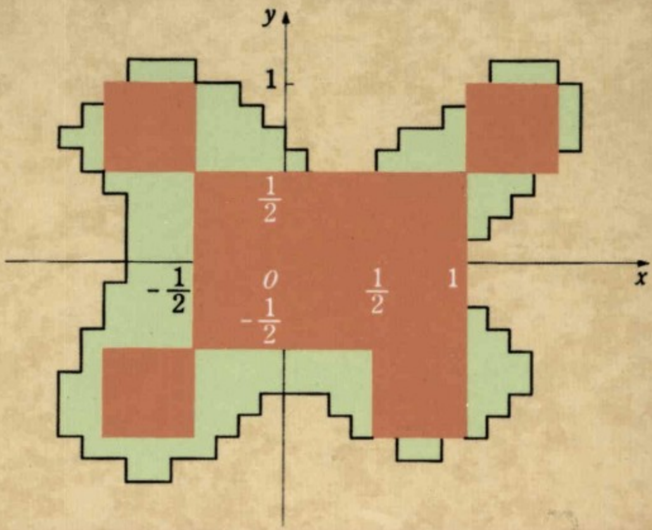
图灵数学·统计学丛书 21



An Introduction to Calculus

微积分入门 II

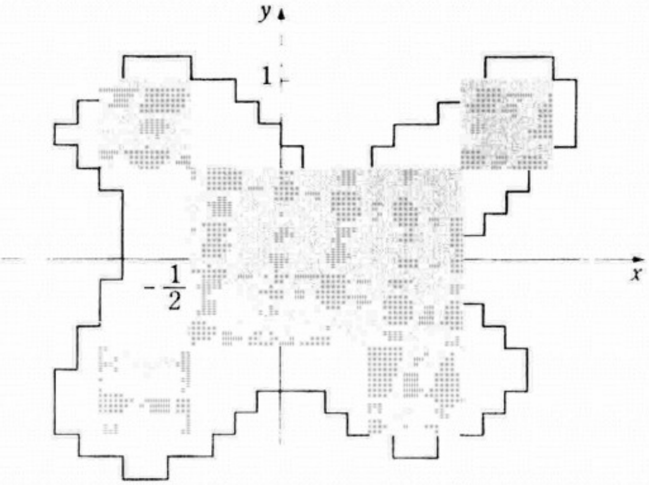
多元微积分

[日] 小平邦彦 著

裴东河 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

图灵数学·统计学丛书 21



An Introduction to Calculus

微积分入门 II

多元微积分

[日] 小平邦彦 著
裴东河 译

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

微积分入门 II：多元微积分/（日）小平邦彦著；裴东河译. —北京：人民邮电出版社，2008. 8

（图灵数学 · 统计学丛书）

书名原文：An Introduction to Calculus

ISBN 978-7-115-18373-6

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①小…②裴… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 091944 号

内 容 提 要

本书是由一位世界级数学大师倾注了极大的热情和精力，为有志于认真、系统地学习微积分的学生撰写的一本优秀教材. 书中内容涉及多元微积分，包括：多元函数，多元微分、多元积分的法则，以及曲线和曲面. 作者首先使用积分记号，从 Arzelà 定理导出微积分定理，然后详细介绍定义在矩形上的多元函数的积分和一般情况下的多元函数的积分，最后导出曲线长度公式和曲面面积公式.

本书逻辑严密，采用的大量图示增强了表述的直观性，可作为高等院校本科和专科学生学习微积分的教材或参考书.

图灵数学 · 统计学丛书

微积分入门 II：多元微积分

◆ 著　　[日] 小平邦彦
　译　　裴东河
　责任编辑　明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编 100061　　电子函件 315@ptpress.com.cn
　网址：http://www.ptpress.com.cn
　北京铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
　印张：15
　字数：299 千字　　2008 年 8 月第 1 版
　印数：1–4 000 册　　2008 年 8 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2006-7562 号

ISBN 978-7-115-18373-6/O1

定价：39.00 元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010) 67171154

版权声明

译者序

本书是根据日本岩波书店 2003 年出版的《解析入門II》翻译的. 本书的作者小平邦彦先生是为数不多的同时获得菲尔兹奖和沃尔夫奖的著名数学家之一. 他在调和积分理论、代数几何学和复解析几何学等诸多领域都做出了卓越的贡献. 小平邦彦先生还是一位杰出的数学教育家, 培养了大量的优秀数学工作者.《解析入門 I》和《解析入門 II》就是在他晚年为后人留下的又一重要文化财富. 这是一套表述非常精炼而内容十分丰富的微积分教材 (原著分 I 卷和II卷, 包括附录、习题解答及提示、索引, 仅有 514 页). 由于它以严格的实数理论为基础, 因此与通常的微积分教材不同, 各部分内容简洁而流畅, 充分体现了作者的数学才识. 另外, 本书利用旋转的概念构造了三角函数的理论也是非常有趣的. 它不仅值得数学专业的学生研读, 而且对于需要微积分知识的理工科学生来说, 也是值得一读的好教材或参考书.

