21世纪高等院校教材

线性代数与解析几何

冯良贵　戴清平
李　超　谢端强　编著

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

线性代数与解析几何

冯良贵 戴清平
李 超 谢端强 编著

科学出版社
北京

内容简介

本教材以教育部新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为指导思想，以适应新型人才培养和适应现代教学方式为基本原则，在保证教材系统性和科学性的前提下，着重解决了线性代数与空间解析几何的有机结合问题，数学软件、几何直观和应用实例的相互融合问题，以及矩阵、线性方程组和向量空间编写顺序的合理安排问题.

全书共分5章. 主要内容包括：行列式、矩阵、向量与线性空间、相似矩阵、二次曲面与二次型等.

本书可供工业院校各专业、军队院校和财经院校的相关专业使用，也可供科技工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何/冯良贵等编著. —北京：科学出版社，2008
21世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-020081-5

Ⅰ. 线… Ⅱ. 冯… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 ②解析几何-高等学校-教材 Ⅳ. O151.2 O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第204926号

责任编辑：李鹏奇 王 静 杨 然 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008年1月第一次印刷 印张：13
印数：1—6 000 字数：246 000

定价：19.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

数学素质的培养是大学生创新素质培养的基础和重要组成部分. 以提高学员数学素质为宗旨,国防科技大学数学与系统科学系代数组自 2000 年以来一直致力于建设新型代数系列课程和编写与其相适应的优秀教材,并先后获得了学校和理学院的教学项目资助. 这部《线性代数与解析几何》的付稿凝聚了代数组全体同仁多年教学经验.

线性代数和解析几何联系紧密,线性代数为研究二维和三维几何问题提供了有效工具,而解析几何为线性代数中许多重要概念提供了几何直观,将这两门课合二为一有利于学员理解线性代数中的抽象概念,又可使学员学会用抽象方法去研究具体的几何问题. 线性代数与解析几何旨在培养学员抽象思维和形象思维能力以及学会把握这两种思维之间的关系. 鉴此,本教材以教育部新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为基本指导思想,以适应新型合训人才培养和适应现代教学方式为基本原则,在保证教材系统性和科学性的前提下,着重解决了以下三个问题:(1)线性代数与解析几何的有机结合问题;(2)数学软件、几何直观和应用实例的互相融合问题;(3)矩阵、线性方程组和向量空间编写顺序的合理安排问题.

编写教材时,充分吸收了国内外现有教材的优点,全书力求做到:知识引入自然合理,文字叙述通俗易懂,推导论证严密流畅,例题、习题充实新颖.

教材第 1 章和第 3 章由戴清平编写,第 2 章由冯良贵编写,第 4 章由李超编写,第 5 章由谢端强编写,全书由冯良贵和戴清平统稿.

最后,感谢国防科技大学校、部和学院三级领导对本教材编写的支持和指导,感谢 NCET 的资助,感谢科学出版社为本书的问世所做的大量工作. 同时还要感谢陈挚、刘春林、卢世荣和李颖老师,他们认真阅读了本教材,并提出了许多修改意见,特别是陈挚老师在试用本教材时对教材编排的合理性和习题配备的实用性等方面提出了独到的见解.

限于作者水平,加之成书仓促,书中不妥之处在所难免,敬请读者批评指正.

编　者

2007 年 6 月

目　　录

第1章 行 列 式

在初等数学中，用代入消元法或加减消元法求解二元和三元线性方程组所得的解都可以用未知量系数与常数项来表示. 在引入二阶和三阶行列式后，解和未知量系数与常数项的关系可以用公式表达. 本章先给出二阶和三阶行列式的概念，然后把该概念推广到 n 阶，并讨论相关性质，进而把 n 阶行列式应用于解 n 元线性方程组. 行列式是最基本和最常用的数学工具，在数学和其他学科中有着广泛的应用.

