新世纪高等职业教育数学课程教材

高等数学及其应用

主 编 沈跃云 马怀远

主 审 高建宁 李 畅

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

新世纪高等职业教育数学课程教材

高等数学及其应用

主编　沈跃云　马怀远
主审　高建宁　李　畅

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部制定的高职高专教育基础课程教学基本要求和高职高专教育专业人才培养目标及规格编写的高职数学教材.本教材以"数学素质是数学教学的灵魂"为指导思想,突出微积分的基本思想和基本方法,着重培养学生的思维能力、应用能力、自学能力和创新能力.

本书共六章,分别是:函数极限与连续、导数和微分、积分、常微分方程、二元微积分、无穷级数.每章都由"基础知识"、"应用"、"总结·拓展"三个部分组成.书中还初步介绍数学建模的内容与方法,并引进流行并常用的Matlab数学软件包,以提高学生利用计算机及数学软件包技术解高等数学问题及数学模型的能力.

本书适合普通高等职业院校"高等数学"课程使用,也适合开展五年制高职教育的院校使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及其应用/沈跃云主编.—北京:高等教育出版社,2007.9

ISBN 978-7-04-022166-4

Ⅰ.高... Ⅱ.沈... Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第148309号

策划编辑	徐 东	**责任编辑**	徐 东	**封面设计**	吴 昊	**责任印制**	潘文瑞

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号		021-56964871
邮政编码	100011	**免费咨询**	800-810-0598
总 机	010-58581000	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
传 真	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
排 版	南京理工出版信息技术有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	江苏南洋印务集团	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	**版 次**	2007年9月第1版
印 张	16.75	**印 次**	2007年9月第1次
字 数	410 000	**定 价**	22.00元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

物料号 22166-00

前 言

本教材以“数学思想方法是数学教学的灵魂”为指导思想，突出微积分的基本思想和基本方法，在知识、能力、素质的三维空间构建数学内容体系，着重培养学生的思维能力、应用能力、自学能力和创新能力，从而全面提高学生的数学素质.

全书共六章，分别是函数极限与连续、导数与微分、积分、常微分方程、二元微积分、无穷级数. 每章都由三部分组成，分别是基础知识、应用、总结・拓展.

本教材主要针对高等职业学生编写，与普通专科《高等数学》教材相比有很大区别，无论教学内容，还是到对教材建议的考核形式都有大胆的设想，特色明显，主要体现在以下几个方面：

1. 贯彻“以应用为目的”与“以必需、够用为度”的原则. 本书对基础知识必学内容进行了合理的组合，同时省略了某些定理的严格证明，不求深，不求全，只求实用，注意与专业课接轨，体现“有所为，必须有所不为”，追求全书体系的整体优化；

2. 注重数学文化思想的渗透，在教材开篇和每章分别介绍了微积分发展简史和数学家轶事等；

3. 注重渗透现代数学思想，初步介绍数学建模的内容与方法，引进常用的 Matlab 数学软件包，以提高学生利用计算机及数学软件包技术解高等数学问题及建数学模型的能力；

4. 例题和习题经过精心设计与编选，与概念、理论、方法紧密结合. 习题中带“*”的题是拓展内容的练习题，题量充足，教师和学生不需要另配习题册就可以巩固所学知识，满足教学需要；

5. 拓展部分留给学生自主学习，符合高等职业教学的理念.

6. 教材编写时注重微积分在经济、工程中的应用，注重与考核形式的挂钩.