本书能得以顺利出版, 首先要感谢人民邮电出版社图灵公司的大力支持, 同时, 东北师范大学的黄松爱老师和研究生刘娜、孔令令、刘美含、刘赢、高瑞梅同学在翻译和校订中给予了大力帮助, 在此一并表示衷心感谢!

在翻译本书的过程中, 译者虽然尽最大努力尊重原文原意, 并尽可能避免直译产生的歧义, 但是由于才疏学浅, 难免存在翻译不当之处, 敬请广大读者批评指正, 以便再版时更正.

裴东河

2007 年 5 月

裴东河　日本北海道大学理学博士, 现为东北师范大学数学与统计学院教授, 博士生导师, 教育部“新世纪优秀人才支持计划资助项目”获得者. 主要研究方向是微分几何与微分拓扑等方面.

前　言

这本微积分入门教材是以刚刚结束高中数学学习, 步入大学后正式学习数学分析的人为对象而编写的. 希望本书能够成为从高中数学通向现代微积分学的桥梁.

分析学的基础是实数论, 本书首先详细而严密地论述了实数论. 最初, 我计划以高木先生的《解析概論》第 3 次修订版 (岩波书店) 和藤原先生的《微分積分学 I》、《微分積分学 II》(内田老鶴圃) 等作为蓝本, 希望用读者容易接受的方式严谨地讲解传统的微积分学, 但是结果却在某些地方脱离了这一宗旨. 首先, 在第 2 章①三角函数的导入上, 本书从角度可以表示为平面的旋转的量的观点出发, 用指数函数 $e^{i\theta}$ 作为媒介定义了三角函数. 因为在进入微分学之前, 对三角函数进行严格的定义是非常必要的.

关于第 4 章的单变量函数的积分, 受高木先生著作② 的启示, 被积函数只限定在有至多有限个不连续点的情况, 而闭区间上具有不连续点的函数的积分都作为广义积分来处理. 在第 5 章中, 介绍了一致有界函数列的 Arzelà 逐项积分定理及由 Hausdorff 给出的初等证明. 这个定理自 Lebesgue 逐项积分定理的出现而被遗忘, 但在应用上非常有用. 在第 6 章中, 使用积分记号, 从 Arzelà 定理导出微积分定理.

在第 7 章中, 将详细介绍多重积分, 即多元函数的积分, 二元函数一般的情况则在第 8 章处理. 由于在一元函数的情况, 被积函数限定为至多具有有限个不连续点, 因此多元函数的情况也应进行简化. 为此, 第 7 章首先在矩形上定义连续函数的积分概念, 然后用 (平面上的) 任意邻域上的连续函数的积分定义广义积分. 从广义积分限定在被积函数是连续函数这一点来说, 它比传统的黎曼积分要狭窄, 但从它适用于任意邻域这一点来说, 又比黎曼积分宽广. 在第 8 章中同样定义了一般情况下的多重积分. 在多重积分中, 我们把重点放在了积分变量的变换公式的严格证明上. 一元函数的积分变量变换公式是直接从不定积分的讨论中导出的. 对于二元函数 $f(x,y)$, 满足 $F_{xy}(x,y)=f(x,y)$ 的函数 $F(x,y)$ 可以作为 $f(x,y)$ 的不定积分③. 7.3 节中双重积分的变量变换公式就是根据这种意义下的不定积分的考察获得的. 其出发点是无论如何也要设法把一元函数的积分变换公式的简洁证明, 推广到两变量的情况. 在第 8 章中, 通过对变量的个数采用归纳法, 证明了一般情况的

① 本书与姊妹篇《微积分入门 I》章节顺序连续编号, 第 1 章 ~ 第 5 章的内容见《微积分入门 I》.
—— 编者注

② 高木貞治《解析概論》, 改訂第 3 版, 岩波書店. pp.109-110. (中文版将由人民邮电出版社出版. —— 编者注)

③ 亀谷俊司《解析学入門》, 朝倉書店, p.303.

多重积分的变量变换公式.