1.1 二、三阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可以求得

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为叙述和记忆方便，引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.1}$$

称 D 为**二阶行列式**，记 $D=\det[a_{ij}]$，它是两项的代数和. 称 D 中出现的 a_{ij} $(i,j=1,2)$ 为行列式的**元素**. D 有两行两列，从左上角到右下角的对角线叫**主对角线**，从右上角到左下角的对角线叫**副对角线**. a_{ij} 表示第 i 行和第 j 列交叉处的元素，i 称为**行标**，j 称为**列标**. D 可以用**对角线法则**来表示. 主对角线上元素的乘积取正号，副对角线上元素的乘积取负号. D 也称为线性方程组的**系数行列式**.

用 D_i 表示把 D 的第 i 列换成常数列得到的二阶行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

因此，当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组的解唯一地表示为下面的公式

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例 1.1　用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases}2x+5y=1,\\3x+7y=2.\end{cases}$$

解　计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&5\\3&7\end{vmatrix}=-1,\quad D_1=\begin{vmatrix}1&5\\2&7\end{vmatrix}=-3,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=1.$$

因 $D\neq 0$，线性方程组有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-3}{-1}=3,\qquad y=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{-1}=-1.$$

下面用消元法解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}$$

用加减消元法消去 x_2,x_3 得

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{13}a_{22}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.$$

记上式中 x_1 的系数为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.\tag{1.2}$$

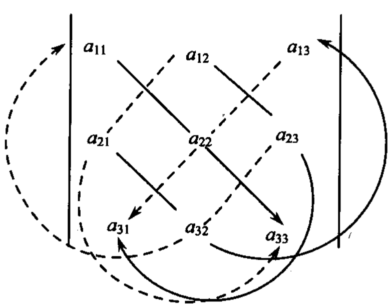

图 1-1

称 D 为**三阶行列式**，它是六项的代数和，每一项都是三个不同行不同列元素的积.

可以用对角线法则来表示 D(图 1-1)，主对角线上三个元素之积及平行于主对角线的三个元素之积取正号(实线连接)，副对角线上三个元素之积及平行于副对角线的三个元素之积取负号(虚线连接). 二阶行列式也可以用对角线法则计算.

记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{13}a_{22}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32},$$

则当 $D\neq 0$ 时，$x_1=\frac{D_1}{D}$，同样可计算出：$x_2=\frac{D_2}{D}$，$x_3=\frac{D_3}{D}$，其中 D_i 表示把 D 的第 i 列换成常数列得到的三阶行列式.

以后我们可以发现对角线法则只适用于二、三阶行列式的计算.

例 1.2 用三阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解 用对角线法则计算行列式得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\times 1\times(-1)+1\times 2\times 1+(-2)\times(-3)\times(-1)$$

$$-1\times 1\times(-1)-1\times 1\times(-3)-(-2)\times 2\times(-1)$$

$$=-1+2-6+1+3-4=-5.$$

同样利用对角线法则可以求出

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

所求的解为 $x_1=\frac{D_1}{D}=1$，$x_2=\frac{D_2}{D}=2$，$x_3=\frac{D_3}{D}=1$.

习 题 1.1

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & x \\ x & -2 & x \\ -4 & x & x \end{vmatrix}$.

2. 用行列式解下列线性方程组

(1) $\begin{cases} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta = a, \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta = b; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+y+z=10, \\ 3x+2y+z=14, \\ 2x+3y-z=1. \end{cases}$

1.2　n 阶行列式的定义

在式(1.2)的展开式中，$a_{11}a_{22}a_{33}$ 与 $a_{11}a_{23}a_{32}$ 前面所带的符号不同，在将要定义的 n 阶行列式中，同样会存在一般项的符号问题. 为了阐述 n 阶行列式展开项的符号规律，我们引进 n 元排列的逆序数和奇偶性的概念.