下面是本教材教学使用的建议：

内　　容	建议学时	教学模式	建议考核形式	适合专业
第一章　函数极限与连续 基础知识部分	14	课堂教学	笔试	经济类 理工类
第二章　导数和微分 基础知识部分	12	课堂教学	笔试	经济类 理工类
第三章　积分 基础知识部分	18	课堂教学	笔试	经济类 理工类
第四章　常微分方程 基础知识部分	6	课堂教学	笔试	经济类 理工类
第五章　二元微积分 基础知识部分	10	课堂教学	笔试	经济类 理工类

续 表

内 容	建议学时	教学模式	建议考核形式	适合专业
第六章 无穷级数 基础知识部分	12	课堂教学	笔试	经济类 理工类
第一～六章 软件应用计算部分	3 小时	讲座	应用到论文中	经济类 理工类
第一～六章 经济应用部分	3 小时	讲座	论文	经济类
第一～六章 工程应用部分	3 小时	讲座	论文	理工类
第一～六章 拓展部分	根据各学校 实际情况决定	自学或选学	不参与考核	经济类 理工类

下面是“高等数学”课程考核方式的建议：

1. 考试方式采用基础考试和实践考试两种方式.

基础考试范围是教材中基础知识部分. 考试题型与教材上的例题与习题相近，这样可促使和养成学生认真读书的良好习惯，使学生具有较为扎实的基本功. 实践考试范围是教材中应用部分. 按照教师的两次讲座写一篇论文或报告. 主要是考察学生应用数学知识解决实际问题的能力.

2. 考试时间：基础考试为 90 分钟，在期末进行；实践考试在平时进行以论文或报告形式.

3. 课程学习评价方法：基础考试总分为 100 分，考试成绩≥60 分视为合格，考试成绩<60 分视为不合格，基础考试不合格的必须参加补考（不论其实践考试的成绩怎样）；实践考试总分为 40 分.

基础考试合格者的总分计算公式为：$60+0.2(A-60)+0.8B$.

其中，A 表示基础考试的分数，B 表示实践考试的分数.

例如，某位同学基础考试得 85 分，实践考试得 30 分，那么，该位同学的总分为：$60+0.2(85-60)+0.8\times30=89$(分).

本教材由沈跃云、马怀远担任主编，高建宁、李畅担任主审. 本教材具体编写人员有：宋涟钟（第 1 章），查进道（第 2 章和附录 2），马怀远（第 3 章、附录 1 和微积分发展简史），宋兵（第 4 章），沈跃云（第 5 章），李继玲（第 6 章），韩鑫（每章的数学文化小故事），朱峰（附录 3 和每章的软件应用计算）. 本教材框架结构的确定、统稿、审稿等工作由高建宁、李畅、沈跃云、马怀远承担. 教材在编写时得到了江苏经贸职业技术学院领导的大力支持，以及韩彦林等数学同行的帮助，在此深表感谢！

由于编者的水平所限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，还望同仁及读者不吝赐教.

编 者

2007 年 8 月

微积分发展简史

微积分是微分学(Differential Calculs)和积分学(Integral Calculs)的统称,英文简称Calculs,意为计算.这是因为早期微积分主要用于天文学、力学以及几何学中的计算问题.后来人们也将微积分称为分析学(Analysis),或称无穷小分析,意指用无穷小或无穷大等极限过程分析处理计算问题.

微积分诞生于17世纪,是由牛顿(Newton)与莱布尼茨(Leibniz)在前人的基础上各自独立创立的,微积分的产生是人类智慧的光辉结晶,是人类自然科学史上最重大的事件之一,是开启近代文明的钥匙,对当时自然科学的各个领域,如力学、天文学、物理学以及数学本身的发展,产生了空前巨大的推动作用,充分显示了数学对人类文明的影响.

虽然直到17世纪,微积分才真正创立,但微积分的萌芽和发展酝酿却是从公元前就开始了.

早在公元前4世纪前后,我国产生了"一尺之棰,日取其半,万世不竭"的极限观念.公元3世纪,刘徽的"割圆术";公元5~6世纪的祖冲之、祖暅对圆周率、面积和体积的研究,也应用了极限的思想方法.同时期,古希腊时期的数学家就已经初步有了极限的思想,如欧多克斯(Eudoxus)、阿基米德(Archimedes)的著作中都有一些"无限"思想和研究.

