高等学校教材

Tanxing Lixue

弹性力学

韩江水　屈钧利　编

中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

Gaodeng Xuexiao Jiaocai TANXING LIXUE

高等学校教材

弹性力学

韩江水　屈钧利　编

中国矿业大学出版社

内容提要

本书系统叙述了弹性力学的基本理论和方法，主要内容包括：应力、应变分析及本构关系、弹性力学问题的基本解法；弹性力学平面问题、热弹性问题及空间问题的解答；能量原理、弹性力学的数值分析方法；弹性波等。

全书内容精练，结构紧凑，重点突出，既注重基本理论系统性的阐述又凸显了其实用性，基本理论的表述采用了张量的形式。

本书可作为高等学校工程力学、土木类、地矿类、机械类等相关专业的本科生和研究生教材，也可供相关工程领域的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学/韩江水，屈钧利编．—徐州：中国矿业大学出版社，2007.7

ISBN 978-7-81107-648-6

Ⅰ．弹…　Ⅱ．①韩…②屈…　Ⅲ．弹性力学　Ⅳ．O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 098486 号

书　　名　弹性力学
编　　者　韩江水　屈钧利
责任编辑　吴学兵　姜　华
出版发行　中国矿业大学出版社
（江苏省徐州市中国矿业大学内　邮政编码 221008）
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com
排　　版　中国矿业大学排版中心
印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司
经　　销　新华书店
开　　本　787×960 1/16　**印张** 18.25　**字数** 347 千字
版次印次　2007 年 7 月第 1 版　2007 年 7 月第 1 次印刷
定　　价　30.00 元

前　言

弹性力学是固体力学学科的主要内容之一。由于在科学研究及工程应用中的重要作用，决定了弹性力学是工科力学及工程类相关专业的重要技术基础课程。

本书参照原国家教委审定的高等工科院校弹性力学课程教学的基本要求，结合作者多年为工程力学、土木类、地矿类等相关专业本科生、研究生讲授弹性力学课程的教学实践经验，并汲取各兄弟院校教学改革的共识和国内外各种版本的弹性力学教材、论著的优点编写而成。其目的是为工程力学、土木类、地矿类等相关专业的本科生、研究生提供一本难度适中的实用教材。

本书具有以下几个特点：

1. 本书采用从一般到特殊的课程内容体系，其理论系统性强、起点高。本书的前几章全面阐述了应力、应变理论、本构关系、弹性力学问题的基本方法和一般原理，随后将这种基本理论和方法推广到求解平面问题、空间问题及热弹性问题等内容。

2. 本书内容共 11 章，主要有微分提法和变分提法两部分。微分提法包括：(1) 应力分析、应变分析、本构关系、弹性力学问题的基本解法和一般原理，这部分内容是弹性力学的基础和框架；(2) 平面问题、空间问题以及相应的应力、位移和应力函数解法等；(3) 热弹性问题及弹性波的传播。变分提法包括：能量原理和基于该原理的近似方法。

3. 本书在基本理论的表述上采用了张量的形式，使理论公式推导简化，同时为读者阅读有关文献和进一步学习打下了基础。在具体问题的表述上采用正交坐标系，使读者感到弹性理论可读又可及。

4. 本书有与之相配套的计算机辅助教学(CAI)课件，该课件覆盖了全书的主要内容，文图并茂，生动形象，使用方便，大大增加了课堂教学的信息量，精简了学时，提高了教学质量，实现了教学手段的现代化。

本书由韩江水、屈钧利执笔完成。西安科技大学的董立红和力学教研室的老师们以及中国矿业大学出版社为本书的出版给予了支持和帮助；同时，作者在书中引用了专家学者的文献资料，在此一并表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者予以指正。

