高职院校精品教辅

WEIJIFEN DAOXUE

# 微积分导学

云连英 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高职院校精品教辅

# 微积分导学

主　编　云连英

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分导学／云连英主编. —杭州：浙江大学出版社，2008.2
ISBN 978-7-308-05788-2

Ⅰ.微...　Ⅱ.云...　Ⅲ.微积分—高等学校：技术学校—教学参考资料　Ⅳ.0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第009560号

**微积分导学**

云连英　主编

| | |
|---|---|
| **责任编辑** | 徐素君 |
| **出版发行** | 浙江大学出版社<br>(杭州天目山路148号　邮政编码310028)<br>(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)<br>(网址：http：//www.zjupress.com<br>http：//www.press.zju.edu.cn)<br>电话：0571—88925592，88273066(传真) |
| **排 版 者** | 浙江大学出版社电脑排版中心 |
| **印　　刷** | 杭州印校印务有限公司 |
| **开　　本** | 787mm×1092mm　1/16 |
| **印　　张** | 7.25 |
| **字　　数** | 168千 |
| **版 印 次** | 2008年2月第1版　2008年2月第1次印刷 |
| **书　　号** | ISBN 978-7-308-05788-2 |
| **定　　价** | 13.00元 |




**浙江大学出版社发行部邮购电话**　(0571)88072522

# 前　言

《微积分导学》是银领工程——高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材之一——《微积分应用基础》(高教版)的配套辅导书.

高等职业教育担负着培养以生产、管理、经营、服务等方面第一线工作的高层次、实用型、技能型高级人才.高等数学作为高职院校工科类和经管类等专业的公共基础课,应更加适应"工学结合"的人才培养模式,其教学应该遵循"以应用为目的、以必需够用为度"原则开展.为帮助学生较好地学习微积分,本书将教材中的基本概念、基本公式、基本方法以及基本语句作了归纳和总结.以主教材内容为主线,精心组织各类典型例题,并辅之同步练习题.书的最后给出五套模拟试卷,其中三套普通的笔试试卷,两套上机试卷.全书具有以下特点:

1. 注重基本方法的总结,以满足高职生源多元化的需要.

2. 注重阶梯式学习,典型例题均采取由浅入深,步步升高的模式,以弥补高职学生基础的薄弱.

3. 注重举一反三、探索规律,综合例题采取一题多解,并总结规律,以培养高职学生的发散思维和创新思维能力.

4. 注重数学软件和微积分基本知识的融合,以培养学生的应用计算机软件解决实际问题的能力.

5. 教材形式活跃,关键步骤采用"飘云"式标注,以激发学生的求知兴趣.

本书由台州职业技术学院云连英老师主编,汪荣伟、陶正娟、汪亚东等老师参编.云连英负责编写第4章,陶正娟负责编写第1章,汪亚东负责编写第2章,第3章、第5章均由汪荣伟编写.

本书难免存在缺点和不足,欢迎读者不吝指正.

**编　者**
2008.1

# 目　　录

# 第 1 章　极限与连续

## 内容提要

### 基本概念

**函数**　$D$ 是一个数集,如果对于 $D$ 中的每一个数 $x$,按照某种对应规则 $f$,都有唯一确定的数值 $y$ 与之对应,那么 $y$ 就称为定义在数集 $D$ 上的 $x$ 的函数.

记作 $y = f(x), x \in D$, $x$ 称为自变量,数集 $D$ 称为函数的定义域.

当 $D$ 由数集变为有序数对集(区域)时,类似地可定义二元函数 $z = f(x,y)$.

**分段函数**　对应法则是由几个不同的解析式表示的函数称之为分段函数.

**函数的奇偶性**　设函数 $y = f(x)$ 的定义域 $D$ 关于坐标原点对称,如果对于定义域 $D$ 中的任何 $x$,都有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数;如果对于定义域 $D$ 中的任何 $x$,都有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形关于坐标原点对称,偶函数的图形关于 $y$ 轴对称.

**基本初等函数**　常数函数 $y = C$, $C$ 为常数;

幂函数　$y = x^{\alpha}$, $\alpha$ 为实数;

指数函数　$y = a^{x}$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$;

对数函数　$y = \log_{a}x$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$;

三角函数　$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$;

反三角函数　$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

以上六种函数统称为基本初等函数.

**复合函数**　设 $y$ 是 $u$ 的函数 $y = f(u)$,而 $u$ 又是 $x$ 的函数 $u = \varphi(x)$,且 $u = \varphi(x)$ 的值域包含在 $y = f(u)$ 的定义域内,则 $y$ 也是 $x$ 的函数,称这个函数是由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数,其中 $u$ 称为中间变量.