到了16世纪至17世纪上半叶,随着科学技术的发展和对数学研究的深入,一些长期未能解决的数学问题的研究促进了微积分的发展.一批杰出数学家从几何等各个角度为微积分的正式诞生奠定了基础,如开普勒(Kepler)、巴斯卡(Pascal)、费马(Fermat)、巴罗(Barrow)等.但他们的工作仍然没有能全面、完整地解决微积分的一些基本问题.

与此同时,随着天文学、力学、航海、机械以及解析几何等许多新兴科学的巨大发展,一大批迫切需要解决的力学和数学问题,摆在数学家面前:例如,已知物体的移动距离为 $s=s(t)$(t 为移动的时间),如何求瞬时速度;已知曲线如何求其上某一点的切线;如何求曲线围成的平面图形的面积等.

正是在这个背景下,17世纪下半叶,微积分应运而生了.

牛顿是那个时代的科学巨人,对力学、天文学、数学、光学都作出了卓越的贡献.他从力学的研究出发,发现了微积分的一般计算方法,确立了微分与积分的逆运算关系(微积分基本定理),他在其划时代巨著《自然哲学之数学原理》中首次发表了这些成果,并把微积分称为"流数术".

莱布尼茨也是同时代的杰出数学家,同时也是杰出的哲学家.他主要从几何角度出发研究了微积分的基本问题,确立了微分与积分之间的互逆关系.莱布尼茨创设了便利的记号"dx"、"$\int$"沿用至今.

微积分诞生以后,尽管应用于科学技术并取得了许多辉煌的成就,其本身也在迅速地发展,完善.这一时期的大数学家,如欧拉(Euler)、拉格朗日(Lagrange)、拉普拉斯(Laplace)、勒让德(Legendre)、达朗贝尔(D'Alembert)、傅里叶(Fourier)等都为此作出过巨大贡献.但

同时微积分也不断暴露出问题和不足，特别是微积分并没有建立在严格的极限理论基础上.牛顿、莱布尼茨是用不甚严密的方法建立起微积分的理论的，微积分的发展历史并不是如我们今天学习的顺序一样——先有极限理论，再有求导数、求积分.尽管很多数学家对弥补这一缺陷作出了努力，但收效甚微.

直到19世纪后，在波尔查诺(Bolzano)、阿贝尔(Abel)，特别是柯西(Cauchy)、维尔斯特拉斯(Weierstrass)、戴德金(Dedekind)等数学大师的努力下，微积分的极限基础才得以建立.1821年，柯西以无穷小作为基本工具比较明确地给出了极限的概念，这也就是本书所采用的极限概念.但这仅是一种描述性定义，严格的极限定义直到1856年才出现.

微积分发展到今天已远远超越了当初的面貌，以微积分为基础而发展起来的许多数学学科，如微分方程、积分方程、复变函数、实变函数、微分几何等，不仅日渐成熟，而且在实践中获得了广泛的应用，成为数学大厦中的重要部分.微积分的思想方法也深深地印刻在数学发展的历史上，成为人类文化的重要组成部分.

牛顿和莱布尼茨的时代与我国清朝的康熙年间相当，但中国直到1895年才有了第一本微积分著作的中译本，是由晚清杰出的数学家李善兰与传道士伟列亚力合译的.这本书上首次出现了微分、积分等名词."五四"运动以后，微积分作为大学课程普遍开设，我国的现代数学迎来全面发展的时期.解放以后，微积分更加普及，研究水平也不断提高，在若干项目上，已居世界领先地位.时至今日，微积分已成为普通高校的必修课程，一些基础知识也进入了中学的课堂.

微积分，作为人类文明的宝贵财富，已经并继续深刻影响着我们的生活.

目 录

第一章

函数的极限与连续

数学文化小故事一

——我国古代数学家的故事

无穷作为一个极富迷人魅力的词汇，长期以来就深深激动着人们的心灵.彻底弄清这一概念的实质成为维护人类智力尊严的一种需要.早在远古时代，无限的概念就比其他任何概念都激动着人们的感情，而且远在两千年以前，人们就已经产生了对数学无穷的萌芽认识.

