文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS
聚焦图书

考研数学题型集粹与练习题集

陈文灯　黄先开　曹显兵
编著

题型集训　以一敌百
技巧丰富　好题荟萃

2008版
（经济类）

世界图书出版公司

考研数学题型集粹与练习题集

FOCUS 聚焦图书

聚骄公司全心专业设计
文灯教育集团课堂用书

考研数学题型集粹与练习题集

陈文灯 黄先开 曹显兵 编著

2008版

（经济类）

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

数学题型集粹与练习题集. 经济类/陈文灯,黄先开,曹显兵编著. —10版. —北京:世界图书出版公司北京公司,2004. 1
ISBN 978-7-5062-5210-2

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①陈…②黄…③曹… Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-习题 Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014884 号

数学题型集粹与练习题集(经济类)
(2008 版)

主　　编: 陈文灯　黄先开　曹显兵
责任编辑: 安秋明
封面设计: 耕者工作室

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话 88861708　邮编 100089)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 北京忠信诚胶印厂印刷

开　　本: 787 × 1092 毫米　1/16
印　　张: 28
字　　数: 448 千字
版　　次: 2007 年 2 月第 10 版　2007 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5210-2/O · 335　　**定价:38.80 元**

服务热线: 010 - 88861708

前　言

《题型集粹与练习题集》(经济类)作为《数学复习指南》(经济类)的姐妹篇,自第一版问世以来已近十载,受到越来越多的读者欢迎。许多考生选择将本书和《数学复习指南》配套使用,作为考研数学复习的主要参考书籍,被有的读者戏称"双剑合璧"。

《题型集粹与练习题集》旨在强化读者对《数学复习指南》中知识点的理解和运用,将知识点与考查题型结合起来,锻炼读者的实际解题能力。本书是作者多年评阅试卷和在文登培训学校考研辅导的经验之作,所讲例题及所选习题都是从多年教学中总结出来的有代表性的试题。通过本书的学习和训练,能帮助读者达到吃透规律,举一反三的目的。

本书特点以及使用建议:

题型归纳和精讲:

本书将考研数学所要求的知识点按题型进行归类。针对每种题型,给出相应的方法和规律,同时给出若干道典型例题进行精讲,帮助读者理解具体的解题技巧。同时配合了题型演练,强化读者的理解和实际答题能力。建议读者仔细体会方法和规律部分,在做题的过程中有意识地加以应用。

阶梯化训练题:

根据难度及综合性把习题分为基础能力题和综合提高题,题量适中,选题科学,适合读者在复习的不同阶段进行训练,逐步提高解题能力。建议读者能独立去解答这些习题,有意识地应用例题中学到的方法去解题,尽量不要从一开始就依赖答案,养成独立思考的习惯。在参考答案部分,我们给出了题型训练和阶梯化训练的详细解答,读者可以借鉴和参考其中的思路和方法。

四套模拟试题:

依据大纲的难度和要求,我们为读者精编了四套模拟试卷。每套试卷都给出了详细的解答,包括分析、详解和评注,建议读者严格按照考试时间完成试卷并及时查缺补漏,以达到模拟演练的目的。