**初等函数**　由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算且能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

**函数的极限**

1. $x \to x_0$ 函数 $f(x)$ 的极限

如果当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定常数 $A$，则称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to x_0)$.

2. 函数在点 $x_0$ 处的左、右极限

如果当 $x \to x_0^-(x \to x_0^+)$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定常数 $A$，则称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的左(右) 极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A(\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A).$$

类似地可定义 $x \to \infty$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 时函数的极限.

**无穷小量与无穷大量**　在自变量的某个变化过程中，以 0 为极限的函数称为无穷小量；在自变量的某个变化过程中，绝对值无限增大的函数称为无穷大量.

**等价无穷小**　设 $\alpha$ 与 $\beta$ 是自变量在同一变化过程中的两个无穷小，若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$，则称 $\alpha$ 与 $\beta$ 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$.

**函数在一点的连续性**　如果函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 同时满足下列条件：函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 及其左右近旁有定义，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 连续.

**函数在区间上的连续性**　如果函数 $y = f(x)$ 在$(a,b)$ 内每一点都连续，则称函数 $y = f(x)$ 在开区间$(a,b)$ 内连续；如果函数 $y = f(x)$ 在开区间$(a,b)$ 内都连续，且 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$，$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$，则称函数 $y = f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续.

**函数间断点**　如果函数 $y = f(x)$ 有以下三种情形之一：

(1) 在点 $x = x_0$ 处没有定义；

(2) 虽然在 $x = x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) 虽在 $x = x_0$ 处有定义，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，则函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处不连续或间断.

**间断点分类**　左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点，其中左、右极限都存在且相等的间断点称为可去间断点，左、右极限都存在但不相等的间断点称为跳跃间断点；左、右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点，其中左、右极限至少有一个为 $\infty$ 的间断点称为无穷间断点，左、右极限至少有一个不存在且不为 $\infty$ 的间断点称为振荡间断点.

## 基本公式

1. 极限的四则运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$.

特别地，有 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n=A^n$，

$$\lim_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim_{x\to x_0}f(x)=CA\ (C\text{ 为常数}).$$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

法则(1)、(2)可推广到有限个函数的情形，极限的四则运算法则对自变量的其他变化过程同样成立.

2. 几个充要条件

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$.

3. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$.

## 基本性质

1. 最大值与最小值性质

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上必有最大值与最小值.

2. 零点性质

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $f(\xi)=0$.

## 基本方法

1. 函数定义域的求法

(1) 求函数的定义域常常是排除那些使函数无定义的点. 对于由解析式表示的函数，使函数有定义的限制条件有：分式中的分母不能为零；偶次根式根号下的表达式必须大于或等于零；对数的真数必须大于零等. 对于实际问题中的函数，它的定义域由问题的实际意义来确定；

(2) 分段函数的定义域是各个分段式子给出的自变量的取值范围的并集；

(3) 若已知 $y = f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，求 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域. 方法是解不等式组 $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$.

2. 判断函数奇偶性的方法

(1) 根据定义由 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 关系可得；

(2) 利用奇、偶函数的运算性质.

3. 建立函数模型的方法

(1) 分析实际问题中的各个量，哪些是常量，哪些是变量，从中确定自变量和因变量；

(2) 根据所给条件，运用数学、物理或其他知识来确定各个量之间的关系；

(3) 具体写出函数关系式，并指明定义域.

4. 复合函数的分解方法

由表及里，设置中间变量，即由最外层函数起，层层向内层进行，直到分解为简单函数.

5. 常见的求极限的方法

(1) 利用函数的连续性. 即若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$；

(2) 对于分式函数的极限. 若不能直接利用极限的四则运算法则，往往先进行适当变形；

(3) 利用两个重要极限；

(4) 利用无穷小的性质；

(5) 利用等价无穷小替换法；

(6) 对于分段函数在分段点处的极限，如果在分段点两侧表达式不同，则需利用左、右极限与极限的关系；

(7) 利用 Matlab 语句.

## 基本语句

1. $fplot('f(x)',[a,b])$　　表示绘制函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图形.
2. $solve('f(x)=0')$　　表示解方程 $f(x)=0$.
3. $\text{lim}it(f,x,a)$　　表示求极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$.
   $\text{lim}it(f,x,a,'left')$　　表示求极限 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$.
   $\text{lim}it(f,x,a,'rirht')$　　表示求极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$.
   $\text{lim}it(f,x,inf)$　　表示求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
   $\text{lim}it(f,x,-inf)$　　表示求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

## 典型例题

**例 1**　求下列函数的定义域

(1)$y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\ln(4-x)$;(2)$z=\sqrt{x^2+y^2-4}+\sqrt{9-x^2-y^2}$.

