全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

何 东 张 虹◎主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线 性 代 数

何 东 张 虹 主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/何东，张虹主编．—北京：中国农业出版社，2007.9

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-11943-7

Ⅰ．线…　Ⅱ．①何…②张…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 142347 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100026）

责任编辑　朱雷　刘新团

北京中兴印刷有限公司印刷　　新华书店北京发行所发行

2007 年 9 月第 1 版　　2007 年 9 月北京第 1 次印刷

开本：720 mm×960 mm　1/16　　印张：8.25

字数：180 千字

定价：14.00 元

编写人员名单

主　　编　何　东　张　虹

副 主 编　孙冬梅　夏　晶

参编人员　闫善文　张　丽

主　　审　刘振忠

内 容 提 要

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材，主要内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、矩阵的特征值及特征向量、二次型．

本书作为线性代数课程教材，结合高等农林院校各专业对线性代数课程的不同要求，在内容、结构方面进行了精心安排，力求深入浅出，通俗易懂．本书除作为教材外，也可供科技工作者自学选用．

前　言

本书作为线性代数课程教材，是根据农林院校各专业对本课程教学内容的要求和我们多年的教学体会编写的．由于农林院校基础课学时的限制，我们对教学内容进行了精心选择，在内容体系上不过多地追求内容的系统与完整，以利于学生在限定的学时内更好地掌握教学要求所规定的内容．为适应不同专业、不同层次学生对教学内容的需求，使教学中具有较大的选择余地，本教材为有较高要求的专业与学生提供了选学内容，该部分内容加“*”号标注，教师与学生可从中自行选择．若略去该部分内容，不会影响后面的讲授与学习．

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材，由黑龙江八一农垦大学、华南热带农业大学、大庆师范学院等院校有多年教学经验的教师共同编写．主编由黑龙江八一农垦大学何东、张虹担任。编写分工情况如下：第一章由张丽（黑龙江八一农垦大学）编写，第二章由何东编写，第三章由孙冬梅（华南热带农业大学）编写，第四章由张虹编写，第五章由闫善文（黑龙江八一农垦大学）编写，第六章由夏晶（大庆师范学院）编写．

本书由黑龙江八一农垦大学刘振忠教授担任主审．

由于编者水平有限，书中难免会有错误与疏漏之处，恳请读者指正．

编　者

2007.8

郑 重 声 明

目　　录

第一章　行 列 式

历史上，行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的．如今，它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用，是一种常用的计算工具．本章从求解二元、三元线性方程组入手，引入二阶、三阶行列式的概念，然后推广到 n 阶行列式，进而讲解行列式的性质、计算方法及求解 n 元线性方程组的克莱姆法则．

§1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

引例　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

其中 x_1，x_2 是未知量，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 是未知量的系数，b_1，b_2 是常数项．

解　用消元法分别消去式（1）中第一个方程的 x_2 和第二个方程的 x_1，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

式（2）中，x_1，x_2 的分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由未知量的系数经乘法和减法运算得到的．为了便于记忆，用记号表示如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

一般地，将

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{3}$$

称为**二阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**，a_{ij}（i，$j=1$，2）称为行列式 D 的**元素**，i 为**行标**，j 为**列标**．

为便于记忆，将行列式中从左上角至右下角的连线称为**主对角线**，行列式

中从左下角至右上角的连线称为**副对角线**．二阶行列式是主对角线上的两个元素之积减去副对角线上两个元素之积．

根据二阶行列式定义，式（2）可改写为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}\ (D\neq 0). \quad (4)$$

式（4）中 D 是以未知量的系数为元素构成的行列式，称为方程组的**系数行列式**．D_1 是以方程组右端的常数项代替 D 中 x_1 的系数而得的二阶行列式；D_2 是以方程组右端的常数项代替 D 中 x_2 的系数而得的二阶行列式．

例 1 解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=8, \\ x_1-2x_2=-3. \end{cases}$$

解
$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times 1=-7\neq 0,$$
$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7,$$
$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times 1=-14.$$

所以
$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

1.1.2 三阶行列式

引例 求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \quad (5)$$

解 用消元法分别消去式（5）中方程组中各方程的 x_2 与 x_3、x_3 与 x_1、x_1 与 x_2，当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$ 时，得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}, \\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}. \end{cases} \quad (6)$$

