



数学的源与流

(第二版)

张顺燕 编著

高等教育出版社

数 学 的 源 与 流

第 二 版

张顺燕 编著

高 等 教 育 出 版 社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学的源与流/张顺燕编著. —2 版. —北京: 高等教育出版社, 2003. 12

ISBN 7-04-012930-2

I. 数... II. 张... III. 数学-高等学校-教材
IV. 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 089361 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
印 刷 北京二二〇七工厂

		版 次	2000 年 9 月第 1 版
开 本	850 × 1168 1/32		2003 年 12 月第 2 版
印 张	17.75	印 次	2003 年 12 月第 1 次印刷
字 数	220 000	定 价	23.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

内容介绍

本书是北京大学数学素质教育课的主要教材。内容包括著名的数学问题、具有重要使用价值的应用问题,还包括数学的一些近代应用。

本此修订对第一版中的错误、遗漏进行了修改,对一些提法进行了规范,并增加了丁石孙先生对本书所做的序言。

本书立意新颖、内容丰富、涵盖面广、观点高、起点低,只要具备中等数学的基础就能读懂大部分内容;最后几章要用到初等微积分。

本书可作为大专院校数学素质教育的参考书,对广大中学教师提高数学素养也极有参考价值。

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》；其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581698/58581879/
58581877

传 真：(010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn 或 chenrong@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社法律事务部

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)64014089 64054601 64054588

策划编辑 王 瑜

责任编辑 胡乃刚

封面设计 于 涛

责任绘图 朱 静

责任印制 宋克学

序

《数学的源与流》是张顺燕教授经过长期思考写的一本向普通读者介绍数学的科普读物. 数学处理的对象是抽象的, 举一个简单的例子, 初等几何研究的“直线”就是一个抽象的概念, 它与实际存在的直线不同, 没有宽度. 因为数学处理的对象是抽象的, 在数学的发展中常常是一个定义接一个定义, 而抽象程度又一层层地提高, 所以数学很难为一般人所理解. 随着科学技术对人类生产和生活产生日益深刻的影响, 数学的重要性越来越清楚地显示出来, 而且数学应用的领域也越来越广泛, 但数学为什么会有用, 以及数学在人的教育方面的作用究竟有多大, 却是不容易说清楚的, 要全面的介绍数学究竟是什么, 在目前也几乎是不可能的. 张顺燕教授为了使普通读者对数学有一个比较完整的了解, 选择了梳理数学的“源”与“流”这样一种角度, “源”讲数学的发生, 数学的一些概念开始是如何从客观实际抽象出来的; “流”讲数学的发展, 讲数学在 2000 多年的时间里, 伴随着人类知识的不断积累和思维能力的提高, 数学概念层层抽象, 数学研究的范围不断扩大, 研究对象不断变化的过程. 我认为本书选取这样一个角度是颇具慧心的, 书中对介绍数学知识的各个部分的选择也比较恰当, 对于一些与实际联系紧密, 比较容易叙述清楚的东西, 就说得详细一点, 对于一些特别抽象, 难于说清楚的东西, 就介绍得简略一些, 这样就避免了在复杂的问题上纠缠不清的缺点. 张顺燕教授也考虑到数学的现代发展, 在书中也涉及到了数学的一些新的分支, 比如数学界最近讨论比较多的混沌理论. 总之, 这本书有简有繁, 有深有浅, 力图使读者对数学有一个总体轮廓的了解. 我想这个目标是非常有意义的, 也是很难达到的, 张顺燕教授在这方面进行了比较成功的尝试. 希望本书的出版, 对普及数学知识, 对提高大家对数学重

要性的认识能够发挥积极的作用.记得有位著名数学家说过,今天数学教育水平的高低,就决定了明天科学技术的发展.这句话被历史证明是正确的.我衷心希望大家能够更加重视数学教育,希望中国数学教育水平在新世纪有大的提高.