作为微积分的应用, 传统的方法是讲授曲线的长度和曲面的面积, 另外还讲授微分形式理论的初步知识. 但第 8 章已经超过了预定的篇幅, 只好忍痛割爱删除了微分形式理论部分, 在第 9 章中导出曲线长度公式和曲面面积公式后收尾.

现代数学受形式主义的影响很深, 强调数学是公理化构成的论证体系. 但我以为, 正如物理学是描述物理现象一样, 数学是描述客观存在的数学现象. 因此为了理解数学, 明确把握数学现象的直观是非常重要的. 我在撰写本书的过程中, 不仅在论证的严密性上, 而且在直观描述上都下了巨大的功夫.

向在本书的习题解答和提示的写作过程中付出辛勤劳动的前田博信氏表示衷心的感谢.

撰写本书过程中参考了高木先生的《解析概論》和藤原先生的《微分積分学Ⅰ》、《微分積分学Ⅱ》. 我想书中《解析概論》的影响应随处可见. 所有的术语都是以《岩波数学辞典第 3 版》为标准.

本书出版过程中得到了岩波书店编辑部荒井秀男先生的许多帮助, 借此机会向荒井先生表示衷心的感谢.

作 者

1990 年 12 月

《微积分入门 I》

目　录

目 录①

① 本书与姊妹篇《微积分入门 I》章节顺序连续编号, 第 1 章~第 5 章的内容见《微积分入门 I》.

——编者注

第6章　多元函数

6.1　二元函数

设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上点的集合. 如 1.6 节 a) 中定义所述, 平面 $\mathbf{R}^2$ 是直积集合 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, 即实数对 (ξ, η) 全体的集合. 如果属于 D 的每一个点 $P = (\xi, \eta)$ 分别与一个实数 ζ 相对应, 那么称这种对应为定义在 D 上的函数. 当 f 是定义在 D 上的函数时, 通过 f 与 $P = (\xi, \eta) \in D$ 相对应的实数 ζ 称为 f 在 $P = (\xi, \eta)$ 处的值. 用 $f(P)$ 或 $f(\xi, \eta)$ 表示:

$$\zeta = f(P) = f(\xi, \eta).$$

设 S 是 D 的任意子集, $f(P)(P \in S)$ 的全体构成的集合用 $f(S)$ 表示:

$$f(S) = \{f(P) | P \in S\}.$$

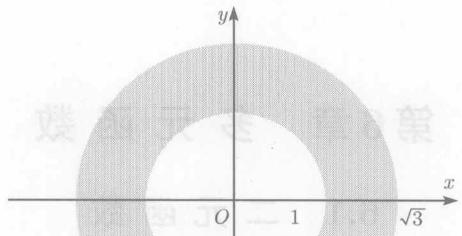
并且称 D 是函数 f 的定义域, f 的值 $f(P)$ 的全体构成的集合 $f(D)$ 称为函数 f 的值域.

函数 f 用 $f(x, y)$ 来表示, 称 x, y 为变量, $f(x, y)$ 是两个变量 x, y 的二元函数. 与此相对应, 2.1 节中引入的函数 $f(x)$ 称为单变量 x 的一元函数. 函数 $f(x, y)$ 中, x, y 只是一种符号, x, y 处可以代入属于 D 的任意点 $P = (\xi, \eta)$ 的**坐标** ξ, η, 或者表示应当代入坐标 ξ, η 处的符号, 这与一元函数的情况相同. 以下根据一般的习惯, *将属于 D 的点的坐标也用 x, y 来表示*. 因此属于 D 的点 $P = (\xi, \eta)$ 可以用 $P = (x, y)$ 表示. 令 $z = f(x, y)$, 称 z 是 x 和 y 的函数, x, y 是自变量, z 是因变量. 当 z 是自变量 x, y 的函数时, 虽然可以认为 "z 是随着 x, y 的变化而变化的量", 但在形式上用如上所述的方式来定义函数. 为了在实际论证时不出现错误, 严格的形式定义是有必要的.