在我国，著名的《庄子》一书中有言："一尺之棰，日取其半，而万世不竭."从中就可体现出我国早期对数学无穷的认识水平.我国是第一个创造性地将无穷思想运用到数学中的，运用相当自如的是魏晋时期著名数学家刘徽.他提出用增加圆内接正多边形的边数来逼近圆的"割圆术"，并阐述道："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣."可见刘徽对数学无穷的认识已相当深刻，正是以"割圆术"为理论基础，刘徽得出徽率，而其后继者祖冲之更是得出了圆周率介于 3.141 592 6 与 3.141 592 7 之间的领先国外上千年的惊人成果.

祖冲之(公元 429—500 年)是我国南北朝时期，河北省涞源县人.他从小就阅读了许多天文、数学方面的书籍，勤奋好学，刻苦实践，终于使他成为我国古代杰出的数学家、天文学家.下面把他在数学方面的研究过程编成故事，与大家共勉.

夜很深了，桌上的油灯已经加了两次油.书桌上堆放着已经看完的《周骸算经》竹简，张衡的《灵显》竹简，祖冲之手中正在翻阅刘徽给《九章算术》作的注解，他被刘徽在深入学习古人成果，广泛实践的基础上，用高度的抽象概括力建立的"割圆术"与极限观念所折服，不禁拍案而起.连连称赞："真了不起!"在一边专心致志看书的儿子被这突如其来的声音所震动，忙问："爸，谁了不起了?""我说刘徽了不起."祖冲之的眼睛仍然停留在竹简上."刘徽是谁?"当时只有十一二岁的孩子还不知道刘徽是个什么样的人."三国时代的科学家.""他有什么地方了不起呢?""他用极限观念建立了'割圆术'.""割圆术?"他茫茫然地望着父亲.对于圆面积、圆柱的体积和球的体积计算都要用圆周率，原来似乎没有科学的方法.可是这会儿，刘徽提出的割圆术，却找到了完善的算法."你看!"祖冲之指着手里拿着的竹简，滔滔不绝的给儿子讲着."刘徽提出：在圆内作一个正六边形，每边和半径相等.然后把六边所对的六段弧线一一平分.作出一个正十二边形.这个十二边形的边长总和加起来比六边形的边长的总和要大，比较接近圆周，但仍比圆周短.他认为，用同样方法，作出二十四边形.那周长总和又增

加了，又接近圆周了.就这样一直把圆周分割下去，割得越细，和圆周相差得越少，割而又割，直到不可再割的时候，这个无限边形就和圆周密合为一，完全相等了.刘徽用割圆术计算了六边、十二边、二十四边、四十八边，一直计算到九十六边形的边长之和，得出圆周是直径的3.14倍."祖冲之把刘徽的计算圆周率的"割圆术"讲给儿子听，他虽然似懂非懂，但引起了他无限的兴趣."刘徽真了不起！真行！"祖冲之听着孩子的话，沉思片刻说："我告诉你吧，刘徽算出的圆周率，其实他自己也不满意.他声明：实际的圆周率应该比3.14稍大.如果他继续'割了又割'地割下去.就会算得更精确.""那我们来继续'割而又割'，行吗?"儿子问了一句."行呀，我们可以算出更精确的圆周率！这就需要我们付出更为艰巨的劳动！"这一夜，父子俩久久未能入睡.枯燥无味的数学，却引来了儿子无限的兴趣，丰富的幻想；祖冲之则盘算着如何尽可能去消化前人智慧的全部成果，并开拓数学研究的新路.

公元461年，一个叫刘子鸾的皇族被任命为南除州刺史，祖冲之也被从华林学省这个研究学术的机关调出，派在刘子鸾手下做一个小官.祖冲之虽然离开了华林学省，又担任了繁杂琐碎的行政事务工作，但他勤奋好学的习惯并没有随着环境变化而有所改变.他始终没放松对科学技术的钻研.每天早上都得进衙门办事，下午一回来，就一头钻进了他的书房，有时甚至忘了吃晚饭，忘了休息.连年幼的儿子，也被他父亲的这种孜孜不倦，废寝忘食的刻苦攻关精神所感动.