丁 磊 孙

2000.12.26

前 言

1998,1999 两年,笔者在中央教育电视台录制了“今日数学”讲座.对象是广大的中学数学教师.目的有二:

1. 介绍数学思想的演变和发展,加深对数学思想的理解;
2. 了解重大数学成果,及数学对人类文明的贡献,以达到开拓视野,启发灵性的效果.

现在的书名是高等教育出版社的张小萍等先生拟定的,比原名更好.但是,单靠书名来概括全书,这是难以做到的.还是要请读者看具体内容.

目前素质教育正在全国兴起,今年秋季北京大学将向全校(不分文、理,不分年级)开设数学素质教育课.数学学院领导建议由笔者来开这门课.笔者欣然接受,愿为素质教育效一份力.此书就成为这个课的最主要的教材,课程的大部分内容将从中选取.

本书也可供兄弟院校作为数学素质教育的教材,并根据本校的具体情况选取所需内容.

高教出版社的胡乃同先生对此给予以大力支持.作为急件,加速排版,力争在开学初出书,表现了出版界对素质教育之重视.

在讲座拍摄过程中,姜伯驹院士、武际可教授、李忠教授、潘承彪教授都曾给予鼓励与支持.姜伯驹院士建议讲《一笔画与邮递路线问题》,并慨然将他的名著提供给笔者.他的著作简单、精要,笔者基本上按他的著作讲授,只是后面作了一些引申.

全国人大副委员长丁石孙教授对讲座甚为关怀,尤为使笔者感动的是,他的藏书供笔者自由选用.1999 年春节一次就从他家借书 10 本,用了一年之久,使笔者收益甚大.他主编的《数学、我们、数学》丛书即在其中.这套丛书论述了数学与社会各个领域的联系,价值很

高,开了素质教育之先河.

本书需要的预备知识不多,大部分内容只要有高中数学的知识就可读懂.最后几章需要初等微积分的知识.

限于笔者的水平,错误是一定有的,欢迎读者批评指正.

张顺燕 于北京大学燕北园

2000年8月18日

目 录

序	(1)
前言	(1)
第一章 数学与人类文明	(1)
1.1.1 数学的内容	(1)
1.1.2 数学的特点	(2)
1.1.3 数学对人类文明的贡献	(3)
1.1.4 数学发展简史	(4)
1.1.5 现代数学发展的新趋向	(12)
1.1.6 计算机的影响	(13)
1.1.7 关于中等教育	(13)
第二章 数系	(15)
§ 2.1 无理数的诞生	(16)
2.1.1 自然数	(16)
2.1.2 代数结构的出现	(20)
2.1.3 逆运算的作用	(21)
2.1.4 有理数的稠密性	(22)
2.1.5 有理数域	(23)
2.1.6 第一次数学危机	(25)
2.1.7 历史意义	(27)
2.1.8 第一次数学危机的消除	(28)
2.1.9 层次	(28)
2.1.10 反证法	(29)
习题	(30)
§ 2.2 无限的比较	(31)

2.2.1 一段富有启发性的历史对话	(31)
2.2.2 对谈话的分析和解答	(33)
2.2.3 有理数集是可数的	(36)
2.2.4 实数集是不可数的	(39)
2.2.5 代数数	(40)
2.2.6 无限的算术	(43)
2.2.7 结语	(44)
习题	(46)
§ 2.3 复数	(46)
2.3.1 复数的引进	(46)
2.3.2 复数的几何表示	(47)
2.3.3 复数的三角表示和指数表示	(48)
2.3.4 复数域	(49)
2.3.5 乘方与开方	(50)
2.3.6 单位根	(53)
2.3.7 复数的确认	(56)
习题	(57)
第三章 连分数及其在天文学上的应用	(58)
§ 3.1 从辗转相除法谈起	(58)
3.1.1 辗转相除法	(58)
3.1.2 连分数	(60)
习题	(66)
§ 3.2 连分数在天文学上的应用	(66)
3.2.1 为什么四年一闰,而百年又少一闰	(66)
3.2.2 公历的改革	(68)
3.2.3 农历的月大月小、闰年闰月	(71)
3.2.4 二十四节气	(72)
3.2.5 闰月放在哪儿	(73)