本书如有不当和错误之处,恳请广大读者、数学界同仁批评指正。

编者

2007 年 2 月

目　　录

第一篇　微积分

第一章　函数·极限·连续 …… 1
题型归纳与精讲 …… 1
题型 1　函数奇偶性的判别 …… 1
题型 2　函数有界性的判别 …… 2
题型 3　求复合函数表达式 …… 2
题型 4　已知数列的前几项数值及通项的表达式，求数列的极限 …… 3
题型 5　求解 $m\to\infty$ 时，n 项和的极限 …… 3
题型 6　求 $m\to\infty$ 时，n 项乘积的极限 …… 4
题型 7　通项为积分形式的数列的极限 …… 5
题型 8　求 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限 …… 5
题型 9　求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限 …… 6
题型 10　求 $\infty-\infty$ 型未定式的极限 …… 6
题型 11　求 $0\cdot\infty$ 型未定式的极限 …… 7
题型 12　求 $1^\infty,0^0,\infty^0$ 型未定式的极限 …… 7
题型 13　无穷小量的比较 …… 8
题型 14　极限式中常数值的确定 …… 9
题型 15　函数连续性的讨论（重点） …… 9
题型 16　确定函数的间断点及其类型 …… 10
题型 17　分段函数式中参数的确定（重点） …… 11
阶梯化训练题 …… 12
基础能力题 …… 12
综合提高题 …… 15
参考答案 …… 17
题型演练答案 …… 17
基础能力题答案 …… 20
综合提高题答案 …… 25
第二章　导数与微分 …… 33
题型归纳与精讲 …… 33
题型 1　求函数在某点处的导数 …… 33
题型 2　求函数方程 …… 33
题型 3　求复合函数的导数 …… 34
题型 4　隐函数求微分 …… 35
题型 5　分段函数求导 …… 35
题型 6　高阶导数的计算 …… 37
阶梯化训练题 …… 37
基础能力题 …… 37
综合提高题 …… 41
参考答案 …… 43
题型演练答案 …… 43
基础能力题答案 …… 44
综合提高题答案 …… 49
第三章　不定积分 …… 56
题型归纳与精讲 …… 56
题型 1　分式有理函数的积分 …… 56
题型 2　简单无理函数的积分 …… 56
题型 3　三角有理式的积分 …… 57
阶梯化训练题 …… 58
基础能力题 …… 58
综合提高题 …… 58
参考答案 …… 59
题型演练答案 …… 59
基础能力题答案 …… 60
综合提高题答案 …… 62
第四章　定积分 …… 66
题型归纳与精讲 …… 66
题型 1　含变上限积分的题型求解 …… 66
题型 2　含有绝对值符号的定积分的计算 …… 67
题型 3　含奇偶函数与周期函数的定积分计算 …… 67
题型 4　含三角有理式的定积分计算 …… 68
题型 5　分母为两项，而分子为分母中其中一项的积分 …… 68

题型 6　含定积分等式的证明 …… 69
题型 7　定积分不等式的证明 …… 71
题型 8　反常积分的计算 …… 72
阶梯化训练题 …… 74
基础能力题 …… 74
综合提高题 …… 75
参考答案 …… 78
题型演练答案 …… 78
基础能力题答案 …… 80
综合提高题答案 …… 83
第五章　中值定理 …… 91
题型归纳与精讲 …… 91
题型 1　欲证结论为 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的命题的证明 …… 91
题型 2　含 $f^{(n)}(\xi)$ 等式的证明 …… 92
题型 3　区间 (a,b) 内 $\exists\xi,\eta$ 满足某种关系式的命题的证明 …… 93
阶梯化训练题 …… 94
基础能力题 …… 94
综合提高题 …… 94
参考答案 …… 95
题型演练答案 …… 95
基础能力题答案 …… 96
综合提高题答案 …… 97
第六章　一元微积分的应用 …… 99
题型归纳与精讲 …… 99
题型 1　函数不等式的证明 …… 99
题型 2　求函数的极值与最值 …… 100
题型 3　关于方程根的讨论 …… 100
题型 4　函数图形在区间 I 上凹凸性的判别 …… 102
题型 5　渐近线的计算 …… 102
题型 6　求平面图形的面积 …… 103
题型 7　求立体体积 …… 104
阶梯化训练题 …… 105
基础能力题 …… 105
综合提高题 …… 105
参考答案 …… 107
题型演练答案 …… 107
基础能力题答案 …… 109
综合提高题答案 …… 111
第七章　多元函数微分学 …… 118
题型归纳与精讲 …… 118
题型 1　求抽象的复合函数的偏导数 …… 118
题型 2　多元微分学的有关证明题 …… 119
题型 3　多元函数的极值 …… 119
阶梯化训练题 …… 120
基础能力题 …… 120
综合提高题 …… 121
参考答案 …… 122
题型演练答案 …… 122
基础能力题答案 …… 123
综合提高题答案 …… 125
第八章　二重积分 …… 128
题型归纳与精讲 …… 128
题型 1　更换积分次序 …… 128
题型 2　积分域为圆环或扇域的二重积分 …… 128
题型 3　分段函数的二重积分 …… 129
题型 4　二重积分不等式的证明 …… 130
阶梯化训练题 …… 131
基础能力题 …… 131
综合提高题 …… 133
参考答案 …… 134
题型演练答案 …… 134
基础能力题答案 …… 135
综合提高题答案 …… 138
第九章*　无穷级数 …… 141
题型归纳与精讲 …… 141
题型 1　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n\geqslant 0)$ 的判敛 …… 141
题型 2　任意项级数收敛性的判断 …… 142
题型 3　有关数项级数的命题的证明 …… 143
题型 4　函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 求收敛域，幂级数求收敛域，收敛半径 R …… 144
题型 5　求函数幂级数展开式 …… 145
题型 6　级数求和 …… 146
阶梯化训练题 …… 147