编者

2007 年 5 月

目　录

绪　论

0.1　弹性力学的任务

弹性力学是连续介质力学的重要组成部分之一，是研究在外载作用下或在温度变化时弹性体中内力状态和变形规律的一门学科。所谓的弹性体，就是在外部因素（载荷、温度变化等）作用下发生变形时应力和应变呈单值的函数关系，且在外部因素消除后能恢复其初始形状和尺寸的物体。与材料力学相比，弹性力学研究的内容广泛，研究方法严谨，研究对象有由弹性体构成的杆件、非杆状结构，研究的内容既有准静态问题、动力问题，也有恒温问题、变温问题，等等。材料力学中主要采用简化的用初等理论可以描述的数学模型，而弹性力学中则采用较精确的数学模型并进行严格的数学推导，因而得到的结果更加精确。同属固体力学范畴的弹性力学和材料力学，它们在研究对象和基本假设上具有相同之处，但由于研究方法的不同，它们的结论也就不尽相同。例如，材料力学研究直梁在横向载荷作用下的弯曲时，除引用弹性力学、材料力学共同的基本假设外，还引用梁截面的平面假设，从而得出梁横截面上正应力按直线分布的结论。弹性力学研究这一问题时，所得到的结论是横截面上的正应力通常不是按直线规律分布，而是按曲线规律分布的；只有当梁的长度比其高度大得多时（即 $L\geqslant 10h$ 的细长梁），材料力学的结论才接近于实际情况。由此可见，弹性力学不仅可以给出解决材料力学无法求解的问题的理论和方法，而且还能给出材料力学所得结论的可靠性和精确度的度量。

弹性力学既是一门基础理论学科，也是一门应用学科。大多数工程材料在相当广泛的荷载作用下可以近似地理想化为弹性体，所以弹性力学与工程实践有着密切的关系。事实上，土木、机械、航天、航空、航海、矿业、水利等工程领域的许多研究课题都需用弹性理论去求解。随着计算科学的飞速发展，计算机和弹性力学的完美结合，使得弹性力学这门学科在工程领域中的应用有了长足的发展。

弹性力学是以理论力学、材料力学和应用数学等课程为基础的。通过本课程的学习，将系统地掌握处理弹性体一般问题的基本概念、基本原理和基本方

法，为学习塑性理论、连续介质力学、有限单元法、实验应力分析、板壳理论、断裂力学等后续课程打下坚实的基础。

0.2　弹性力学发展概况

弹性力学是在不断解决工程实际问题的过程中得到发展和完善的。其发展过程大致可划分为如下几个阶段：

(1) 17 世纪后半叶至 18 世纪末，科学工作者主要通过试验来探索弹性力学的基本规律。1678 年，英籍科学家胡克(R. Hooke)在大量实验的基础上，发现了在单向应力状态下弹性体的变形与所受外力成正比的规律，即目前广泛使用的胡克定律。1680 年，马略特(E. Mariotte)在实验的基础上确定出了梁截面上的应力分布及中性轴的位置。1705 年，雅科布・伯努利(Jakob Bernolli)提出了梁的弯曲理论和平板振动理论。1744 年，丹尼尔・伯努利(Daniel. Bernolli)提出了弹性杆挠曲线的概念。1757 年，瑞士人欧拉(L. Euler)提出了柱体的稳定及棒的振动问题。1773 年，法国科学家库仑(C. A. Coulomb)提出了强度理论，完整地形成了矩形截面梁弯曲理论，并于 1784 年提出了柱体的扭转问题等。

(2) 19 世纪上半叶，科学工作者通过深入的研究奠定了弹性力学的理论基础。1807 年，托马斯・杨(Thomas Young)通过实验确定了一些材料的弹性模量，即现在广泛采用的杨氏模量。19 世纪 20 年代，法国科学家纳维(C. L. M. H. Navier)、柯西(A. L. Cauchy)明确地提出了应力、应变等基本概念，并建立了几何方程、平衡(运动)方程及应力、应变本构关系的弹性力学基本方程。1828 年，数学家泊松(S. D. Poisson)进一步完善了弹性力学的基本方程。在随后的几十年间，对各向异性和各向同性弹性体的独立弹性系数的确定进行了深入的研究。1833～1855 年，格林(G. Green)经深入研究后认为独立的弹性系数为 21 个，至此，弹性力学的数学模型已被严格确立。