1.2.1　排列的逆序数与奇偶性

自然数 $1,2,\cdots,n$ 按一定次序排成一列，称为一个 **n 元排列**，记为 $i_1i_2\cdots i_n$. $12\cdots n$ 称为**自然排列**. n 元排列总共有 $n!$ 个. 在一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，若一个小的数排在一个大的数的后面，则称这两个数构成了一个**逆序**. 一个排列的逆序个数的总和称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$. 若排列的逆序数是奇(偶)数，称该排列为**奇(偶)排列**.

例 1.3　求下列排列的逆序数并判断排列的奇(偶)性

(1) 32541；　(2) $n\ (n-1)\cdots 2\ 1$.

解　求一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数一般有四种方法：从前往后依次考虑 $i_k(k=1,2,\cdots,n)$ 前面比 i_k 大的数的个数，再求和；从后往前依次考虑 $i_k(k=n,n-1,\cdots,1)$ 前面比 i_k 大的数的个数然后求和；依次考虑 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 前面比 k 大的数的个数，再求和；依次考虑 $k(k=n,n-1,n-2,\cdots,1)$ 前面比 k 大的数的个数，再求和.

(1) $$\begin{aligned}\tau[32541] &= 0+1+0+1+4=4+1+0+1+0 \\ &= 4+1+0+1+0=0+1+0+1+4=6.\end{aligned}$$

32541 是偶排列.

(2) $$\begin{aligned}&\tau[n\quad(n-1)\quad\cdots\quad 2\ 1] \\ &= 0+1+2+\cdots+(n-1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

当 $n=4k,4k+1$ 时，$n\ (n-1)\cdots 2\ 1$ 是偶排列；当 $n=4k+2,4k+3$ 时，$n\ (n-1)\cdots 2\ 1$ 是奇排列.

互换排列中某两个数的位置，其余的数不动，则得到一个新排列，这个过程称为一个**对换**. 而相邻两个数的对换称为**邻换**. 对换有如下的性质.

定理 1.1　一次对换改变排列的奇偶性.

证 首先证明一次邻换改变排列的奇偶性.设 n 元排列为$\cdots ij\cdots$,将相邻两个数 i,j 对换后得到新排列$\cdots ji\cdots$.

计算逆序数时考虑三种情况：若 $i>j$,则新排列中 i 与 j 不构成逆序,原排列中 i 与 j 构成逆序,若 $i<j$,则新排列中 i 与 j 构成逆序,原排列中 i 与 j 不构成逆序,因此新排列和原排列的 i,j 之间的逆序变化为 1;i,j 与其他数字之间的逆序关系不变;其他数字之间的逆序关系也不变.总之一次邻换改变排列的奇偶性.

其次,设 n 元排列为$\cdots ia_1a_2\cdots a_sj\cdots$,对换 i,j 后得到新排列$\cdots ja_1a_2\cdots a_si\cdots$.我们可以先把 j 与 a_s 邻换,再把 j 与 a_{s-1} 邻换,…,j 与 a_1 邻换,j 与 i 邻换,一共进行 $s+1$ 次邻换,最终得到$\cdots jia_1a_2\cdots a_s\cdots$.然后把 i 依次与 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 作邻换,此过程进行 s 次邻换,最终得到了$\cdots ja_1a_2\cdots a_si\cdots$.两个过程一共进行 $2s+1$ 次邻换,再由一次邻换改变奇偶性即得定理结论.

推论 1 如果一个 n 元排列经过一定次数的对换变为自然排列,那么所作对换的次数与该排列有相同的奇偶性.

证 由于 $12\cdots n$ 是偶排列,而一次对换改变奇偶性,因此若 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇(偶)排列,那么它必须作奇(偶)次对换才能变为自然排列 $12\cdots n$.

推论 2 全体 $n(n\geqslant 2)$元排列的集合中,奇排列和偶排列各占一半.