**解**　(1) 要使 $y$ 有意义,必须 $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\x-2\neq 0.\\4-x>0\end{cases}$

$\sqrt{x-1},\dfrac{1}{x-2},\ln(4-x)$ 同时有意义

解得 $1\leqslant x<4$ 且 $x\neq 2$,故定义域为 $[1,2)\cup(2,4)$.

(2) 要使 $z$ 有意义,必须 $\begin{cases}x^2+y^2-4\geqslant 0\\9-x^2-y^2\geqslant 0\end{cases}$,

解得 $4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9$,故定义域为 $\{(x,y)\mid 4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9\}$.

**例 2**　已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[1,5]$,求 $f(2x-3)$ 的定义域.

**解**　因为函数 $f(x)$ 的定义域是 $[1,5]$,所以 $1\leqslant 2x-3\leqslant 5$,解得 $2\leqslant x\leqslant 4$,故函数 $f(2x-3)$ 的定义域是 $[2,4]$.

**例 3**　设 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{u\to0}(1+ux)^{\frac{1}{u}} & x\geqslant 1\\ \ln(x+1) & -1<x<1\\ \lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin ux}{u} & x\leqslant -1\end{cases}$,求 $f(-1),f(0),f(1)$.

**解**　这是分段函数,求函数值时必须从自变量所在区间的解析式中去计算.

$$f(-1)=\lim_{u\to 0}\frac{\sin(-u)}{u}=-\lim_{u\to 0}\frac{\sin(-u)}{-u}=-1,f(0)=\ln(0+1)=0,$$

$$f(1)=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}.$$

**例 4**　函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在定义域内是　　　　（　　）

(A) 周期函数　　(B) 单调函数　　(C) 有界函数　　(D) 偶函数

**解**　>> *fplot*('sin(1/*x*)',[-10,10])

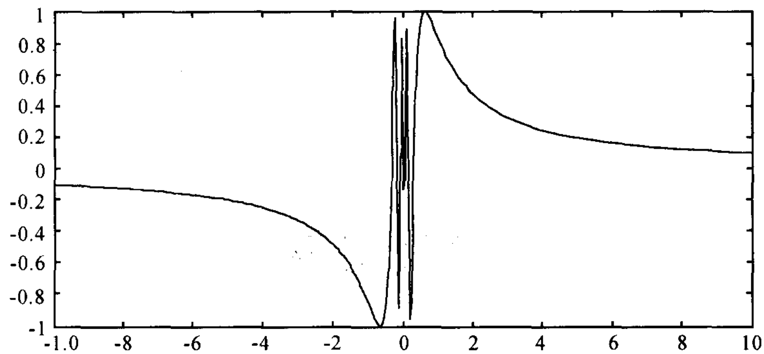


图 1-1

由图 1-1 可得正确答案为 C.

**例 5**　某种休闲服出厂价为 90 元 / 件，成本价为 60 元 / 件. 为了促销，决定凡是订购量超过 100 件的，每多订购 1 件，降价 0.1 元，但最低价为 75 元 / 件.

(1) 试将每件实际出厂价 $p$ 表示为订购量 $x$ 的函数；

(2) 将厂方所获得的利润 $L$ 表示为订购量 $x$ 的函数；

(3) 某商家订购 200 件，厂方可获利多少？

**解**　(1) 设订购 $x$ 件时刚好是最低价 75 元，则 $(x-100)\times 0.1=90-75,x=250$.

因为当 $0\leqslant x\leqslant 100$ 时，$p=90$；

当 $100<x<250$ 时，$p=90-0.1(x-100)$；

当 $x\geqslant 250$ 时，$p=75$；

所以实际出厂价 $p$ 与订购量 $x$ 的函数为

$$p=\begin{cases}90 & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 90-0.1(x-100) & 100<x<250.\\ 75 & x\geqslant 250\end{cases}$$

$$(2)L=(p-60)x=\begin{cases}30x & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 40x-0.1x^2 & 100<x<250.\\ 15x & x\geqslant 250\end{cases}$$

(3) 当 $x=200$ 时，$L=40\times 200-0.1\times 200^2=4000$.

所以某商家订购 200 件，厂方可获利 4000 元.

**例 6** 【居民生活用电电费】 根据国家发展改革委发改价格〔2004〕1469 号文《国家发展改革委关于调整浙江省居民生活电价的通知》的规定，从 2004 年 8 月 1 起，浙江省 1300 万户居民将统一按"阶梯式累进电价"支付电费.