(3) 19 世纪后半叶至 20 世纪 50 年代是弹性力学在理论上和实际应用上都有长足发展的时期。1855 年，法国科学家圣维南(Barre de Saint-Venant)发表了用半逆解法求解柱体扭转和弯曲的文章，并提出了著名的圣维南原理。1862 年，艾瑞(G. B. Airy)提出了用应力函数法来求解平面应力问题。1882 年，德国科学家赫兹(H. R. Hertz)解决了弹性接触问题。1898 年，德国人基尔施(G. Krisch)发现了应力集中现象，给出了受拉薄板上小圆孔附近的应力分布规律。19 世纪 50 年代，麦克斯韦(J. C. Maxwell)开创了光测弹性应力分析技术。1872 年，意大利人贝蒂(E. Betti)提出了贝蒂互等定理……后来为了从数学上简化问题，人们发展了弹性力学问题的势函数解法、调和函数解法以及重调和函数解

法。20 世纪 30 年代，苏联学者穆斯海里什维理(Мусхелишвипи)等发展了求解弹性力学问题的复变函数法，为分析有孔口、夹杂或裂纹的弹性体的应力集中问题提供了强有力的工具……这些研究成果提高了机械、工程结构的设计水平，奠定了弹性力学在工程界的重要地位，同时也促进了弹性理论的发展和完善。

(4) 对各种复杂的工程实际问题要求其解析解往往是很困难的，因此人们长期以来致力于寻求求解弹性力学问题的各种近似方法。变分法、加权残数法是求解弹性力学问题的半解析法，而有限差分法、有限单元法和边界元法是求解弹性力学问题的数值解法。1960 年，自从克劳夫(R. W. Clough)正式提出“有限单元法”这一名称后，有限单元法已成为连续体离散化的一种标准研究方法。随着计算机科学的发展，有限单元法与计算机的完美结合，使得弹性力学这门既经典又年轻的学科焕发出勃勃生机，把弹性理论的研究和应用水平推向了新的高度，为弹性力学在工程技术中的应用开辟了广阔的前景。

近几十年来，弹性力学在其专门问题的深入研究及交叉学科的应用方面都有了长足的发展，如各向异性弹性理论、非线性弹性理论、热弹性理论、线弹性断裂力学、粘弹性理论等弹性理论的交叉学科都有了蓬勃发展，这些交叉学科的发展大大地丰富了弹性理论的内容，也促进了工程设计技术的发展。

我国的力学工作者为弹性理论的发展和完善以及在工程中的应用作出过创造性的贡献，并得到国际学术界的公认，他们中的杰出代表有钱伟长(广义变分原理)、胡海昌(广义变分原理)、钱令希(余能理论)、冯康(有限元法理论)等。

0.3　弹性力学的基本假设

一般情况下，弹性介质组成的固体结构的力学特性是非常复杂的。为了把变形固体抽象为力学模型，同时也为了使研究的问题简化，达到数学上容易处理的程度，在研究弹性体结构时，我们只考虑那些对结构强度有影响的主要因素，而忽略一些对强度影响不大的次要因素。为此，须引进一些基本假设，这些基本假设包括物理假设和几何假设。

一、连续性假设

认为组成变形固体的介质毫无空隙地充满了固体的体积，因此，物体中的应力、变形、位移、能量密度等量可表示为坐标的函数，对这些量可以进行坐标增量为无限小的极限分析。实际上，组成固体的粒子之间存在着空隙，这种空隙与物体的几何尺寸相比是很微小的，可以忽略不计，因而可将变形固体抽象为连续介质。

二、完全弹性假设

完全弹性就是指弹性体在载荷作用下发生变形，这些变形在弹性体卸载后能够完全消除，没有任何残余变形。弹性体在加、卸载的过程中其变形与载荷存在一一对应的单值函数关系，当这种关系表现为线性关系时(服从虎克定律)，相应的弹性体称为线弹性体(线弹性材料)；当这种关系表现为非线性关系时，称为材料非线性效应。譬如，有一些材料，当应力较小时表现为线弹性，而当应力超过弹性极限后表现为非线性。研究线性关系的弹性理论称为线弹性理论；反之，称为非线性弹性理论。线弹性理论也称经典弹性理论。