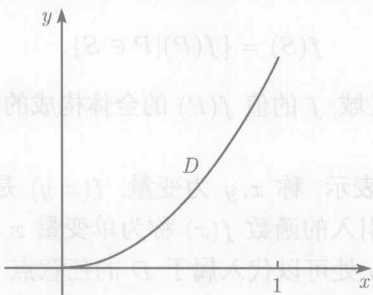
作为二元函数简单的例子有: 关于 x, y 的多项式, 如 $x^4 + y^4 - 4x^3y$; 有理式, 如 $2xy/(x^2 + y^2)$; 多项式的初等函数, 如 $\ln(1 - (x^2 + y^2 - 2)^2)$; 初等函数的有理式等. 关于 x, y 的多项式的定义域当然是平面 $\mathbf{R}^2$. 对数函数 ln 的定义域是 $\mathbf{R}^+ = (0, +\infty)$, 所以 $\ln(1 - (x^2 + y^2 - 2)^2)$ 的定义域是 $|x^2 + y^2 - 2| < 1$, 即满足

$$1 < x^2 + y^2 < 3$$

的所有点 (x, y) 的集合, 即以原点 O 为中心, 以 1 为半径的圆周与以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆周中间的部分.



对于平面 $\mathbf{R}^2$ 的任意子集 D, 可以自由地讨论以 D 为定义域的二元函数 $f(x,y)$. 但是当 D 是极端 "狭窄" 集合时, 例如 $D=\{(x,y)|y=x^2, 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 时, 定义在 D 上的函数 $f(x,y)$ 实际上是一元函数 $f(x,x^2)$.



例 6.1　"人为地构造" 两个变量 x,y 的函数的例子. 设实数 x,y, $0<x<1, 0<y<1$ 的十进制小数表示分别为

$$x=0.h_1h_2h_3\cdots h_n\cdots=\frac{h_1}{10}+\frac{h_2}{10^2}+\frac{h_3}{10^3}+\cdots+\frac{h_n}{10^n}+\cdots,$$

$$y=0.k_1k_2k_3\cdots k_n\cdots=\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\frac{k_3}{10^3}+\cdots+\frac{k_n}{10^n}+\cdots,$$

并且令

$$f(x,y)=0.h_1k_1h_2k_2\cdots h_nk_n\cdots=\frac{h_1}{10}+\frac{k_1}{10^2}+\frac{h_2}{10^3}+\frac{k_2}{10^4}+\cdots.$$

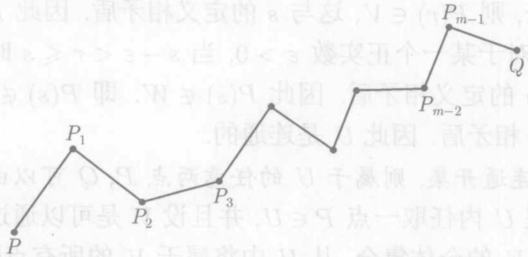
当 x 或 y 是有限小数, 取其用十进制小数表示时, 根据 1.4 节的 f), x,y 的十进制表示唯一确定, 并且 $f(x,y)$ 是在正方形内部: $D=\{(x,y)|0<x<1, 0<y<1\}$ 的定义函数. 该函数的值域 $f(D)$ 是从开区间 $(0,1)$ 中除去形如

$$z=0.l_1l_2l_3\cdots l_{m-2}9l_m9l_{m+2}9\cdots l_{m+2n}9l_{m+2n+2}9\cdots$$

的所有无限小数而得到的集合.

a) 领域和闭领域

平面 $\mathbf{R}^2$ 上的开集 U 是两个不交的非空开集 V, W 的并集: $U = V\cup W, V\cap W = \varnothing$ 时, 若要考察定义在 U 上的函数 $f(x,y)$, 只须将 $f(x,y)$ 分别在 V 和 W 上考察即可. 当开集 U 不能表示为两个不交的非空开集的并集时, 称 U 是**连通的**(connected).



对于平面 $\mathbf{R}^2$ 上的两点 P, Q, 把由有限个线段 $PP_1,P_1P_2,P_2P_3,\cdots,P_{m-1}Q$ 依次连接而成的集合, 即并集

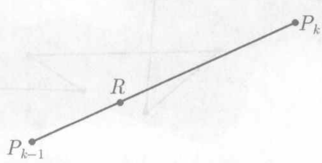
$$L = PP_1 \cup P_1P_2 \cup P_2P_3 \cup \cdots \cup P_{m-2}P_{m-1} \cup P_{m-1}Q$$

称为连接两点 P 和 Q 的折线. 若属于开区间 U 内的任意两点 P,Q 都可以通过 U 内的折线连接, 则 U 是连通的. [证明] 假设 U 不是连通的, 即 $U = V\cup W, V\cap W = \varnothing$, V, W 是非空开集. 任取点 $P\in V, Q\in W$, 则根据假设, U 内存在连接 P,Q 的折线:

$$L = \bigcup_{k=1}^{m} P_{k-1}P_k, \qquad P_0 = P, \qquad P_m = Q.$$

显然对某个 k, $P_{k-1}\in V, P_k \in W$ 成立. 令 $P_k = (u_k, v_k)$, 则

$$P_{k-1}P_k = \{R|R = (\lambda u_{k-1} + \mu u_k, \lambda v_{k-1} + \mu v_k),\ \mu = 1-\lambda, 0\leqslant \lambda \leqslant 1\},$$