一户一表居民用户：月用电量低于 50 千瓦时（含 50 千瓦时）部分不调整，每千瓦时 0.53 元；月用电量在 50 ～ 200 千瓦时（含 200 千瓦时）部分，电价每千瓦时上调 0.03 元，每千瓦时 0.56 元；月用电量超过 200 千瓦时部分，电价每千瓦时上调 0.10 元，每千瓦时 0.63 元．执行峰谷电价的居民用户以总电量与阶梯基数比对进行计算．

假定 $A$ 用户为不执行峰谷电价的一户一表用户，单月抄表.

(1) 试建立月用电量 $x$ 千瓦时与电费 $y$ 元的函数关系式；

(2) 当抄见总电量为 150 千瓦时，计算该用户本月电费.

**解** (1) 因为当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时，$y=0.53x$；

当 $50<x\leqslant 200$ 时，$y=50\times 0.53+(x-50)\times 0.56=0.56x-1.5$；

当 $x>200$ 时，$y=50\times 0.53+150\times 0.56+(x-200)\times 0.63=0.63x-15.5$；

所以月用电量 $x$ 千瓦时与电费 $y$ 元的函数为 $y=\begin{cases}0.53x & 0\leqslant x\leqslant 50\\ 0.56x-1.5 & 50<x\leqslant 200.\\ 0.63x-15.5 & x>200\end{cases}$

(2) 当 $x=150$ 时，因为 $150\in(50,200]$，所以 $y|_{x=150}=0.56\times 150-1.5=82.5$.

故当抄见总电量为 150 千瓦时，该用户本月电费为 82.5 元.

**例 7** 下列说法正确的是 (　　)

(A) 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的极限存在，则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有定义

(B) 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的左、右极限都存在，则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的极限也存在

(C) 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的极限值为 $A_0$，则 $f(x_0)=A_0$

(D) 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处左、右极限都存在且相等，则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处极限也存在

**解** 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的极限与函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处是否有定义无关；函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的极限值为 $A_0$ 时，$f(x_0)$ 不一定等于 $A_0$；当函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的左、右极限都存在时，$f(x)$ 在点 $x_0$ 处的极限不一定存在，只有当函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的左、右极限都存在且相等时，$f(x)$ 在点 $x_0$ 处的极限才存在. 故正确答案为 D.

**例 8**　下列极限正确的是　　　　（　　）

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　　　(B) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$

(C) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

**解**　两个重要极限的应用必须要抓住它的结构特征，A 不是$\dfrac{0}{0}$型，B 不是 $1^\infty$ 型，C 为无穷小与有界函数的乘积，D 可化为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$，故正确答案为 D.

**例 9**　求极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2-1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+8}{5x^3+2}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x^2-3}{3x^3-x+5}$.

**解**　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{3-0+0}{2-0}=\dfrac{3}{2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+8}{5x^3+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}}{5+\frac{2}{x^3}}=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x^2-3}{3x^3-x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^4}}=\infty$.

**规律**　对于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x),Q(x)$ 为 $x$ 的多项式，往往分子、分母同除以 $x$ 的幂次最高的项，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}.$$

**例 10**　求极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x-6}$.

**解**　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\frac{1}{6};$$

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-1)}{x+2}=\dfrac{6}{5}$.

**规律**　对于$\dfrac{0}{0}$型且含有根式时，往往用有理化方法；对于$\dfrac{0}{0}$型且分子、分母有相同的零因子时，往往用约去零因子法.

**例 11**　求极限：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x+1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2}$.

**解**　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^4\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=e^4$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-\frac{1}{2}}}{\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{e}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi^2\sin x}{\pi^2-x^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi^2\sin(\pi-x)}{(\pi+x)(\pi-x)}$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\pi^2}{\pi+x}\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=\frac{\pi}{2}.$$

**规律**　含有三角函数且为$\dfrac{0}{0}$型的极限式与含有幂指函数$f(x)^{g(x)}$且为$1^\infty$型的极限式，常用两个重要极限. 两个重要极限的一般形式为$\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}=1$，$\lim\limits_{\Delta\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\Delta}\right)^{\Delta}=e$.

**例 12**　求极限：(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

**解**　(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+x)-2}{(1-x)(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(1-x)(1+x)}=-\frac{1}{2};$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=0.$$

微积分学

**规律**　对于 $\infty-\infty$ 型，可通过通分或有理化转化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型进行计算.

**例 13**　求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\ln(1-2x^3)}$.

**解**
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\ln(1-2x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{\ln(1-2x^3)}$$

用等价无穷小

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{-2x^3}=-\frac{1}{4}.$$

**规律**　常用的等价无穷小有：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$ 等.

**例 14**　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sin 2x^2}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$.