证 假设全体 n 元排列的集合为 W,其中全体奇排列构成集合 S,S 中所含奇排列的个数为 s,全体偶排列构成集合 T,T 中所含偶排列的个数为 t,那么 $W=S\cup T$,$S\cap T=\varnothing$,$s+t=n!$.我们把 S 中的每个排列都把第一和第二个数字对换,那么 S 中每个奇排列都变为了偶排列,并且所得到的偶排列互不相同.这说明 $s\leqslant t$,用同样方式可以说明 $t\leqslant s$,因此 $t=s$.

值得一提的是,n 个不同的字母(或数)也可以考虑其排列及其相关问题.

1.2.2 n 阶行列式的定义

首先我们来分析式(1.2)展开式的特点：

①一共有 31 项;②每一项是三个元素的乘积,这些元素来自不同行不同列;③有三项取正号,三项取负号.

在式(1.2)中 $a_{11}a_{22}a_{33}$,$a_{12}a_{23}a_{31}$,$a_{13}a_{21}a_{32}$,$a_{13}a_{22}a_{31}$,$a_{12}a_{21}a_{33}$ 与 $a_{11}a_{23}a_{32}$ 的行标按自然顺序排列,列标排列分别为 123,231,312,321,213 与 132,其中 123,231,312 是偶排列,321,213,132 为奇排列,相应地 $a_{11}a_{22}a_{33}$,$a_{12}a_{23}a_{31}$,$a_{13}a_{21}a_{32}$ 前面带正号,$a_{13}a_{22}a_{31}$,$a_{12}a_{21}a_{33}$,$a_{11}a_{23}a_{32}$ 前面带负号,因此式(1.2)可以写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2i_3}(-1)^{\tau[i_1i_2i_3]}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}.$$

下面把三阶行列式这种形式的定义推广到 n 阶行列式的情形.

定义 1.1 把 n^2 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，按照下式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau[i_1 i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \qquad (1.3)$$

计算所得的结果，称为 **n 阶行列式**，简记作 $\det[a_{ij}]$. 其中 $\sum\limits_{i_1 i_2\cdots i_n}$ 表示对所有 n 元排列求和.

当 $n=1$，定义 $|a|=a$（这里 $|a|$ 表示一个元素构成的行列式，不是绝对值）. 式(1.3)中每一项的 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 中的元素来自不同行不同列；在行标按照自然排列的前提下，若 $i_1 i_2\cdots i_n$ 是偶排列，对应项取正号，若 $i_1 i_2\cdots i_n$ 是奇排列，对应项取负号；行列式 D 中共有 $n!$ 项，带正负符号的项各一半.

考虑行列式 D 的一般项 $(-1)^{\tau[i_1 i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$. 列标排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 经过 N 次对换变成自然排列 $12\cdots n$ 的同时，相应的行标排列 $12\cdots n$ 经过 N 次对换后变成 $j_1 j_2\cdots j_n$，即

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}.$$

另外，对换次数 N 与 $\tau[i_1 i_2\cdots i_n]$ 有相同的奇偶性，而 N 与 $\tau[j_1 j_2\cdots j_n]$ 也有相同的奇偶性，所以

$$(-1)^{\tau[i_1 i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=(-1)^{\tau[j_1 j_2\cdots j_n]}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}.$$

因此行列式也可以定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau[j_1 j_2\cdots j_n]}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}. \qquad (1.4)$$

例 1.4 **计算下三角行列式**（主对角线以上的元素都为零的行列式）

$$\det[a_{ij}]=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 考虑一般项 $(-1)^{\tau[i_1 i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 中可能不为 0 的项，因为 $a_{1j}=0(j\geqslant$

2)，所以 $a_{1i_1}=a_{11}$. a_{2i_2} 只能取 a_{22}，这是因为 a_{21} 和 a_{11} 处于同一列. 以此类推 a_{3i_3} 只能取 a_{33}，…，最后 a_{ni_n} 只能取 a_{nn}. 最终得到 $\det[a_{ij}]=(-1)^{\tau[12\cdots n]}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

同样**上三角行列式**(主对角线以下的元素都为零的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地有**对角行列式**(主对角线以外元素都为零)等于主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

习　题　1.2

1. 计算

(1) $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$;

(2) $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

2. 给出按照定义计算行列式所需要的乘法总次数的计算公式.