基础能力题 …… 147
综合提高题 …… 149
参考答案 …… 150
题型演练答案 …… 150
基础能力题答案 …… 151
综合提高题答案 …… 153
第十章 常微分方程与差分方程 …… 157
题型归纳与精讲 …… 157
题型1 一阶微分方程求解 …… 157
题型2 可降阶的高阶微分方程的求解 …… 158
题型3* 二阶常系数线性微分方程的求解 …… 159
题型4* 差分方程求解 …… 161
阶梯化训练题 …… 162
基础能力题 …… 162
综合提高题 …… 162
参考答案 …… 163
题型演练答案 …… 163
基础能力题答案 …… 165
综合提高题答案 …… 166

第二篇 线性代数

第一章 行列式 …… 171
题型归纳与精讲 …… 172
题型1 确定用行列式表示的多项式$f(x)$中x的最高次数及x的各次幂的系数 …… 172
题型2 3~5阶行列式的计算 …… 172
题型3 证明抽象行列式等于零 …… 174
题型4 n阶行列式的计算 …… 174
阶梯化训练题 …… 175
基础能力题 …… 175
综合提高题 …… 176
参考答案 …… 178
题型演练答案 …… 178
基础能力题答案 …… 179
综合提高题答案 …… 180
第二章 矩阵 …… 185
题型归纳与精讲 …… 185
题型1 关于矩阵的基本性质及初等变换的命题 …… 185
题型2 有关$\alpha^T\alpha$,与$\alpha\alpha^T$命题的求解与论证 …… 186
题型3 求n阶方阵A的k次幂A^k …… 187
题型4 求满秩矩阵的逆矩阵 …… 188
题型5 求解矩阵方程 …… 189
题型6 关于矩阵A存在逆矩阵的证明 …… 190
题型7 与方阵A的伴随矩阵A^*有关的命题的计算与证明 …… 190
题型8 矩阵秩的求法及有关矩阵秩的等式与不等式的证明 …… 191
阶梯化训练题 …… 192
基础能力题 …… 192
综合提高题 …… 194
参考答案 …… 195
题型演练答案 …… 195
基础能力题答案 …… 198
综合提高题答案 …… 200
第三章 向量 …… 207
题型归纳与精讲 …… 207
题型1 有关向量的概念及其性质的命题 …… 207
题型2 有关线性表出判别的命题 …… 208
题型3 向量线性相关性的证明 …… 209
题型4 向量组的极大线性无关组及向量组秩的相关命题 …… 210
题型5* 有关正交矩阵命题的证明 …… 211
阶梯化训练题 …… 212
基础能力题 …… 212
综合提高题 …… 213
参考答案 …… 215
题型演练答案 …… 215
基础能力题答案 …… 217
综合提高题答案 …… 220
第四章 线性方程组 …… 230
题型归纳与精讲 …… 230