并且 R 与 P_{k-1} 的距离为

$$r = |RP_{k-1}| = \mu\sqrt{(u_k - u_{k-1})^2 + (v_k - v_{k-1})^2} = \mu|P_kP_{k-1}|.$$

因此, 如令 $\rho = |P_kP_{k-1}|$, 并且用 $P(r)$ 来表示 R, 则

$$P_{k-1}P_k = \{P(r)|0 \leqslant r \leqslant \rho\}.$$

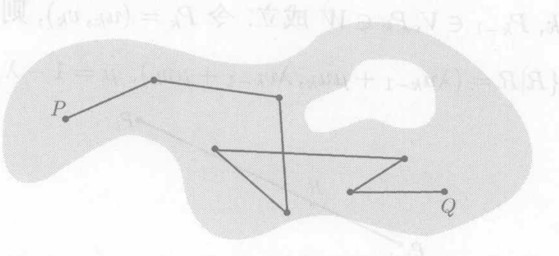
显然 $P(0) = P_{k-1} \in V, P(\rho) = P_k \in W$. 令满足 $P(r) \in V$ 的实数 $r, 0 \leqslant r \leqslant \rho$ 的上确界为

$$s = \sup_{P(r)\in V} r.$$

若假设 $P(s) \in V$, 因为 V 是开集, 所以 V 包含 $P(s)$ 的 ε 邻域 $U_\varepsilon(P(s)), \varepsilon > 0$. 从而, 若 $s \leqslant r < s + \varepsilon$, 则 $P(r) \in V$, 这与 s 的定义相矛盾. 因此 $P(s) \notin V$. 同理, 若假设 $P(s) \in W$, 则对于某一个正实数 $\varepsilon > 0$, 当 $s - \varepsilon < r \leqslant s$ 时, $P(r) \in W$, 从而 $P(r) \notin V$, 这也与 s 的定义相矛盾. 因此 $P(s) \notin W$. 即 $P(s) \notin V \cup W = U$, 这与 $P(s) \in P_{k-1}P_k \subset U$ 相矛盾. 因此 U 是连通的. □

反之, 若 U 是连通开集, 则属于 U 的任意两点 P, Q 可以由 U 内的某一折线连接. [证明] 如果在 U 内任取一点 $P \in U$, 并且设 V 是可以通过 U 内某一折线与 P 相连接的点 $Q \in U$ 的全体集合, 从 U 中将属于 V 的所有点除去后的集合记为 $W = U - V$. 那么只须证明 U 和 V 一致, 即 W 是空集即可. 为此只须验证 V 和 W 都是开集. 这是因为 $U = V \cup W, V \cap W = \varnothing$, 且 U 是连通的. 因为 U 是开集, 所以每一点 $Q \in U$ 分别具有 ε 邻域 $U_\varepsilon(Q) \subset U$. 任取点 $R \in U_\varepsilon(Q)$, 则线段 QR 显然属于 U, 所以如果 P 和 Q 能够由 U 内某折线连接, 那么 P 和 R 在 U 内就能够由某折线连接. 即若 $Q \in V$, 则 $R \in V$, 所以 $U_\varepsilon(Q) \subset V$. 因此 V 是开集. 同理, 如果 P 和 R 在 U 内能够由某个折线连接, 那么 P 和 Q 在 U 内也必能由某折线连接. 换言之, 若 $U_\varepsilon(Q)$ 和 V 有公共点 R, 则 $Q \in V$. 因此, 若 $Q \in W$, 则 $U_\varepsilon(Q) \subset W$, 即 W 也是开集. □

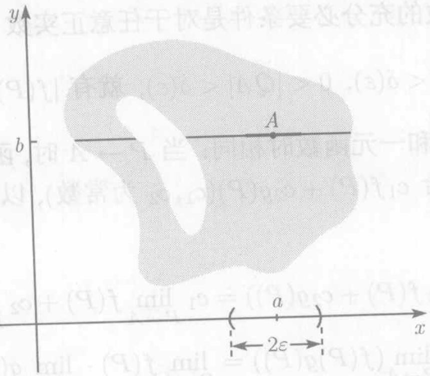
通过上面的证明可得, 开集 U 是连通的充分必要条件是属于 U 的任意两点 P, Q 都能够由属于 U 的某一折线连接.