3.2.6	日月食	(74)
3.2.7	干支记年	(76)
§ 3.3	连分数的性质	(78)
3.3.1	渐近分数的性质	(78)
3.3.2	渐近分数的表达式	(79)
3.3.3	渐近分数的极限	(82)
3.3.4	连分数的几何解释	(84)
	习题	(85)
3.3.5	最佳逼近	(86)
3.3.6	方程 $x^2 = ax + 1$ 的解 (a 为正整数)	(89)
3.3.7	斐波那契级数	(89)
第四章	素数定理与哥德巴赫猜想	(93)
§ 4.1	初等数论初步	(93)
4.1.1	数论是什么	(93)
4.1.2	数论的一个特点:表面简单,实际难	(94)
4.1.3	素数与合数	(94)
4.1.4	素数表	(95)
4.1.5	算术基本定理	(97)
4.1.6	另一种“算术”	(99)
4.1.7	最大公因数	(100)
4.1.8	函数 $[x], \{x\}$	(100)
4.1.9	费马素数	(103)
4.1.10	完全数与梅森数	(105)
4.1.11	高斯的功绩	(112)
	习题	(113)
§ 4.2	素数定理与哥德巴赫猜想	(113)
4.2.1	素数定理	(113)
4.2.2	哥德巴赫猜想	(116)

4.2.3 有关素数的 12 个问题	(120)
第五章 从勾股定理到费马大定理	(121)
引言	(121)
§ 5.1 一次不定方程	(123)
5.1.1 通解公式	(123)
5.1.2 整数的模	(125)
5.1.3 可解的充要条件	(127)
5.1.4 如何求二元一次方程的解	(128)
5.1.5 二元一次方程的非负解	(130)
5.1.6 多元一次不定方程	(133)
习题	(135)
§ 5.2 勾股定理	(135)
5.2.1 问题	(135)
5.2.2 第一个重要定理——勾股定理	(135)
5.2.3 勾股定理的几何方面	(139)
5.2.4 勾股定理的数论方面	(140)
5.2.5 初等方法	(142)
5.2.6 几何方法	(144)
5.2.7 高斯的复整数	(146)
5.2.8 类数问题	(149)
5.2.9 高斯复整数法	(151)
§ 5.3 与勾股定理有关的问题	(151)
5.3.1 已知 x 边求本原三角形	(151)
5.3.2 已知 y 边求本原三角形	(152)
5.3.3 已知 z 边求本原三角形	(153)
习题	(158)
§ 5.4 费马大定理	(158)
5.4.1 费马和费马大定理	(158)

5.4.2	无穷递降法	(160)
5.4.3	$n=4$ 的费马定理	(162)
5.4.4	$n=3$ 的情形	(163)
5.4.5	初等方法的结束	(164)
5.4.6	热尔曼的贡献	(165)
5.4.7	库默尔的工作和理想数	(167)
5.4.8	从丢番图到维尔斯	(168)
5.4.9	费马大定理的推广	(171)
第六章	欧氏几何回顾	(173)
§ 6.1	欧几里得几何	(173)
6.1.1	欧氏几何的诞生	(173)
6.1.2	《几何原本》的历史背景	(175)
6.1.3	欧氏几何的内容	(175)
6.1.4	欧氏几何的优缺点	(177)
6.1.5	欧氏几何的历史地位	(179)
6.1.6	几何学在中学数学教育中的地位	(179)
§ 6.2	尺规作图问题	(180)
6.2.1	几何三大难题	(180)
6.2.2	用尺规可作什么图	(181)
6.2.3	有理数域的扩张	(182)
6.2.4	一般讨论	(184)
6.2.5	代数知识	(186)
6.2.6	三大难题的解	(190)
	习题	(193)
§ 6.3	正多边形作图	(193)
§ 6.4	平行公设引起的思考	(195)
6.4.1	从《几何原本》诞生到 18 世纪	(196)
6.4.2	非欧几何的孕育时期	(197)