题型 1 含有参数的线性方程组解的讨论 …… 230
题型 2 有关基础解系的命题证明 …… 231
题型 3 涉及两个方程组解之间关系的命题的讨论 …… 232
阶梯化训练题 …… 233
基础能力题 …… 233
综合提高题 …… 234
参考答案 …… 236
题型演练答案 …… 236
基础能力题答案 …… 238
综合提高题答案 …… 241
第五章 矩阵的特征值与特征向量 …… 247
题型归纳与精讲 …… 248
题型 1 特征值的计算与相关证明 …… 248
题型 2 矩阵($kE-A$)是否可逆的证明 …… 249
题型 3 矩阵相似的证明 …… 250
题型 4 已知 $P^{-1}AP=\Lambda$ 中两者求第三者 …… 251
阶梯化训练题 …… 252
基础能力题 …… 252
综合提高题 …… 253
参考答案 …… 256
题型演练答案 …… 256
基础能力题答案 …… 257
综合提高题答案 …… 261
第六章 二次型 …… 271
题型归纳与精讲 …… 272
题型 1 有关二次型概念及性质的命题 …… 272
题型 2 将二次型化为标准形 …… 273
题型 3 二次型与其标准形中参数的确定及正交变换 …… 274
题型 4 有关正定矩阵命题的证明 …… 275
阶梯化训练题 …… 276
基础能力题 …… 276
综合提高题 …… 276
参考答案 …… 277
题型演练答案 …… 277
基础能力题答案 …… 279
综合提高题答案 …… 281

第三篇 概率论与数理统计初步

第一章 事件的概率 …… 285
题型归纳与精讲 …… 285
题型 1 利用条件概率与乘法公式概率计算 …… 285
题型 2 利用全概公式和逆概公式(贝叶斯公式)计算概率 …… 286
阶梯化训练题 …… 287
基础能力题 …… 287
综合提高题 …… 288
参考答案 …… 289
题型演练答案 …… 289
基础能力题答案 …… 290
综合提高题答案 …… 292
第二章 随机变量及其分布 …… 296
题型归纳与精讲 …… 296
题型 1 求一维随机变量的分布函数及分布密度 …… 296
题型 2 求二维随机变量(X,Y)的分布函数及其密度 …… 297
题型 3 求一维随机变量函数 $Y=g(X)$ 分布律(分布密度) …… 299
题型 4 求二维随机变量(X,Y)函数 $g(X,Y)$ 的分布律(分布密度) …… 300
阶梯化训练题 …… 301
基础能力题 …… 301
综合提高题 …… 304
参考答案 …… 306
题型演练答案 …… 306
基础能力题答案 …… 307
综合提高题答案 …… 310
第三章 随机变量的数字特征 …… 319
题型归纳与精讲 …… 319
题型 1 求一维随机变量的数字特征 …… 319
题型 2 求一维随机变量函数的数字特征

…… 320
题型 3 求二维随机变量的数字特征 …… 321
题型 4* 求二维随机变量(X,Y)函数$Z=g(X,Y)$的数字特征 …… 323
题型 5 求多维随机变量的数字特征 …… 324
阶梯化训练题 …… 325
基础能力题 …… 325
综合提高题 …… 327
参考答案 …… 328
题型演练答案 …… 328
基础能力题答案 …… 330
综合提高题答案 …… 332
第四章 大数定律和中心极限定理 …… 337
题型归纳与精讲 …… 337
题型 1 估算随机事件的概率 …… 337
题型 2 试验次数 n 的确定 …… 338
阶梯化训练题 …… 340
基础能力题 …… 340
综合提高题 …… 340
参考答案 …… 341
题型演练答案 …… 341
基础能力题答案 …… 342
综合提高题答案 …… 342
第五章* 数理统计初步 …… 345
题型归纳与精讲 …… 345
题型 1 样本容量 n,样本均值 $\bar{X}$ 及样本方差 S^2 的数字特征和概率的计算 …… 345
题型 2 求抽样分布 …… 347
题型 3 统计量的点估计 …… 347
题型 4 正态总体均值与方差的区间估计 …… 348
题型 5 估计量的相关命题 …… 350
题型 6 一个正态总体均值的假设检验 …… 351
题型 7 一个正态总体方差 $D(X)=\sigma^2$ 的假设检验 …… 353
题型 8 两个正态总体均值的检验 …… 354
阶梯化训练题 …… 356
基础能力题 …… 356
综合能力提高题 …… 357
参考答案 …… 358
题型演练答案 …… 358
基础能力题答案 …… 360
综合提高题答案 …… 362
第四篇 模拟题及参考答案
数学三 模拟试卷(一)及参考答案 …… 367
数学三 模拟试卷(二)及参考答案 …… 381
数学四 模拟试卷(一)及参考答案 …… 393
数学四 模拟试卷(二)及参考答案 …… 406
附录
2007 年硕士研究生入学考试数学试题三、四及参考答案 …… 417