至此我们对连通的含义有了清楚的了解. 我们称连通开集为**领域**(domain, region), 区域的闭包称为**闭领域**. 本书将主要讨论在领域以及闭领域上定义的函数.

点集 $D \subset \mathbf{R}^2$ 的内点全体构成的集合 U 称为 D 的**开核**(open kernel). 若 D 是闭领域, 则 D 的开核 U 是领域, 并且 D 是 U 的闭包: $D=[U]$. [证明] 假设 D 是某领域 Ω 的闭包: $D=[\Omega]$. 因为每一点 $P\in\Omega$ 是 D 的内点, 所以 $\Omega\subset U$. 因此 $D=[\Omega]=[U]$. 因为 U 是开集, 所以下面证明 U 是连通的即可. 假设 $U=V\cup W, V\cap W=\varnothing, V, W$ 是开集, 由于 Ω 是连通的且 $\Omega\subset V\cup W$, 所以 $\Omega\subset V$ 或 $\Omega\subset W$. 若 $\Omega\subset V$ 则 $W=W\cap D=W\cap[\Omega]\subset W\cap[V]=\varnothing$. 同理, 若 $\Omega\subset W$, 则 $V=\varnothing$. 因此, U 是连通的. □

假设 $f(x,y)$ 是定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的函数, $A=(a,b)$ 是属于 D 的点, 则 $f(x,b)$ 为在实数 ξ 处取值的关于 x 的函数, 其中 ξ 满足 $(\xi,b)\in D$. $f(x,b)$ 的定义域是 $\{\xi|(\xi,b)\in D\}$. 例如, 当 $D=\{(x,y)|y=x^2, 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 时, 若 $(\xi,b)\in D$, 则 $\xi=\sqrt{b}$, 所以若 $f(x,b)$ 只是定义在由一个实数 $\sqrt{b}$ 组成的集合 $\{\sqrt{b}\}$ 上, 其意义不大. 而当 D 是领域时, 只要 $|\xi-a|<\varepsilon$, 就能够确定满足 $(\xi,b)\in D$ 的正实数 ε, 所以 $f(x,b)$ 的定义域包含开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, 并且 $f(x,b)$ 实际上是 x 的函数.



当我们考虑用常数 b 替换函数 $f(x,y)$ 的变量 y 而得到的关于 x 的函数 $f(x,b)$ 时, 通常会省略用 b 替代 y 的过程, 仍然用 y 表示常数. 此时, 称固定 y 后的函数 $f(x,y)$ 为关于 x 的函数. 显然这种说法也是以"$z=f(x,y)$ 是随着 x 和 y 的变化而变化的量"这一想法为背景的. 固定 x 后的 $f(x,y)$ 为关于 y 的函数, 也蕴含着同样的含义. 当 y 固定时, 若 $f(x,y)$ 是 x 的连续函数, 那么就称函数 $f(x,y)$ 关于 x 连续.

b) 极限

2.1 节中叙述的关于一元函数极限的讨论同样适用于二元函数的极限. 首先:

定义 6.1 设 D 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的任意点集, $f(P)=f(x,y)$ 是定义在 D 上的函数, 并且 A 是 D 的聚点, α 是实数. 如果对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } 0 < |PA| < \delta(\varepsilon), \text{ 就有 } |f(P) - \alpha| < \varepsilon \text{ 成立}, \tag{6.1}$$

则称当 $P \to A$ 时 $f(P)$ 收敛于 α, 并且称 α 是 $P \to A$ 时 $f(P)$ 的极限. 记为

$$\lim_{P \to A} f(P) = \alpha$$

或者

$$P \to A \text{ 时}, \quad f(P) \to \alpha.$$

(6.1) 式中 P 作为 D 中的点来考虑, 这与一元函数的情况一样. 把 A 假设为 D 的聚点是为了排除满足 $0 < |PA| < \delta(\varepsilon)$, 而 $P \notin D$ 的情况.

若 $P \to A$ 时, $f(P)$ 收敛于 α, 则对于收敛于 A 的所有的点列 $\{P_n\}, P_n \in D, P_n \neq A$ 对应的数列 $\{f(P_n)\}$ 收敛于 α. 这是显然的.

对于收敛于 A 的所有点列 $\{P_n\}, P_n \in D, P_n \neq A$, 若对应的数列 $\{f(P_n)\}$ 是收敛的, 则 $P \to A$ 时 $f(P)$ 收敛. 证明过程与 2.1 节中一元函数的情况相同. 根据这个结果, 与一元函数的情况相同, 可推导出 Cauchy 判别法.