一天，祖冲之早上进衙门办完杂事，就匆匆赶回了家，在书房的地板上画了一个直径一丈的大圆，运用"割圆术"的计算方法，在圆内先作了一个正六边形.他们的工作就这样开始了.日复一日，不论是酷暑，还是严寒，不间断地辛勤地计算着，……，祖冲之为了求出最精密的圆周率，对九位数进行包括加减乘除及开方等运算130次以上.像这样艰巨复杂的计算，在当时，既没有电子计算机，也没有算盘，只靠一些被称作"数筹"的小竹棍，摆成纵横不同的形状，用来表示各种数目，然后进行计算，这不仅需要掌握纯熟的理论和技巧，而且，更需具备踏踏实实、一丝不苟的严谨态度，不惜付出艰巨的劳动代价，才能取得杰出的成就.祖冲之为了求出最精密的圆周率，逐次以圆内接正六边形、十二边形、二十四边形、四十八边形、九十六边形，……，的边长当作圆周长，计算与直径的比值，一直割圆到24 576边形，这样边已经和圆周紧贴在一起，以当时的科技水平而言，已经不能再割了.于是他算出：12 288边形各边总长为3.141 592 51丈，24 576边形各边总长为3.141 592 61丈.祖冲之经过艰苦的计算，终于得出较精确的圆周，如直径为1，圆周大于3.141 592 6，小于3.141 592 7.这个结论，用现代数字符号写出，就是：$3.1415926 < \pi < 3.1415927$.功夫不负有心人，祖冲之求出的圆周率，精确到小数点后七位，这在当时，全世界上只有他一人.祖冲之为世界数学史和文明史，作出的这一伟大贡献，是我们中华民族的骄傲！

基础知识部分

在中学阶段已经学习过有关数列极限、函数极限的初步知识，但这些知识对于我们进一步学习微积分来说还不够.极限是研究微积分的主要工具，微积分的研究对象是函数，因此我们将在中学有关函数知识的基础上深化函数极限的知识，为后几章的学习打好基础.

§1.1 初等函数

函数是中学阶段、特别是高中阶段数学的重要学习内容，函数知识内容丰富、应用广泛又比较有深度，微积分就是在中学函数知识的基础上继续深入地研究函数，因此这里有必要将中学阶段的函数知识作一简要总结，并补充一些必须的内容为进一步学习打下基础，本节最后将得出初等函数的概念，并举一些有用的函数的例子.

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1　设有两个变量 x 与 y，如果对于变量 x 在实数集合 D 内的每一个值，变量 y 按照一定的法则都有唯一的值与之对应，那么就说 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，其中 x 称做自变量，它的取值的集合 D 叫做函数的定义域，函数值的集合叫做函数的值域.

函数也可以用映射来定义，这里就不叙述了.

函数实质是指明了某个变化过程中两个变量具有的特殊关系. 函数关系的出现是数学发展的重要转折点，数学因此由对常量的研究深入到对变量的研究. 恩格斯对此高度评价"数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要了……"，变数即变量.

2. 函数的表示方法

常用的函数表示方法有三种：

(1) 解析法　即用解析式或称数学式表示函数. 如函数 $y=2x+1$，$y=|x|$，$y=\lg(x+1)$，$y=\sin 3x$ 等.

(2) 列表法　即用表格形式给出两个变量关系的方法. 如汽车站的票价表，其中运输里程是自变量，票价是函数. 又如数学用表中的平方表、平方根表、三角函数表等，也是用列表法来表示函数关系的.

(3) 图像法　即用图像来表示函数关系的方法. 这在中学里同学们已经很熟悉了，我们经常通过某个函数的图像来研究函数的性质. 日常生活中见到的某地某天的气温随时间变化的曲线也是用图像表示函数关系的.

这三种表示方法各有特点，如图像法非常形象直观，能从图像上看出函数的某些特性；列表法则便于查得某一处的函数值；解析法便于对函数进行精确的计算，深入的分析.