注:带 * 篇、章,数四考生不作要求。

第一篇　微积分

第一章　函数·极限·连续

命题特点:

函数部分一般和其他考点联合出题,如求函数的表达式;关于函数的性质出单项选择题的可能性较大;极限部分一般出填空题或其他部分联合出题,函数的连续部分一般出单项选择题或计算题.

题型归纳与精讲

题型1　函数奇偶性的判别

方法和规律: 判别函数奇偶性的方法:

(1) 主要依据奇偶性的定义,有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数;偶函数之积为偶函数;偶数个奇函数之积为偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

(2) $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若函数的定义域关于原点不对称,则函数就无奇偶性可言.

典例精析 判别函数的奇偶性:

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\text{其中} f(x) \text{为连续的偶函数}.$$

【分析】 利用变量代换求出 $F(-x)$,然后比较 $F(x)$ 与 $F(-x)$ 的关系.

【解】 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令 } t=-u} \int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u) \xlongequal[\text{偶函数}]{f(x)\text{ 为}} -\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$,

$\because\quad F(x)+F(-x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$,

$\therefore\quad F(x)$ 为奇函数.

※ **题型演练1**　判别函数的奇偶性:

$$F(x)=f(x)+\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u,\text{其中} f(x) \text{是连续的奇函数}.$$

题型2　函数有界性的判别

方法和规律：证明或判别函数有界性的思路：

(1) 利用有界性定义.

(2) 闭区间上连续函数的有界性.

(3) 有极限数列必有界.

(4) $x \to x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

典例精析 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$（$l$ 为有限数），试证：$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

【分析】本题运用闭区间上的连续函数必有界，即可得证.

【证】$\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$，$\therefore$ 对于取 $\varepsilon = \dfrac{|l|}{2}$，$\exists X > a$，

当 $x > X$ 时，恒有 $|f(x) - l| < \dfrac{|l|}{2}$，

又 $|f(x) - l| \geqslant |f(x)| - |l|$，所以 $|f(x)| - |l| < \dfrac{|l|}{2}$，

即 $|f(x)| < \dfrac{3}{2}|l|$.

$\because$ $f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续，由闭区间上连续函数有界性，可知 $\exists S$，使 $\forall x \in [a, X]$，恒有 $|f(x)| < S$.

取 $M = \max\left\{S, \dfrac{3}{2}|l|\right\}$，则对 $\forall x \in [a, +\infty)$ 恒有 $|f(x)| \leqslant M$，

即 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

※ 题型演练2　试证 $f(x) = e^{-x^2}\int_0^x te^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

题型3　求复合函数表达式

方法和规律：将两个或两个以上函数进行复合，通常有三种方法：

(1) 代入法（适用于初等函数的复合）；

(2) 分析法（适用于初等函数与分段函数的复合，或两个分段函数的复合）；

(3) 图示法（适用于两个分段函数的复合）.

典例精析 设 $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$，求 $f[f(x)]$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

【分析】本题为初等函数复合，可采用代入法.

【解】$f[f(x)] = \dfrac{1}{1 - f^2(x)} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{(1 - x^2)^2}} = \dfrac{(1 - x^2)^2}{x^2(x^2 - 2)}$，

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{f^2(x)}{f^2(x) - 1} = \frac{\left(\dfrac{1}{1 - x^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{1 - x^2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{x^2(2 - x^2)}.$$

【评注】如果是初等函数与分段函数的复合,或两个分段函数的复合,可采用分析法;如果是两个分段函数的复合,可采用图示法.

※ 题型演练3　设$f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n次}$,若$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]$.