定理 6.1 (Cauchy 判别法) 设 $f(P)$ 是定义在 D 上的函数, A 是 D 的聚点. 当 $P \to A$ 时, $f(P)$ 收敛的充分必要条件是对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } 0 < |PA| < \delta(\varepsilon),\ 0 < |QA| < \delta(\varepsilon), \text{ 就有 } |f(P) - f(Q)| < \varepsilon \text{ 成立}.$$

以下推导过程也和一元函数时相同: 当 $P \to A$ 时, 函数 $f(P)$ 和 $g(P)$ 同时收敛, 则它们的线性组合 $c_1 f(P) + c_2 g(P)$(c_1, c_2 为常数), 以及它们的积 $f(P)g(P)$ 也收敛, 并且

$$\lim_{P \to A} (c_1 f(P) + c_2 g(P)) = c_1 \lim_{P \to A} f(P) + c_2 \lim_{P \to A} g(P),$$

$$\lim_{P \to A} (f(P)g(P)) = \lim_{P \to A} f(P) \cdot \lim_{P \to A} g(P).$$

进而, 若 $\lim\limits_{P \to A} g(P) \neq 0$, 则商 $f(P)/g(P)$ 也收敛, 并且

$$\lim_{P \to A} (f(P)/g(P)) = \lim_{P \to A} f(P) / \lim_{P \to A} g(P).$$

c) 连续性

设 D 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上任意点集, $f(P) = f(x, y)(P = (x, y))$ 是定义在 D 上的函数, $A = (a, b)$ 是 D 中的点.

定义 6.2 如果对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } |PA| < \delta(\varepsilon), \quad \text{就有 } |f(P) - f(A)| < \varepsilon \text{ 成立}, \tag{6.2}$$

那么称函数 $f(P)$ 在点 A 处连续.

因为 $|PA|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, 所以定义 6.2 若用坐标来描述, 则成为: 对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } |x-a|<\delta(\varepsilon), |y-b|<\delta(\varepsilon), \text{ 就有 } |f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon \text{成立}, \tag{6.3}$$

那么称函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处连续.

上述定义 6.2 中, 因为 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是任意点集, 所以也存在 A 是 D 的孤立点的情况, 这时若取正实数 δ 非常小, 只要 $|PA|<\delta$, $P\in D$, 就有 $P=A$, 从而得到以 D 为定义域的函数都在点 A 处连续这样平凡的结论. 若将这种情况排除, 则 A 是 D 的聚点, 并且函数 $f(P)$ 在点 A 处连续蕴含

$$\lim_{P\to A} f(P)=f(A).$$

函数 $f(x,y)$ 在定义域 D 内所有的点处都连续时, 称 $f(x,y)$ 是**连续函数**, 或者称为两个变量 x,y 的二元连续函数. 此时称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 或者在 D 上关于变量 x,y 连续.

若以某领域 D 为定义域的函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 则根据 (6.3) 式, 显然有: 将 y 固定时, $f(x,y)$ 关于 x 连续; 将 x 固定时, $f(x,y)$ 关于 y 连续, 反之未必成立. 即尽管 $f(x,y)$ 在 y 固定时关于 x 连续; 在 x 固定时关于 y 连续, 但是 $f(x,y)$ 未必在 D 上连续.

例 6.2 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 令 $f(x,y)=2xy/(x^2+y^2)$, 并且令 $f(0,0)=0$, 则得到以 $\mathbf{R}^2$ 为定义域的函数 $f(x,y)$. 显然, 若 y 固定, 则 $f(x,y)$ 关于 x 连续; 若 x 固定, 则 $f(x,y)$ 关于 y 连续. 当 $x\neq 0$ 时, $f(x,x)=1$, 所以作为两个变量 x,y 的二元函数 $f(x,y)$ 在原点 $O=(0,0)$ 处不连续.