三、均匀性和各向同性假设

均匀性是指弹性体是由同一种介质组成的，因而弹性体内各点的物理性质处处相同。各向同性假设是指弹性体内一点在各个方向上的物理性质完全相同。根据均匀性和各向同性假设可知，弹性体内各部分的物理性质是完全相同的，即物理性质不随点的位置和方向的变化而变化。实际上，金属材料都可看做是均匀的，大多数是各向同性的。而木材、复合材料、地壳结构等必须考虑非均匀性和各向异性。

四、无初应力假设

无初应力假设认为弹性体在受到广泛荷载作用之前处于无初应力的自然状态。也就是说，由弹性力学求出的物体内各点的应力(或应变)仅仅是由载荷或温变变化等引起的。若物体内有初应力(残余应力、装配应力等)存在，则物体中的应力应是初应力和广泛荷载作用下引起的应力的叠加。

五、小变形假设

该假设认为物体受到广泛荷载作用所产生的变形相对于物体的原始尺寸来说是很微小的，因而应变分量和转角都远小于 1。依据此假设，在研究物体受力后的平衡状态时，可以用平衡前的几何尺寸代替平衡后的几何尺寸(或者说可以不考虑物体尺寸的改变)，而不致引起大的误差。在研究物体的形变和位移时，转角和应变的二次及其以上项可略去不计。这样，在小变形的情况下，弹性力学的全部基本方程都是线性的。

在以上基本假设中，前四个假设属于物理假设，而小变形假设属于几何假设，其中连续性和线弹性是弹性力学最基本的假设。

0.4 弹性力学的基本方法

材料力学以杆件为主要的研究对象，要求杆件横截面上的内力和应力，典型的方法是截面法。在材料力学中，求解超静定问题的步骤是建立力的平衡方程、

变形的几何协调方程和应力、应变的物理方程。而弹性力学以任意复杂形状的物体为研究对象，从更为普遍的观点上处理问题。它以一点处的变形、力的平衡、力与变形的关系为出发点，建立弹性体内任意点的几何方程、平衡方程及物理方程，这组被称为弹性力学基本方程的偏微分方程组，要想获得正确的解答还需满足相应的边界条件，这样的问题在数学上称为微分方程的边值问题，弹性力学上称为微分提法。对于某些具体的边值问题，可用解析法求得弹性力学问题的解析解，尽管解析解能以简明的结果提供物体受力变形的全部信息，但由于实际问题的复杂性，能够用解析的方法求解的弹性力学问题是很有限的。因此，弹性力学问题还广泛地采用各种近似的求解方法和实验法。在半解析法方面有加权残数法和变分法。弹性力学的变分法从弹性系统整体入手，建立该系统的适当泛函，把边值问题转化成泛函的极值问题来处理，这种方法也称弹性力学的变分提法。数值分析和实验法有有限差分法、有限单元法、边界元法、电测法及光测法等。解析法、数值分析法及实验法互为补充，使弹性力学在解决工程实际问题中能发挥更有力的作用。

0.5　弹性力学中的常用概念及通用记号

弹性力学中常用的基本概念有外力、应力、形变和位移。

按作用区域的不同，作用于物体的外力可分为体积力和表面力，简称为体力和面力。

面力是作用在物体表面上的力，如物体之间的接触力，大气压强等。物体表面上各点的受力情况，一般情况下是不同的。图 0-1(a)所示的面力矢量可表示为

$$\boldsymbol{q}_v = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{T}}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}S}$$

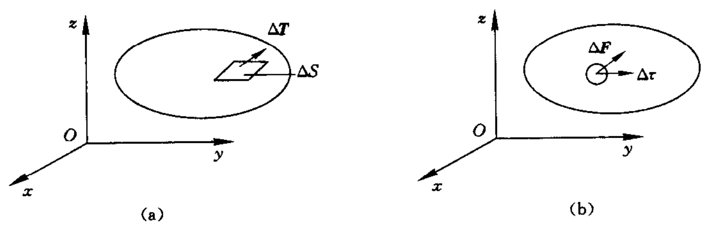

图 0-1

上式中，ΔS 为面力作用微元的面积；$\Delta \boldsymbol{T}$ 为作用在 ΔS 上面力的合力。面力的单位有 $\mathrm{N/m^2}$，$\mathrm{kN/m^2}$；量纲是[力][长度]$^{-2}$。