题型4　已知数列的前几项数值及通项的表达式,求数列的极限

方法和规律:利用单调有界数列必有极限定理求解(求解程序:① 判断极限的存在性$\begin{cases}\text{单调性}\\\text{有界性}\end{cases}$,方法可用数学归纳法或不等式的放缩法;② 先令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后通过解关于$l$的方程,求得$l$的值,从而得极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$).或者利用数列极限的定义求解(先令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后在通项的两边取极限得出$l$的数值,再证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$的存在性.此步通常是利用$|x_n-l|$的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

典例精析　设$x_1=2,x_2=2-\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】利用数列的单调有界性判断数列极限的存在性,然后通过解方程求出极限.

【解】先证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$的存在性:

$x_1=2>1$,若$x_n>1$,则$0<\dfrac{1}{x_n}<1$,从而$x_{x+1}=2-\dfrac{1}{x_n}>1$,因此$x_{n+1}>1$.

$x_2-x_1=-\dfrac{1}{x_1}=-\dfrac{1}{2}<0$,设$x_n-x_{n-1}<0$,那么

$$x_{n+1}-x_n=2-\frac{1}{x_n}-2+\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}\cdot x_n}<0,$$

因此$x_{x+1}<x_n$,

即　$\{x_n\}$单调递减且有下界,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,在$x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$的两边取$n\to\infty$时的极限得

$l=2-\dfrac{1}{l}$,即$l^2-2l+1=0,l=1$,　　故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,

【评注】该类题目通常是先用数学归纳法证明数列极限的存在性.

※ 题型演练4　设$x_1=1,x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1},\cdots,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

题型5　求解$n\to\infty$时,n项和的极限

方法和规律:方法有:

(1) 特殊级数求和法.

(2) 利用幂级数求和法.

(3) 利用定积分定义求极限.

(4) 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子$\frac{1}{n}$,剩余的可用一个通项表示,则用定积分定义求解数列的极限;若数列的各项虽可提出一个因子$\frac{1}{n}$,而剩余的不能用一个通项表示,但其各项是按递增或递减排列的,则用夹逼定理求极限.

典例精析 求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{i^2+1}{n}}$.

【分析】本题直接求解比较不便,利用夹逼定理转换函数形式,然后利用定积分的定义求解.

【解】$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{i^2+1}{n}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2+1}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$,

$$\because\quad \frac{i^2}{n^2}\leqslant\frac{i^2+1}{n^2}\leqslant\frac{(i+1)^2}{n^2},$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{i^2+1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}.$$

$$\text{又}\quad\because\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\dfrac{(n+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+(n+1)^2}=\arctan x\Big|_0^1+0=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},\quad\text{故}\quad\text{原极限}=\frac{\pi}{4}.$$

※ **题型演练 5**　求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

题型 6　求 $n\to\infty$ 时,n 项乘积的极限

方法和规律:解法有:

(1) 分子,分母同乘以一个因子,使之出现连锁反应;

(2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式,在整个相乘过程中中间项相消,从而化简为易求极限形式;

(3) 利用夹逼定理;

(4) 利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

典例精析 求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$.

【分析】本题利用夹逼定理即可求解.

【解】

$$\left.\begin{array}{l}\because 1\cdot 3<2^2\\ \quad 3\cdot 5<4^2\\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\\ (2n-1)(2n+1)<(2n)^2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow 1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2(2n+1)<2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2\\ \Rightarrow 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{2n+1}<2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Rightarrow 0<\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\end{array}$$

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，　故　由夹逼定理，原极限 $=0$.

【评注】对于 n 项乘积的幂的极限运算，有时也可利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

※ 题型演练 6　求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$.

题型 7　通项为积分形式的数列的极限

方法和规律： 一般地 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx\neq\int_a^b[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]\,dx$，求解 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$ 的方法：

(1) 利用不等式放缩法对 $I_n=\int_a^b f_n(x)\,dx$ 进行估值，再用夹逼定理求极限.

(2) 利用积分中值定理求极限.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}dx$.

【分析】本题可利用放缩法对 $I_n=\int_a^b f(x)\,dx$ 进行估值.