若 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 都是定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的连续函数, 则它们的线性组合 $c_1f(x,y)+c_2g(x,y)$, c_1,c_2 是常数, 以及乘积 $f(x,y)g(x,y)$ 也是定义在 D 上的连续函数. 进而, 若在 D 上 $g(x,y)\neq 0$, 商 $f(x,y)/g(x,y)$ 也是定义在 D 上的连续函数. 根据函数极限的运算法则这是显然的.

x 和 y 都是定义在平面 $\mathbf{R}^2$ 上的两个变量 x,y 的二元连续函数. 所以, 由上述结果, x 和 y 的多项式:

$$f(x,y)=\sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{hk}x^hy^k,\quad a_{hk}\ \text{为常数},$$

是两个变量 x 和 y 的二元连续函数. 有理式 $f(x,y)/g(x,y)$ [其中 $f(x,y),g(x,y)$ 是多项式] 除去满足 $g(x,y)=0$ 的点 (x,y) 外在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

d) 复合函数

设 $f(P)=f(x,y),g(P)=g(x,y)(P=(x,y))$ 是定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的连续函数, $\varphi(u,v)$ 是定义在 $\Delta\subset\mathbf{R}^2$ 上关于 u,v 的连续函数, 并且设对于所有的 $P\in D$,

$(f(P),g(P))\in\Delta$. 那么, 复合函数 $\varphi(f(x,y),g(x,y))$ 在 D 上关于 x,y 连续. [证明]

证明是简单的. 任取点 $A\in D$, 若 $\alpha=f(A),\beta=g(A)$, 则 $(\alpha,\beta)\in\Delta$. 因为 f,g,φ 是连续函数, 所以对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta_1(\varepsilon)$ 和 $\delta_2(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } |PA|<\delta_1(\varepsilon),\quad \text{就有 } |f(P)-f(A)|<\varepsilon,\quad |g(P)-g(A)|<\varepsilon,$$

$$\text{只要 } |u-\alpha|<\delta_2(\varepsilon),\quad |v-\beta|<\delta_2(\varepsilon),\quad \text{就有 } |\varphi(u,v)-\varphi(\alpha,\beta)|<\varepsilon.$$

因此, 若令 $\delta(\varepsilon)=\delta_1(\delta_2(\varepsilon))$, 则

$$\text{只要 } |PA|<\delta(\varepsilon), \text{就有 } |\varphi(f(P),g(P))-\varphi(f(A),g(A))|<\varepsilon \text{ 成立.}$$

即函数 $\varphi(f(x,y),g(x,y))$ 在点 A 处连续, 这里 A 是 D 中的任意点, 因此 $\varphi(f(x,y),g(x,y))$ 在 D 上连续. □

根据此结果和上述多项式的连续性, 若 $f(x,y),g(x,y)$ 在 D 上连续, 则

$$\sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{hk}f(x,y)^h g(x,y)^k,\quad a_{hk}\text{ 为常数,}$$

在 D 上也连续.

e) 连续函数的性质

在 2.2 节 b) 中证明过的关于一元连续函数的定理 2.3~ 定理 2.6 很容易扩展到二元连续函数上.

定义 6.3 设 $f(P)=f(x,y)(P=(x,y))$ 是定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的函数. 对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } |PQ|<\delta(\varepsilon),\quad P\in D,\quad Q\in D,\quad \text{就有 } |f(P)-f(Q)|<\varepsilon \text{ 成立,}$$

那么称 $f(x,y)$ 在 D 上**一致连续**.

定理 6.2 定义在有界闭集 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的连续函数在 D 上一致连续.

证明 关于闭区间上连续函数的一致连续性的定理 2.3 的证明仅以闭区间是紧致的为基础, 并且根据 1.6 节 e) 中定理 1.28, D 是紧致的, 所以仍然适用于定理 6.2 的证明, 但是此处我们以定理 1.30 为基础介绍另外的证明方法.

假设定义在有界闭集 D 上的连续函数 $f(P)=f(x,y),P=(x,y)$ 在 D 上不一致连续, 则对于某一个正实数 ε, 无论取什么样的正实数 δ,

$$\text{当 } |PQ|<\delta,\quad P\in D,\quad Q\in D \text{ 时,}\quad \text{不等式 } |f(P)-f(Q)|<\varepsilon \text{ 都不成立.}$$

因此, 对于每一个自然数 n, 都存在点 P_n, Q_n, 使得

$$\text{当 } |P_nQ_n|<\frac{1}{n},\quad P_n\in D,\quad Q_n\in D \text{ 时,}\quad |f(P_n)-f(Q_n)|\geqslant\varepsilon\text{成立.}\tag{6.4}$$

因为点列 $\{P_n\}$ 有界, 所以根据定理 1.30, 此点列具有收敛的子列: $P_{n_1},P_{n_2},P_{n_3},\cdots,P_{n_j},\cdots,n_1<n_2<n_3<\cdots<n_j<\cdots$. 设该极限为 $A=\lim\limits_{j\to\infty}P_{n_j}$, 因为 D 是闭集,