在解析法表示函数的情况中，除了很常见的如 $y=3x+2$ 这样最简单的形式外，还有一些特殊的形式：

(1) 分段函数　即当自变量取不同值时，函数的表达式不一样，如

$$y=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0;\\ -2x-1, & x<0,\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}\text{等.}$$

(2) 隐函数　相对于显函数而言，所谓显函数，即直接用含自变量的式子表示的函数，如 $y=x^2+2x+3$，这是最常见的函数形式；而隐函数是指变量 x、y 之间的函数关系是由一个含 x、y 的方程 $F(x,y)=0$ 给出的. 如 $2x+y-3=0$，$e^{x+y}-x-y=0$ 等. 而由

$2x+y-3=0$ 可得 $y=3-2x$，即隐函数可化为显函数.

注 并非所有的隐函数都能化为显函数的. 例如：$e^{2x}-e^{y}+x-y=0$ 即如此. 这说明，隐函数是函数表达形式中不可缺少的形式.

(3) 参数式函数 若变量 x、y 之间的函数关系是通过参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $(t\in T)$ 给出的，这样的函数称为由参数方程确定的函数，简称参数式函数，t 称为参数. 例如：炮弹发射后运动的曲线表示的函数，可写成 $\begin{cases} x=v_0 t\cos\alpha, \\ y=v_0 t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases}$ 其中 α 为发射角，v_0 为初速度.

二、函数的几种性质

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.

1. 单调性

定义 2 设 x_1，x_2 是 D 内某个区间 I 上的任意两个自变量的值，若 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的. 若 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的.

在区间 I 上单调增加或单调减少的函数称为区间 I 上的**单调函数**，区间 I 称为函数的**单调区间**.

在单调区间上增函数的图像是上升的，减函数的图像是下降的.

例如：$y=2x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，$y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

2. 奇偶性

定义 3 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$)，若任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**，若任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数图像关于 y 轴对称.

例如 $y=\sin x$，$y=x^3+x$ 是奇函数，$y=|x|$，$y=\cos x$ 是偶函数，$y=2x+1$，$y=x^3$，$x\in\mathbf{R}^+$ 是非奇非偶函数.

3. 周期性

定义 4 设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义，如果存在一个不为零的常数 T，任意 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 叫做 $f(x)$ 的**周期**，通常，周期函数的周期是指最小正周期.

周期函数的图像每间隔一段(一个周期)是重复出现的. 例如：$y=\sin x$ 的周期为 2π，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A\neq 0,\ \omega\neq 0)$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

4. 有界性

定义 5 设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义，如果存在常数 $M>0$，任意 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上**有界**，如果不存在这样的常数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

从图像上看，$f(x)$ 有界，是指其图像介于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间(图 1-1).

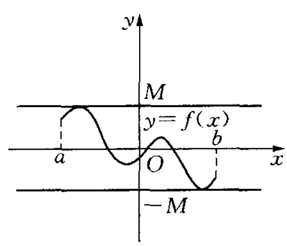


图 1-1

例如：$y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是有界的，因为 $|\sin x|\leqslant 1$，$f(x)=3x+2$ 在 $\mathbf{R}$ 上是无界的，但在$[1,2]$上是有界的，因为 $5\leqslant f(x)\leqslant 8$，$x\in[1,2]$.

5. 极大值、极小值

定义 6　若 $f(x)$在点 x_0 处及其左右有定义，对于点 x_0 处左右很小范围内任意 $x\neq x_0$，若总有 $f(x_0)>f(x)$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个**极大值**，x_0 为 $f(x)$ 的一个**极大值点**. 若总有 $f(x_0)<f(x)$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个**极小值**，x_0 为 $f(x)$ 的一个**极小值点**.

例如，在图 1-2 中 x_1 是 $f(x)$的极大值点，x_2 是 $f(x)$ 的极小值点.