体力分布在物体的体积内，作用在物体内的所有质点上，如重力和惯性力等。作用在物体内各点的体力一般情况下是不同的。体力是物体内各点位置的函数，通常用体力集度表示。图 0-1(b)所示的体力矢量可表示为

$$\boldsymbol{p} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta \tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\tau}$$

上式中，$\Delta\tau$ 表示微元体体积；$\Delta \boldsymbol{F}$ 表示作用在 $\Delta\tau$ 上的体积力的合力。体积力的单位是 $\mathrm{N/m^3}$，$\mathrm{kN/m^3}$；量纲是[力][长度]$^{-3}$。

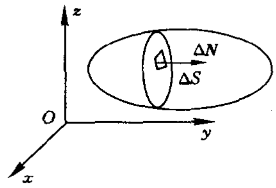

图 0-2

物体受外力的作用或由于温度的改变，其内部将产生内力，如图0-2所示。一点处内力的分布情况可用应力来表示，即

$$\boldsymbol{q} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{N}}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}S}$$

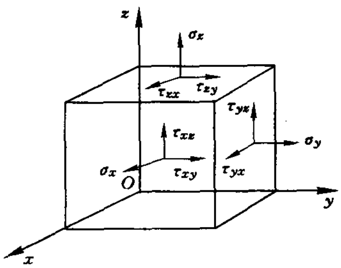

图 0-3

为了研究各点的应力分布情况，将弹性体想像为由无数个微元体构成，因此，一点处的应力分布情况用微小六面体上应力的情况来描述。把垂直于单元体侧面上的应力称为正应力，用 $\sigma_{ii}(i = 1,2,3)$ 表示；侧面内垂直于正应力的应力称为剪应力，用 $\tau_{ij}(i = 1,2,3; j = 1,2,3)$ 来表示。例如，σ_{xx} 表示沿 x 轴的正应力，τ_{xy} 表示垂直于 x 轴沿 y 轴方向的应力。描述一点单元体上的应力分布，可用应力张量来表示

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

因为 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$（剪应力互等），所以 $\boldsymbol{\sigma}$ 为二阶对称张量。

一点处的形变包括正形变（正应变）[图 0-4(a)]和剪形变（剪应变）[图 0-4(b)]。正形变以伸长为正，以缩短为负；剪形变以使直角变小为正，以使直角变大为负。

描述一点单元体上的形变分布，可用应变张量来表示

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

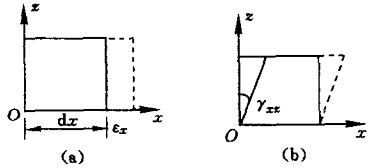

图 0-4

这里应注意 $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}=\frac{1}{2}\gamma_{ij}$，所以 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 亦为二阶对称张量。

一点处的位移用位移向量 $\boldsymbol{u}$ 表示

$$\boldsymbol{u}=[u \quad v \quad w]^{\mathrm{T}}$$

各向同性弹性体的弹性常数有拉压弹性模量 E，剪切弹性模量 G 和泊松比 μ，三者之间的关系为

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

若在外界广泛的荷载作用下，在被研究对象内产生的应力、应变或位移是三维坐标的函数，则此类问题称为弹性力学的空间问题。

当物体具有特殊尺寸（一个方向尺寸远远小于另外两个方向的尺寸），并受到特殊的广义外力分布或温度变化作用时，这种情况下空间弹性力学问题可简化为平面弹性力学问题。在研究弹性体内一点处的应力、应变与位移时，只需求解平行于某一平面的应力、应变和位移。在平面问题中，应力、应变和位移这些量都是平面坐标 x,y 的函数。弹性力学平面问题可分为平面应变问题和平面应力问题。