**解**　(1) **方法一**
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x\cdot\cos\frac{x}{2}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

**方法二**
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x\cdot(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x\cdot(1+\cos x)}$$

用等价无穷小

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

**方法三**
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot x}=\frac{1}{2}.$$

(2) **方法一**
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sin 2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin 2x^2\cdot(\sqrt{x^2+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2}{\sin 2x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{1}{4}.$$

用等价无穷小

**方法二**　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sin 2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{2x^2}=\dfrac{1}{4}.$

(3) **方法一**　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

$=\ln[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}]$

$=\ln\{\lim\limits_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2\}=\ln e^2=2.$

用等价无穷小

**方法二**　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2.$

**规律**　例 14 中三个题均用了不同方法，这些方法中有比较简单的，也有比较复杂的，但一般来说，若能利用等价无穷小替换法解题，则解题过程较简单.

**例 15**　已知$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$存在且 $f(x)=x^2-3x\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，求 $f(x)$.

**解**　设$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=A$，则 $f(x)=x^2-3Ax$，

$$A=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2-3Ax)=1-3A, A=\frac{1}{4}.$$

因此

$$f(x)=x^2-\frac{3}{4}x.$$

**例 16**　(1) 已知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=-1$，求常数 $a$、$b$ 的值.

(2) 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数 $a$、$b$ 的值.

**解**　本题用“逆向思维”进行分析.

(1) 因为当 $x\to 2$ 时，分母趋向于零，而分式的极限却等于$-1$，所以当 $x\to 2$ 时，分子趋向于零.

由$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$ 得 $b=-4-2a$，故

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax-4-2a}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2+a)=4+a=-1,$

所以

$$a=-5, b=6.$$

(2) 因为$\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b=\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}$，而$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，

所以 $1-a=0, a+b=0$，故 $a=1, b=-1$.

**例 17**　【传染病分析】　某实验室用 500 只老鼠做某一传染性疾病实验，以检验它的传播理论. 由实验分析得到 $t$ 天后，感染数目 $N$ 的数学模型如下：

$$N(t)=\frac{500}{1+99\times e^{-0.2t}}$$

(1) 实验开始时有多少只老鼠感染此疾病?

(2) 什么时候有一半的老鼠感染此疾病?

(3) 预测当 $t \to +\infty$ 时，传染病的传播数量.

**解**　(1) 计算 $N(0)$.

>> 500/(1 + 99* exp(0)),ans = 5.

(2) 解方程 $N(t) = 250$.

>> *solve*('500/(1 + 99* exp(− 0.2* *t*)) = 250'),

ans = 22.975599250672949634262170259051.

(3) 求极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{500}{1+99\times e^{-0.2t}}$.

>> *syms t*,

>> lim*it*(500/(1 + 99* exp(− 0.2* *t*)),inf),

ans = 500.

>> *fplot*('500/(1 + 99 * exp(− 0.2 * *t*))',[0,100])

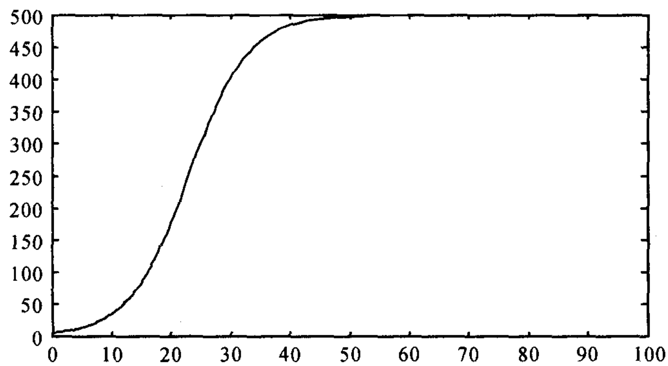


图 1-2

由上可知，试验开始时有 5 只老鼠被感染(图 1-2)，随着时间的推移，被感染的老鼠数目不断增加，约 23 天时，有一半的老鼠被感染，当 $t \to +\infty$ 时，被感染的老鼠接近 500 只.

**例 18**　设 $f(x)=\begin{cases} x+2 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ \dfrac{\sin 2x}{x} & x>0 \end{cases}$，讨论函数 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 时是否有极限，在点 $x=0$ 处是否连续?

**解**　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+2) = 2$,