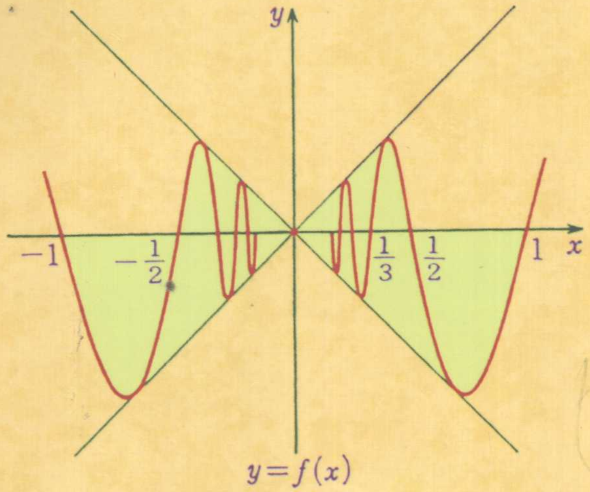
TURING 图灵数学·统计学丛书 20



An Introduction to Calculus

微积分入门 I

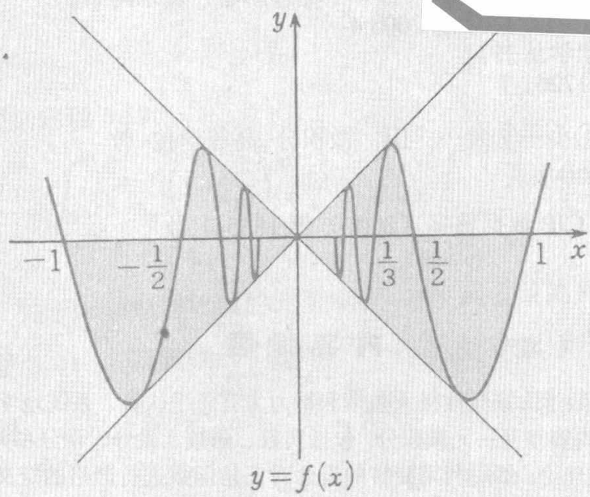
一元微积分

[日] 小平邦彦 著

裴东河 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书 20



An Introduction to Calculus

微积分入门 I

一元微积分

[日]小平邦彦 著
裴东河 译

人民邮电出版社
北　京

图书在版编目（CIP）数据

微积分入门 I：一元微积分 /（日）小平邦彦著；裴东河译．—北京：人民邮电出版社，2008.4
（图灵数学·统计学丛书）
ISBN 978-7-115-17261-7

I．微… II．①小…②裴… III．微积分-高等学校-教材 IV．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 183541 号

内 容 提 要

本书是一位世界数学大家倾注极大热情和精力为有志于认真、系统地学习微积分的学生撰写的一本优秀教材．内容涉及一元微积分，包括实数、函数、微分、积分和无穷级数．首先详细而严密地论述了实数理论，然后利用旋转的概念对三角函数进行严格的定义，最后介绍了一致有界函数列的 Arzelà 逐项积分定理．本书的最大特点是叙述的严密性和直观性，可作为大学本科微积分的教材或参考书．

图灵数学·统计学丛书

微积分入门 I：一元微积分

◆ 著　　[日] 小平邦彦
译　　裴东河
责任编辑　明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编　100061　　电子函件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：700×1000　1/16
印张：14.5
字数：292 千字　　2008 年 4 月第 1 版
印数：1 – 4 000 册　　2008 年 4 月北京第 1 次印刷
著作权合同登记号　图字：01-2006-7561 号
ISBN 978-7-115-17261-7/O1

定价：39.00 元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

版权声明

译 者 序

本书是根据日本岩波书店 2003 年出版的《解析入门 I》翻译的. 本书的作者小平邦彦先生是为数不多的同时获得菲尔兹奖和沃尔夫奖的著名数学家之一. 他在调和积分理论、代数几何学和复解析几何学等诸多领域都做出了卓越的贡献. 小平邦彦先生还是一位杰出的数学教育家, 培养了大量的优秀数学工作者.《解析入门 I》和《解析入门 II》就是在他晚年为后人留下的又一重要文化财富. 这是一套表述非常精练而内容十分丰富的微积分教材 (原著分 I 卷和 II 卷, 包括附录、习题解答及提示、索引, 仅有 514 页). 由于它以严格的实数理论为基础, 因此与通常的微积分教材不同, 各部分内容简洁而流畅, 充分体现了作者的数学才识. 另外本书利用旋转的概念构造了三角函数的理论也是非常有趣的. 它不仅值得数学专业的学生研读, 而且对于需要微积分知识的理工科学生来说, 也是值得一读的好教材或参考书.