小　结

一、弹性力学的任务

弹性力学是研究在外载作用下或温度变化时弹性体中内力状态和变形规律的一门学科。

二、弹性力学的发展概况

弹性力学的发展过程大致可划分为四个阶段。

三、弹性力学的基本假设

(1) 连续性假设

(2) 完全弹性假设

(3) 均匀性和各向同性假设

(4) 无初应力假设

(5) 小变形假设

四、弹性力学的基本方法

(1) 解析法

① 微分提法；

② 逆解法与半逆解法。

（2）近似求解法

① 变分提法(能量原理)；

② 加权残值法；

③ 数值分析法(有限单元法)。

（3）实验法

电测法与光弹性法。

第 1 章　应力分析

本章从静力学的观点出发研究弹性介质在广泛荷载作用下的平衡状态。介绍一点的应力状态概念，建立弹性体的平衡方程及外力边界条件以及主应力、应力状态特征方程、应力张量不变量和坐标变换等内容。本章所讨论的内容不涉及弹性介质的物理性质及变形情况，所得结论适用于任何连续介质。

1.1　弹性力学的平衡(运动)方程

图 1-1 所示的弹性体处于平衡状态，在其中取出一单元体如图 1-2 所示。设单元体各边长分别为 dx、dy、dz，则其体积为 dτ $=$dxdydz。设作用于物体上的体积力沿三轴向分别为 p_x、p_y、p_z。物体内任一点的应力是该点坐标 (x,y,z) 的函数，描述一点应力状态的单元体 x、$x+$dx 面上的正应力分别为

$$\sigma_x = f(x,y,z),\ \sigma'_x = f(x+\mathrm{d}x,y,z) \tag{1-1}$$

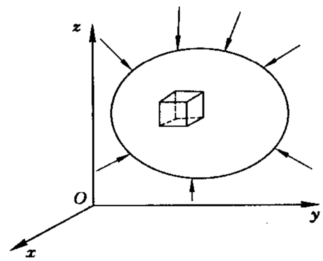

图 1-1

将式(1-1)按牛顿二项式展开，并略去高阶小量有

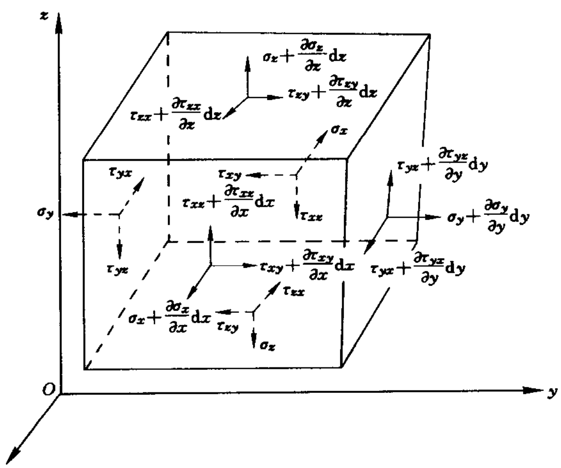

图 1-2

$$f(x+\mathrm{d}x,y,z)=f(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2+\cdots \tag{1-2}$$

由式(1-1)、式(1-2)有

$$\sigma'_x=\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x$$

同理,可得

$$\sigma'_y=\sigma_y+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\mathrm{d}y \qquad \sigma'_z=\sigma_z+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\tau'_{xy}=\tau_{xy}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x \qquad \tau'_{xz}=\tau_{xz}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$\tau'_{yx}=\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y \qquad \tau'_{yz}=\tau_{yz}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\tau'_{zx}=\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z \qquad \tau'_{zy}=\tau_{zy}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}z$$

对于图 1-2 所示单元体,由于其处于平衡状态,由静力平衡方程有 $\sum X=0$,即

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sigma_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\tau_{xy}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\tau_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+$$
$$\left(\tau_{xz}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\tau_{xz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+p_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

该式经简化后得式(1-3a)的第一式。同理,由平衡方程式 $\sum Y=0$,$\sum Z=0$ 有式(1-3a)中的第二和第三式。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+p_x=0\\
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+p_y=0\\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+p_z=0
\end{aligned}\right\} \tag{1-3a}$$

式(1-3a)称为弹性力学的平衡方程式,该式写成张量形式为

$$\sigma_{ij,j}+p_i=0 \tag{1-3b}$$

如果弹性体处于运动状态,则作用在质点上的力除体积力外,还有惯性力,式(1-3b)可写成

$$\sigma_{ij,j}+p_i=\rho\,\ddot{u}_i \tag{1-3c}$$

式(1-3c)称为弹性力学的运动微分方程式。