张量则由九个元素组成. 张量通常用矩阵表示.

物理学中的量根据其性质的不同可以分别用标量(如质量、热量等)、矢量(如电场强度、速度等)和张量(如力学中的惯量张量、电学中的介电张量等)来表示.

光学中的张量往往出现在非均匀

的、各向异性的介质和非轴对称光学系统中，如折射率椭球张量、复曲率张量等．在这一类系统中，原先可以在二维空间（子午面）内处理的问题必须放在三维空间中去处理；再者，现代光学的研究领域已从空间扩展到时空域，也使得光学系统的维数增加，使得原来可以用标量表示的量必须扩展成张量．

矩阵方法在处理光束变换中具有十分重要的作用．当涉及到非轴对称光学系统时，常规的 2×2 阶矩阵便不够用了．可以发现用张量的方法来处理非轴对称光束的三维变换和脉冲光束的四维变换具有突出的优点．因此，近六年来我们对张量方法作了较多的发展，并逐步形成了一个新的研究方向——张量光学．

《张量光学》的内容涉及到几何光学、物理光学、激光束光学、傅里叶光学等领域．本书第一章主要讨论了在三维空间中高斯光束的传输和变换及其应用；第二章讨论了在四维时空域中脉冲高斯光束的变换；第三章则讨论了非高斯光束的光束质量及其传输规律．

本书的大部分内容是作者及其国内外合作者近年来的研究成果．它力求反映这一领域的最新进展，但不求面面俱到，因为许多前沿课题如光束质量、时空耦合等正在研究和发展之中．顺便指出，张量方法还适用于偏振光的传输等，因这方面已有相应的专著，本书未予论述．

在《张量光学》的形成过程中，E. Bernabeu 教授、J. Alda 教授(西班牙)曾与我们进行过有效的合作；H. Weber 教授(德国)、邓锡铭教授、M. Nakatsuka 教授(日本)、周国生教授、范滇元教授、吕百达教授、张筑虹副教授等曾给予热情的协助，或与我们进行了有益的讨论；本研究组的王效敬副教授、陆璇辉副教授、谢先闻副教授以及研究生林国成、江晓清、赵道木、王中阳参加了部分工作；张在宣教授审阅了全书，并提出了很好的建议；在本书的出版过程中始终得到了蒋保纬副总编和杭州大学出版社有关同志的大力支持，在此一并致以诚挚的谢意！

作者还衷心地感谢国家 863 激光技术青年科学基金和浙江省自然科学基金委员会的立项资助.

1993 年 10 月于杭州

林　强　王绍民

目　　录

第一章

连续高斯光束的三维变换

1.1 4×4阶变换矩阵

非轴对称光学系统有许多应用，如空间变化的光学信息处理[1]、三维光学谐振腔[2]、转像系统[3]等.通常的 2×2 阶光线变换矩阵不能处理非轴对称光学系统中的光线变换或轴对称光学系统中的空间光线传输.

对一个包含非轴对称元件的光学系统，取其光轴垂直于 x-y 平面，在近轴条件下，该系统可用 4×4 阶光线变换矩阵描写[4,5]，其定义为：

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_2{}' \\ y_2{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1{}' \\ y_1{}' \end{bmatrix}, \qquad (1.1)$$

或写成张量形式[6,7]

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_2 \\ \vec{r}_2{}' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right] \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_1{}' \end{bmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \vec{r}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \qquad (1.2)$$

其中 $\vec{r}$ 为光线矢端的位置矢量，$\vec{r}'$ 为方向矢量，A、B、C、D 均为 2×2 阶分块矩阵. 一些常见非轴对称元件的 4×4 阶矩阵可用光线追迹法得到，如光焦度在 y 方向的柱透镜的 4×4 阶光线变换矩阵为

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{f} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (1.3)$$

如果柱透镜相对 x 轴旋转了一个任意角度 α(如图 1)，则其变换矩阵为：

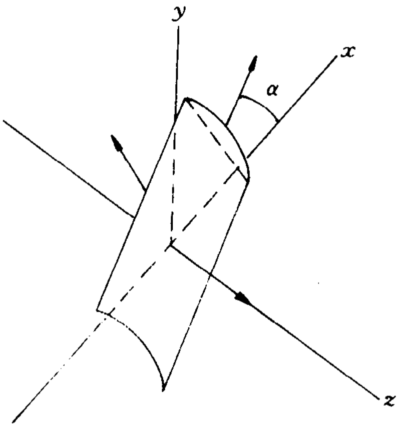

图 1　任意取向的薄柱面透镜

$$L_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} L_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ \Phi & \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

其中 ε 是 2×2 阶单位矩阵，0 是 2×2 阶零矩阵，而

$$\Phi = \frac{1}{f}\begin{pmatrix} -\sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

同样，长度为 d 的自由空间的变换矩阵为

$$M_d = \begin{pmatrix} \varepsilon & d\varepsilon \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

对一个多元件的非轴对称系统，其变换矩阵可由各个元件的矩阵相乘得到. 附录 I 给出了几种常见非轴对称元件的变换矩阵.

实际中经常碰到光线的反向传输问题，如光学谐振腔中的来回反射. 非轴对称系统的反向传输矩阵为：

$$\underleftarrow{\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_1{}' \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} D^T & B^T \\ C^T & A^T \end{pmatrix} \underleftarrow{\begin{pmatrix} \vec{r}_2 \\ \vec{r}_2{}' \end{pmatrix}}. \tag{1.7}$$

其中右上标“T”表示矩阵转置，下同.