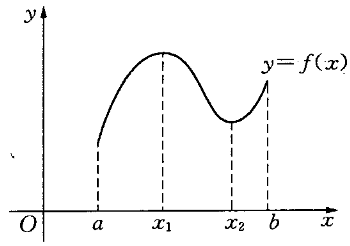


图 1-2

6. 最大值、最小值

定义 7　若 $f(x)$在区间 I 上有定义，$x_0\in I$，对于任意点 $x\in I$，若恒有 $f(x_0)\geqslant f(x)$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**，点 x_0 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值点**. 若恒有 $f(x_0)\leqslant f(x)$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**最小值**，点 x_0 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**最小值点**.

最大值、最小值与极大值、极小值是不同的概念，极值点只能是给定区间内部的点，是函数的局部性质. 而最值点可以是给定区间内部的点，也可以是给定区间的端点，是函数在某个区间的整体性质. 最值点不一定是极值点，极值点也不一定是最值点.

例如：$y=x^2$ 的极小值点 $x=0$ 也是函数在$(-\infty,+\infty)$上的最小值点，而如图 1-2 所示函数的最小值点是 $x=a$，最大值点是 $x=x_1$.

7. 反函数

定义 8　如果在已给的函数 $y=f(x)$ 中，把 y 看作自变量，把 x 看作函数，则所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 的**反函数**，记做 $x=f^{-1}(y)$ 或 $y=f^{-1}(x)$（以 x 表示自变量）.

注　$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

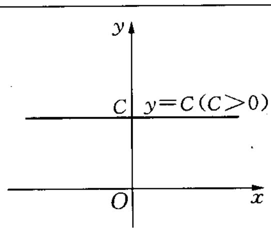
例如：$y=2x$ 与 $y=\frac{1}{2}x$ 互为反函数，$y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 互为反函数.

三、初等函数

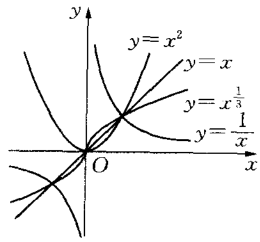
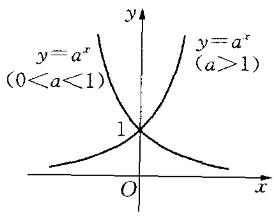
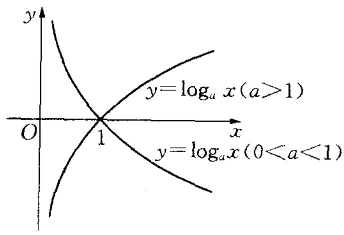
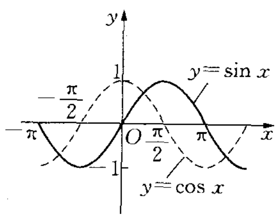
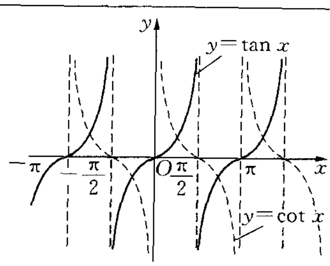
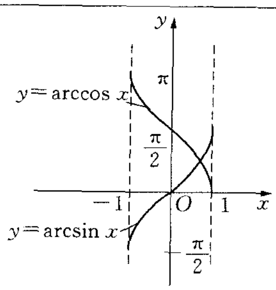
1. 基本初等函数

中学阶段学过的常数函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数及幂函数共六类函数统称为**基本初等函数**，很多复杂函数是由它们为基础构成的，它们的性质、图像如表 1-1 所示.