为了便于记忆，我们将式（6）中的分母用记号表示如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

一般地，将

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix} \tag{7}$$

称为**三阶行列式**，一般用记号 D 来表示. 称式（7）中等式右端为**三阶行列式 D 的展开式.**

为了便于记忆三阶行列式的展开式中的各项及其符号，我们用图 1－1 说明：

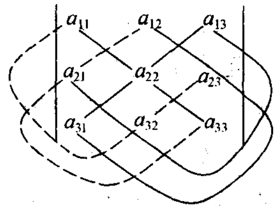

图 1－1

其中，实线连接的三个数之积取正号，虚线连接的三个数之积取负号（此法仅限于三阶行列式）. 由此可知，三阶行列式展开式共有 $3!=6$ 项，且每项都有三个元素相乘，这三个元素既位于 D 中不同的行又位于 D 中不同的列.

由三阶行列式定义可知，式（6）中 x_1，x_2，x_3 的分子可分别改写为行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}, \tag{8}$$

其中，D 是方程组的系数行列式，分子 $D_j(j=1,2,3)$ 是用常数项 b_1，b_2，b_3 分别替换系数行列式 D 中第 $j(j=1,2,3)$ 列元素所构成的行列式.

例 2　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3=1, \\ -x_1+3x_2-x_3=2. \end{cases}$$

解　$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=2\times2\times(-1)+(-1)\times1\times(-1)+3\times3\times1$
$-1\times2\times(-1)-(-1)\times3\times(-1)-2\times1\times3$
$=-1\neq0,$

$$D_1 \doteq \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -4,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 9,$$

于是得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-4}{-1} = 4,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{-1} = -1,\ x_3 = \frac{9}{-1} = -9.$$

§1.2 n 阶行列式

1.2.1 排列与逆序

为给出 n 阶行列式的概念，先介绍有关排列、逆序的知识．

定义 1 把 n 个不同的元素按一定的顺序排成一列，叫做这 n 个元素的一个**全排列**（简称为**排列**）．

元素 1，2，…，n 的全排列共有 $A_n^n = n!$ 种．对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间的标准次序（例如 n 个不同的自然数，规定由小到大为标准次序），于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个**逆序**．一个排列中所有逆序的总数叫做这个**排列的逆序数**．逆序数为偶数的排列为**偶排列**；逆序数为奇数的排列为**奇排列**．

例如，1 2 3 为标准顺序，3 2 1 的逆序数为 3，是奇排列．

排列的逆序数可按如下方法计算：

设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为 1 2…n 的一个排列．对每个元素 $i_k (k=1, 2, \cdots, n)$，如果比 i_k 大的且排在 i_k 前面的元素有 t_k 个，就说 i_k 的逆序数是 t_k. 全体元素的逆序数之和为排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数，即

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k. \tag{9}$$

例 3 求排列 3 2 5 1 4 的逆序数．

解 在排列 3 2 5 1 4 中，元素 3 排在首位，其逆序数为 0，记 $t_1=0$；元素 2 的前面比 2 大的数有 1 个，其逆序数为 1，记 $t_2=1$；元素 5 是最大数，其逆序数为 0，记 $t_3=0$；元素 1 的前面比 1 大的数有 3 个，其逆序数为 3，记 $t_4=3$；元素 4 的前面比 4 大的数有 1 个，其逆序数为 1，记 $t_5=1$. 于是这个排列的逆序数为

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 0+1+0+3+1 = 5.$$

1.2.2 n 阶行列式的定义

观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \end{array}$$

可以看出：

（ⅰ）三阶行列式的展开式中共有 $6=3!$ 项；

（ⅱ）每项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积；

（ⅲ）每项的符号是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号．

三阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{10}$$

其中 t 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数，$\sum$ 的求和指标为元素列标 1、2、3 的所有排列 $j_1j_2j_3$.

定义 2 用 n^2 个元素 a_{ij}（i，$j=1$，2，…，n）组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，常记为 D，也记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$．它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，各项的符号是：当该项各元素的行标按自然顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号．

特别规定一阶行列式 $|a|=a$（注意不要与绝对值符号相混），并沿用二阶、三阶行列式所用的术语．

n 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{11}$$

其中 t 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，$\sum$ 的求和指标为元素的列标 1，2，…，n 的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$.