1.3　行列式的性质

一般情况下，按照定义计算行列式所需要的乘法总次数为 $(n-1)n!$. 例如 $n=$

25,有 $24\times25!\approx3.7227\times10^{26}$,这是一个很大的数字.因此按照定义计算行列式,计算量非常大,必须寻求计算行列式的新方法.这一节给出可以化简行列式计算的性质.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 的行与列互换得到的行列式记为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**.显然 $(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1.1 行列式与其转置行列式相等,即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证 设 D^{T} 的第 i 行与第 j 列交叉处的元素为 b_{ij},按照转置的定义有 $b_{ij}=a_{ji}$,再由式(1.4)有

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=D.$$

性质 1.1 说明行列式的行和列具有相同的地位,对行成立的性质对列也成立,反之也对.以下的性质讨论都只要对行进行证明.

性质 1.2 若行列式 D 互换两行(列)得到 D_1,则 $D=-D_1$.

证 设互换 D 的 i,j 两行得到 D_1

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

考虑 D 中项 $a_{1i_1}\cdots a_{ip}\cdots a_{jq}\cdots a_{ni_n}$ 前面带的符号

$$(-1)^{\tau[i_1\cdots p\cdots q\cdots i_n]},$$

与之对应的 D_1 中项 $a_{1i_1}\cdots a_{jq}\cdots a_{ip}\cdots a_{ni_n}$ 前面带的符号为

$$(-1)^{\tau[i_1\cdots q\cdots p\cdots i_n]}.$$

由定理 1,有

$$(-1)^{\tau[i_1\cdots p\cdots q\cdots i_n]}=(-1)(-1)^{\tau[i_1\cdots q\cdots p\cdots i_n]},$$

即 D 和 D_1 的对应项符号相反,所以 $D=-D_1$.

推论 若行列式 D 的某两行(列)相同,则 $D=0$.

性质 1.3 若用数 k 乘以 D 的某行(列)得到 D_2,则 $D_2=kD$.

证 假设 D 的第 l 行乘以 k 得到 D_2,考虑到 D 的一般项为

$$(-1)^{\tau[i_1\cdots i_l\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots a_{1i_l}\cdots a_{ni_n},$$

D_2 的一般项为

$$(-1)^{\tau[i_1\cdots i_l\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots(ka_{li_l})\cdots a_{ni_n}=k(-1)^{\tau[i_1\cdots i_l\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots a_{li_l}\cdots a_{ni_n},$$

由此可以得到 $D_2=kD$.

这个性质表明行列式某一行(列)的公因子可以提到行列式外面.于是有下面推论:

推论 1 若行列式 D 的某一行(列)的元素全部为 0,则 $D=0$.

推论 2 若行列式 D 的某两行(列)的元素对应成比例,则 $D=0$.

性质 1.4 若行列式 D 的某一行(列)的每个元素都可以表示为两个数的和,则 D 可以按照下列方式表示为两个行列式的和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 考虑左边行列式的一般项

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots(a_{ip}+b_{ip})\cdots a_{ni_n}\\ =\ &(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ip}\cdots a_{ni_n}+(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots b_{ip}\cdots a_{ni_n}.\end{aligned}$$

这刚好是右边两个行列式对应的一般项之和.

性质 1.5 若将行列式 D 的某行(列)的倍数加到另一行得到 D_1,则 $D_1=D$.

这个性质可以由性质 1.4 和性质 1.3 的推论 2 得到.