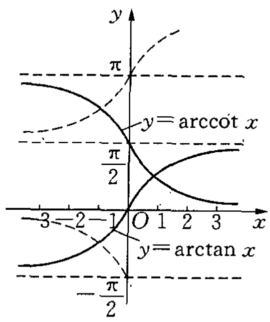
表 1-1

函　数	图　　像	性　　　质
常数函数 $y=C$		定义域$(-\infty,+\infty)$ 值域$\{C\}$ 是偶函数

续 表

函 数	图 像	性 质
幂函数 $y=x^{\alpha}$		定义域、值域与 α 有关 都过 $(1,1)$ $\alpha>0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 上单调增加 $\alpha<0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 上单调减小
指数函数 $y=a^x$ $a>0,a\neq 1$		定义域 $(-\infty,+\infty)$ 值域 $(0,+\infty)$ 都过 $(0,1)$ $a>1$ 时是增函数 $0<a<1$ 时是减函数
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$		定义域 $(0,+\infty)$ 值域 $(-\infty,+\infty)$ 都过 $(1,0)$ $a>1$ 时是增函数 $0<a<1$ 时是减函数
三角函数 $y=\sin x$ $y=\cos x$		定义域 $(-\infty,+\infty)$ 值域 $[-1,1]$ $y=\sin x$ 是奇函数， $y=\cos x$ 是偶函数 周期为 2π
三角函数 $y=\tan x$ $y=\cot x$		$y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\right\}$ $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x \mid x\neq k\pi,k\in \mathbf{Z}\}$ 值域都是 $(-\infty,+\infty)$ 周期为 π，是奇函数
反三角函数 $y=\arcsin x$ $y=\arccos x$		$y=\arcsin x$ 的定义域 $[-1,1]$ 值域 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，奇函数，增函数，有界 $y=\arccos x$ 的定义域 $[-1,1]$ 值域 $[0,\pi]$，减函数，有界

续　表

函数	图　　像	性　　　质
反三角函数 $y=\arctan x$ $y=\operatorname{arccot} x$		$y=\arctan x$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$ 值域$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 奇函数,增函数,有界 $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$,值域$(0,\pi)$ 减函数,有界

2. 复合函数

例如,y 是 u 的函数,$y=3u$,但同时 u 又是 x 的函数 $u=e^x$,则 y 也是 x 的函数,$y=3e^x$,即由函数 $y=3u$ 与 $u=e^x$ 复合成一个函数 $y=3e^x$,u 称为中间变量,它起一个中介作用.

定义 9　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,且 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交非空,那么 y 也是 x 的函数,称为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,记做 $y=f[\varphi(x)]$.

注　(1) 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.例如:$y=\arcsin u$,$u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数,因为前者的定义域与后者的值域没有公共部分,因而使得任意的 x 的取值,都没有确定的 y 值与之相对应;

(2) 复合函数分解到什么程度为止是关键.若 $\varphi(x)$ 为基本初等函数或简单函数——基本初等函数经过有限次四则运算(加、减、乘、除)得到的函数,则分解终止;若 $\varphi(x)$ 仍为复合函数,则继续分解.

把几个函数复合成一个函数或将一个复合函数分解成为几个简单函数,可以帮助我们研究比较复杂的函数问题.

例 1　已知 $y=u^3$,$u=\sin v$,$v=2x$,试把 y 表示为 x 的函数.

解　显然,u,v 分别是中间变量,所以 $y=u^3=\sin^3 v=\sin^3 2x$.

例 2　分解复合函数 $y=\ln\sqrt{x}$.

解　设 $u=\sqrt{x}$,则 $y=\ln u$,故 $y=\ln\sqrt{x}$ 是由 $y=\ln u$,$u=\sqrt{x}$ 复合而成的.

例 3　分解复合函数 $y=\cos^4 5x$

解　设 $u=\cos 5x$,则 $y=u^4$,再设 $v=5x$,则 $u=\cos v$,故 $y=\cos^4 5x$ 是由 $y=u^4$,$u=\cos v$,$v=5x$ 复合而成的.

3. 初等函数

定义 10　由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合构成,并且能用一个数学式子表示的函数,称为**初等函数**.

例如:$y=2x-1$,$y=\sin\frac{1}{x}$,$y=\sqrt{x^2}=|x|$ 等都是初等函数,而 $y=\begin{cases}1, & 当 x\geqslant 0 时;\\ 0, & 当 x<0 时\end{cases}$ 由于不能用一个式子表示,故不是初等函数.

初等函数是一个重要的概念,初等函数具有一些特殊的性质,微积分中研究的主要是初