例 4 判断下列各式是否为四阶行列式的项，如果是，判定其符号.

(1) $a_{11}a_{23}a_{34}a_{41}$，　(2) $a_{11}a_{23}a_{34}$，　(3) $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$.

解 (1) 由于该式含有第一列的两个元素，所以不是四阶行列式的项；

(2) 该式不含第四行的元素，所以不是四阶行列式的项；

(3) 该式由位于不同行不同列的 4 个元素组成，是四阶行列式的项，说明行标按自然顺序排列标的排列 2 3 1 4 为奇排列，所以取负号.

例 5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 记 D 的元素为 a_{ij}，其一般项为 $(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$. 只考虑不为零的项，由于第一行中只有 $a_{14}\neq 0$，故 j_1 只可能取 4；同理可得 $j_2=3$，$j_3=2$，$j_4=1$，即展开式中只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$非零并且逆序数 $t=6$. 所以，行列式

$$D=(-1)^t a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=(-1)^6\times 1\times 2\times 3\times 4=24.$$

例 5 的行列式中,除副对角线上元素外其余元素全为 0,此类行列式可以直接求出,其值等于 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 与副对角线上各元素的乘积. 特别地，非主对角线上元素全为 0 的行列式称为**对角行列式**，其值等于主对角线上各元素的乘积. 而主对角线以下（上）的元素全为 0 的行列式称为**上（下）三角（形）行列式**.

例 6 证明上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 一般项为 $(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，现考察不为零的项. a_{nj_n} 取自第 n 行，但只有 $a_{nn}\neq 0$，故只可能 $j_n=n$；$a_{n-1j_{n-1}}$ 取自第 $n-1$ 行，只有 a_{n-1n-1} 及 a_{n-1n}不为零；因 a_{nn} 取自第 n 列，故 $a_{n-1j_{n-1}}$ 不能取自第 n 列，从而 $j_{n-1}=n-1$；同理可得，$j_{n-2}=n-2$，…，$j_1=1$

故

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角行列式等于主对角线上各元素的乘积．类似地，可以证明下三角行列式的值也等于主对角线上各元素的乘积．

1.2.3　对换

为进一步研究 n 阶行列式的性质，先讨论对换的概念及其与排列奇偶性的关系．

定义 3　在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素位置不动，这种作出新排列的交换叫做**对换**．将相邻两个元素对换，叫做**相邻对换**．

定理 1　任意一个排列经过一个对换后，其奇偶性改变．

***证明**　先证相邻对换的情形．

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$.

显然，a_1，…，a_l，b_1，…，b_m 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a，b 两元素的逆序数改变为：

当 $a<b$ 时，经过对换后 a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经过对换后 a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同．

再证一般对换的情形．设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$

对它做 m 次相邻对换，变成排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再做 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反．

推论　奇排列变成自然顺序排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然顺序排列的对换次数为偶数．

定理 2　n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^t a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{12}$$

其中 t 为行标与列标排列的逆序数之和，即 $t=t_1(i_1i_2\cdots i_n)+t_2(j_1j_2\cdots j_n)$.

***证明**　按行列式定义有

$$D=\sum(-1)^{t_2}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

令

$$D_1=\sum(-1)^t a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{13}$$

交换 D_1 的一般项中两元素的位置，相当于同时进行一个行标的对换和一个列标的对换．故交换位置后一般项的两下标排列逆序数之和的奇偶性保持不变．这样总可以经过有限次的位置交换，使其行标换为自然数顺序排列，即变为定

义式 D 的一般项，因此，$D_1=D$. 即 D 的一般项也可以记为式（12）的形式.

证毕

D 也可定义为

$$\sum(-1)^t a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}, \tag{14}$$

其中，t 为行标排列的逆序数.

§1.3 行列式的性质

由前两节知，根据行列式的定义计算高阶行列式的值非常麻烦，因此有必要研究 n 阶行列式的性质，以便简化行列式的计算.

定义 4 将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

相应的行换成相应的列，得到的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为行列式 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

由定义 4 可知，$b_{ij}=a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，由行列式的定义式（11）和式