【解】$\because$　在 $[0,1]$ 上，$x^n\geqslant 0$，且 $\dfrac{1}{1+x}$ 连续，

$$\therefore\quad 0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1},$$

其中 $0\leqslant\xi\leqslant 1$，故　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\xi}\cdot\dfrac{1}{n+1}=0$.

【评注】一般地 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx\neq\int_a^b[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]\,dx$.

※ 题型演练 7　求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

题型 8　求 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限

方法和规律： 求解 $\dfrac{0}{0}$ 型极限的方法：

(1) 通过因式分解或根式有理化消去零因子，然后用连续函数的性质求极限；

(2) 利用等价无穷小和泰勒公式求极限；

(3) 利用洛必达法则求极限（这是求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限最有效的方法）；

(4) 利用变量替换(通常是令 $x=\dfrac{1}{t}$ 或 $x=\dfrac{1}{t^2}$).

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$.

【分析】本题可利用等价无穷小量的代换求解.

【 解 】将根式有理化,于是有

$$\text{原极限}=\lim_{x\to0}\frac{2\tan x}{(e^x-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}$$

$$\xlongequal[\text{代换}]{\text{由等价无穷小}}\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}=1.$$

※ 题型演练8　求极限：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

题型9　求$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式的极限

方法和规律：求解$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限的方法：(1) 洛必达法则；(2) 变量替换.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^{2x}e^{t^2}dt\right)^2}{\int_{3x}^{0}e^{2t^2}dt}$.

【分析】本题可利用洛必达法则求解.

【 解 】$\text{原极限}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\int_0^{2x}e^{t^2}dt\cdot2e^{4x^2}}{-3e^{18x^2}}=-\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^{2x}e^{t^2}dt}{e^{14x^2}}=-\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{4x^2}}{28xe^{14x^2}}$

$$=-\frac{4}{3}\times\frac{1}{14}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{10x^2}}=0.$$

【评注】求 $x\to+\infty$ 时的极限,通常以“抓大头”的办法解决为好(所谓抓大头就是取分子、分母中趋向于 $+\infty$ 最快的项).

※ 题型演练9　求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt}{x}$.

题型10　求 ∞ - ∞ 型未定式的极限

方法和规律：$\infty-\infty\xlongequal[\text{或倒代换}\,x=\frac{1}{t}]{\text{根式有理化或通分}}\dfrac{0}{0}$ 或$\dfrac{\infty}{\infty}$,再用洛必达法则求解,或“抓大头”法求解.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x)$.

【分析】本题可转化为$\dfrac{0}{0}$型极限.

【解】原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+x\cos x)}{x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

※ 题型演练 10　求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

题型 11　求 $0\cdot\infty$ 型未定式的极限

方法和规律： $0\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 再用法则求解.

设　$\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$，则

$$\lim f(x)g(x)\quad(0\cdot\infty)=\lim\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

注意： 一般讲，对数函数和反三角函数一般不“下放”，因为下放后的导数比原来的复杂，违背数学运算的原则.

典例精析　求极限：$\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{\sin^2x}}$.

【分析】本题可通过等价无穷小量代换后，转成 $\dfrac{\infty}{\infty}$.

【解】原极限 $\xlongequal{x\sim\sin x}\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}$

$$\xlongequal{\frac{1}{x^2}=u}\lim_{n\to+\infty}\frac{e^u}{u}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^u}{1}=+\infty.$$

※ 题型演练 11　求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{1+x}\right)$.

题型 12　求 $1^\infty,0^0,\infty^0$ 型未定式的极限

方法和规律： 基本思路是通过对数恒等式将其化为 $0\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$，再用法则.

关于 1^∞ 型极限有两种求法：

(1) 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$（适用于底为 $1\pm f(x)$ 或易化为 $1\pm f(x)$ 形式的幂指函数的极限. 其解法：设 $\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$，则 $\lim[1\pm f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln[1\pm f(x)]}=e^{\lim g(x)[\pm f(x)]}$.

用语言叙述为：括号中 1 后的变量（包括符号）与幂乘积的极限就是 1^∞ 这种未定式极限的