例 1.5 已知 $abcd=1$,证明

$$\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

证 等式左边的行列式用 D 表示. 考虑到 $abcd=1$,利用性质 1.3 我们有

$$D=(abcd)^2D=a^2b^2c^2d^2D=\begin{vmatrix} a^4+1 & a^3 & a & a^2 \\ b^4+1 & b^3 & b & b^2 \\ c^4+1 & c^3 & c & c^2 \\ d^4+1 & d^3 & d & d^2 \end{vmatrix},$$

其中 a^2 乘以第一行每个元素,b^2 乘以第二行每个元素,c^2 乘以第三行每个元素,d^2 乘以第四行每个元素. 利用性质 1.4,分解为两个行列式的和(称为**分拆法**),即

$$D=\begin{vmatrix} a^4 & a^3 & a & a^2 \\ b^4 & b^3 & b & b^2 \\ c^4 & c^3 & c & c^2 \\ d^4 & d^3 & d & d^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & a^3 & a & a^2 \\ 1 & b^3 & b & b^2 \\ 1 & c^3 & c & c^2 \\ 1 & d^3 & d & d^2 \end{vmatrix}.$$

再利用性质 1.3、性质 1.2 以及 $abcd=1$ 变换上式右边的第一个行列式

$$\begin{vmatrix} a^4 & a^3 & a & a^2 \\ b^4 & b^3 & b & b^2 \\ c^4 & c^3 & c & c^2 \\ d^4 & d^3 & d & d^2 \end{vmatrix}=abcd\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 & a \\ b^3 & b^2 & 1 & b \\ c^3 & c^2 & 1 & c \\ d^3 & d^2 & 1 & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 & a \\ b^3 & b^2 & 1 & b \\ c^3 & c^2 & 1 & c \\ d^3 & d^2 & 1 & d \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a \\ 1 & b^2 & b^3 & b \\ 1 & c^2 & c^3 & c \\ 1 & d^2 & d^3 & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a & a^3 \\ 1 & b^2 & b & b^3 \\ 1 & c^2 & c & c^3 \\ 1 & d^2 & d & d^3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & a^3 & a & a^2 \\ 1 & b^3 & b & b^2 \\ 1 & c^3 & c & c^2 \\ 1 & d^3 & d & d^2 \end{vmatrix},$$

因此 $D=0$.

计算时,使用下面的记号:$r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行与第 j 行;kr_i 表示第 i 行乘非零数 k; r_i+kr_j 表示第 j 行乘非零数 k 加到第 i 行. 对应的 $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列与第 j 列;kc_i 表示第 i 列乘非零数 k;c_i+kc_j 表示第 j 列乘 k 加到第 i 列.

例 1.6 计算 $D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-4r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-10r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -8 & -70 \\ 0 & -3 & -2 & -24 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+3r_2]{r_3+5r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -13 & -95 \\ 0 & 0 & -5 & -39 \end{vmatrix} \xlongequal[(-1)r_4]{r_4-\frac{5}{13}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -13 & -95 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{32}{13} \end{vmatrix} = -32.$$

例 1.6 所用的方法称为**三角化方法**. 计算机计算行列式时，通常采用这种方法. 计算机计算行列式一般说来只能计算具体的行列式(给定阶数和元素).

现在比较流行的数学计算软件有 Mathematica, Maple, Matlab 等. 它们可以进行一些常用的计算.

***例 1.7** 用数学软件 Mathematica 计算例 1.6.

解 启动 Mathematica 6，输入

```
Det[{{4,1,2,4},{1,2,0,2},{10,5,2,0},{1,1,1,7}}]
```

按 Shift+Enter(或小键盘的 Enter)，输出结果为：

−32

***例 1.8** 用数学软件 Mathematica 计算

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 输入

```
Det[{{a^2,a*b,b^2},{2a,a+b,2b},{1,1,1}}]
```

按 Shift+Enter，输出结果为：

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

需要注意的是必须输入 a * b，或者 a 与 b 之间插入空格，否则，计算机把 ab 当作一个变量. 即：

输入

```
Det[{{a^2,ab,b^2},{2a,a+b,2b},{1,1,1}}]
```

按 Shift+Enter，输出结果为：