根据定义(1.2)，分块矩阵 A 表示线放大率，B 表示有效厚度，C 表示光焦度，D 表示角放大率. 对于完全成像系统(x、y 方向均成像)，$B=0$；对于部分成像系统(只在某一方向成像)，$\det(B)=0$. 因此，从光学系统的 4×4 阶变换矩阵中可以看出其光学性质，反之，给定一个 4×4 阶变换矩阵，可以用矩阵分解法来设计实际的光学系统[8].

在 $\det(B)\neq0$ 时，从(2)可得

$$\begin{pmatrix}\vec{r}_1{}'\\ \vec{r}_2{}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-B^{-1}A & B^{-1}\\ C-DB^{-1}A & DB^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{r}_1\\ \vec{r}_2\end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

在傍轴条件下，从输入面(x_1,y_1)到输出面(x_2,y_2)的程函可表示为[5,6]

$$\begin{aligned}l&=l_0+\frac{1}{2}[-n_1(x_1x_1{}'+y_1y_1{}')+n_2(x_2x_2{}'+y_2y_2{}')]\\ &=l_0+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\vec{r}_1\\ \vec{r}_2\end{pmatrix}^T R\begin{pmatrix}\vec{r}_1\\ \vec{r}_2\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

其中 l_0 为轴上光程，n_1、n_2 分别为入射空间和出射空间

的折射率，R 为 4×4 阶矩阵，可称为程函矩阵：

$$R = \begin{bmatrix} n_1 B^{-1} A & -n_1 B^{-1} \\ n_2 (C - D B^{-1} A) & n_2 D B^{-1} \end{bmatrix}. \qquad (1.10)$$

由于程函 l 是标量，故 R 具有转置对称性，因此有

$$\begin{cases} n_1 (B^{-1} A)^T = n_1 B^{-1} A, \\ (-n_1 B^{-1})^T = n_2 (C - D B^{-1} A), \\ (n_2 D B^{-1})^T = n_2 D B^{-1}. \end{cases} \qquad (1.11)$$

从(1.11)可以直接推得

$$\begin{cases} A D^T - B C^T = \dfrac{n_1}{n_2} \varepsilon, \\ A^T D - C^T B = \dfrac{n_1}{n_2} \varepsilon. \end{cases} \qquad (1.12)$$

因此，4×4 阶光线变换矩阵的分块矩阵元之间并非完全独立，只有三个是独立的，任意一个可从其它三个中得到.(1.12)式非常类似于轴对称光学系统的行列式值，即对应于拉格朗日不变量.(1.12)式可用来检验复杂系统

计算的正确性.

除了非轴对称系统以外,4×4 阶光线变换矩阵对轴对称系统中空间光线的分析也是十分简便的.

例　梯度折射率光纤中的空间光线

对于折射率按径向二次方分布的介质,

$$n(r) = n(0)(1 - \beta_0 r^2),(\beta_0 > 0). \tag{1.13}$$

其空间光线的变换矩阵可用光线方程解出,结果为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dfrac{a_2}{\sqrt{2\beta_0}} & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \dfrac{a_2}{\sqrt{2\beta_0}} \\ -\sqrt{2\beta_0}\, a_2 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2\beta_0}\, a_2 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

其中 $a_1=\cos(z\sqrt{2\beta_0})$,$a_2=\sin(z\sqrt{2\beta_0})$.

或写成变换式

$$
\begin{cases}
x_2 = x_1 \cos(z\sqrt{2\beta_0}) + x_1' \dfrac{1}{\sqrt{2\beta_0}} \sin(z\sqrt{2\beta_0}), \\
y_2 = y_1 \cos(z\sqrt{2\beta_0}) + y_1' \dfrac{1}{\sqrt{2\beta_0}} \sin(z\sqrt{2\beta_0}).
\end{cases}
\tag{1.15}
$$

梯度折射率介质中有一类特殊的空间光线，它们在传输过程中与光轴的距离保持不变，这种光线称为螺旋线，即满足

$$
r^2 = x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} = x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}. \tag{1.16}
$$

把(1.15)代入(1.16)，得到螺旋线应满足的初始条件

$$
\begin{cases}
x_1' = \pm\, y_1 \sqrt{2\beta_0}, \\
y_1' = \mp\, x_1 \sqrt{2\beta_0}.
\end{cases}
\tag{1.17}
$$

图 2 示出了一条特殊的螺旋线，它是在 $y_1=0, x_1'=0$ 的入射条件下产生的.

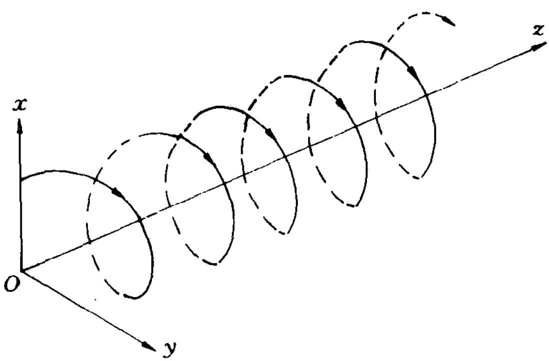

图 2　梯度折射率介质中的螺旋式光线

1.2　张量 *ABCD* 定律

矩阵方法在处理高斯光束的变换中是十分方便的. 如圆对称高斯光束通过轴对称系统的变换满足熟知的 *abcd* 定律

$$q_2 = \frac{aq_1 + b}{cq_1 + d}. \tag{1.18}$$

当圆对称光束通过象散透镜($f_x \neq f_y$)变换时,它将变成象散光束;另外,从某些激光器输出的光束本身也是非轴