6.4.3	非欧几里得几何的诞生	(200)
6.4.4	罗巴切夫斯基的解答	(202)
6.4.5	非欧几何的相容性	(202)
6.4.6	黎曼的非欧几何	(203)
6.4.7	欧氏几何与非欧几何	(204)
6.4.8	爱尔兰根纲领	(206)
6.4.9	各种几何与物理空间	(208)
第七章 同余理论及其应用		(210)
§ 7.1	同余式的性质	(210)
7.1.1	同余的定义	(210)
7.1.2	同余式的基本性质	(211)
7.1.3	同余式的四则运算	(213)
7.1.4	同余式的方幂	(215)
7.1.5	检查因数的方法	(217)
7.1.6	弃九法(验算整数计算结果的方法)	(219)
7.1.7	剩余类与完全剩余系	(221)
习题		(223)
§ 7.2	中国剩余定理	(224)
7.2.1	同余式	(224)
7.2.2	中国剩余定理	(227)
7.2.3	程大位的口诀	(230)
习题		(233)
§ 7.3	费马小定理和欧拉定理	(233)
7.3.1	费马小定理	(233)
7.3.2	简化剩余系与欧拉函数	(236)
7.3.3	欧拉定理	(239)
7.3.4	对循环小数的应用	(240)
习题		(243)

§ 7.4 同余式的应用	(244)
7.4.1 在密码学上的应用	(244)
7.4.2 素数鉴别	(253)
7.4.3 星期数	(256)
7.4.4 公式的证明	(258)
7.4.5 循环程序排列	(260)
习题	(261)
第八章 分形与混沌	(262)
§ 8.1 漫游分形	(262)
8.1.1 引言	(262)
8.1.2 海岸线的长度	(264)
8.1.3 科克曲线	(265)
8.1.4 皮亚诺曲线	(266)
8.1.5 分数维	(268)
8.1.6 几种基本的规则分形	(270)
8.1.7 自然界中的分形	(273)
§ 8.2 奇妙的混沌	(277)
8.2.1 混沌的定义	(277)
8.2.2 混沌的发现	(278)
8.2.3 蝴蝶效应	(278)
8.2.4 线性与非线性	(279)
8.2.5 函数的迭代	(280)
8.2.6 人口模型	(282)
8.2.7 逻辑斯蒂映射	(283)
8.2.8 茹利亚集	(288)
8.2.9 芒德布罗集	(290)

第九章 一笔画和邮递路线问题·····	(295)
9.1.1 问题的提出·····	(295)
9.1.2 一笔画问题·····	(297)
9.1.3 哥尼斯堡七桥问题·····	(298)
9.1.4 网络·····	(300)
9.1.5 一笔画定理·····	(302)
9.1.6 多笔画·····	(307)
9.1.7 偶网络·····	(308)
9.1.8 再论邮递路线问题·····	(309)
9.1.9 奇偶点网上作业法·····	(310)
9.1.10 什么是拓扑学·····	(316)
9.1.11 欧拉公式·····	(319)
9.1.12 四色问题·····	(321)
9.1.13 争论与困惑·····	(323)
习题·····	(324)
第十章 代数方程式·····	(326)
§ 10.1 三次方程与四次方程·····	(327)
10.1.1 什么是代数·····	(327)
10.1.2 二次方程·····	(328)
10.1.3 韦达公式·····	(329)
10.1.4 三次方程·····	(331)
10.1.5 实系数的三次方程·····	(334)
10.1.6 卡尔达诺公式小史·····	(336)
10.1.7 三次方程解法总结·····	(336)
10.1.8 四次方程·····	(337)
10.1.9 五次以上的代数方程·····	(340)
习题·····	(342)
§ 10.2 代数基本定理·····	(342)