本书能得以顺利出版, 首先要感谢人民邮电出版社图灵公司及明永玲、武卫东编辑的大力支持, 同时, 东北师范大学的黄松爱老师和研究生刘娜、孔令令、刘美含、刘赢、高瑞梅同学在翻译和校订中给予了大力帮助, 在此一并表示衷心感谢!

在翻译本书的过程中, 译者虽然尽最大努力尊重原文原意, 并尽可能避免直译产生的歧义, 但是由于才疏学浅, 难免存在翻译不当之处, 敬请广大读者批评指正, 以便再版时更正.

裴东河

2007 年 5 月

裴东河 日本北海道大学理学博士, 现为东北师范大学数学与统计学院教授, 博士生导师, 教育部 "新世纪优秀人才支持计划资助项目" 获得者. 主要研究方向是微分几何与微分拓扑等方面.

前　言

这本微积分入门是以刚刚结束高中数学学习, 步入大学后正式学习数学分析的人为对象而编写的. 希望本书能够成为从高中数学通向现代微积分学的桥梁.

分析学的基础是实数论, 本书首先详细而严密地论述了实数论. 最初, 我计划以高木先生的《解析概論》第 3 次修订版 (岩波书店) 和藤原先生的《微分積分学 I》、《微分積分学 II》(内田老鶴圃) 等作为蓝本, 希望用读者容易接受的方式严谨地讲解传统的微积分学, 但是结果却在某些地方脱离了这一宗旨. 首先, 在第 2 章三角函数的导入上, 本书从角度可以表示为平面的旋转的量的观点出发, 用指数函数 $e^{i\theta}$ 作为媒介定义了三角函数. 因为在进入微分学之前, 对三角函数进行严格的定义是非常必要的.

关于第 4 章的单变量函数的积分, 受高木先生著作① 的启示, 被积函数只限定在有至多有限个不连续点的情况, 而闭区间上具有不连续点的函数的积分都作为广义积分来处理. 在第 5 章中, 介绍了一致有界函数列的 Arzelà 逐项积分定理及由 Hausdorff 给出的初等证明. 这个定理自 Lebesgue 逐项积分定理的出现而被遗忘, 但在应用上非常有用. 在第 6 章②中, 使用积分记号, 从 Arzelà 定理导出微积分定理.

在第 7 章中, 将详细介绍多重积分, 即多元函数的积分, 二元函数一般的情况则在第 8 章处理. 由于在一元函数的情况, 被积函数限定为至多具有有限个不连续点, 因此多元函数的情况也应进行简化. 为此, 第 7 章首先在矩形上定义连续函数的积分概念, 然后用 (平面上的) 任意邻域上的连续函数的积分定义广义积分. 从广义积分限定在被积函数是连续函数这一点来说, 它比传统的黎曼积分要狭窄, 但从它适用于任意邻域这一点来说, 又比黎曼积分宽广. 在第 8 章中同样定义了一般情况下的多重积分. 在多重积分中, 我们把重点放在了积分变量的变换公式的严格证明上. 一元函数的积分变量变换公式是直接从不定积分的讨论中导出的. 对有二元函数 $f(x,y)$, 满足 $F_{xy}(x,y)=f(x,y)$ 的函数 $F(x,y)$ 可以作为 $f(x,y)$ 的不定积分③. 7.3 节中双重积分的变量变换公式就是根据这种意义下的不定积分的考察获得的. 其出发点是无论如何也要设法把一元函数的积分变换公式的简洁证明, 推广到两变量的情况. 在第 8 章中, 通过对变量的个数采用归纳法, 证明了一般情况的多重积分的变量变换公式.

作为微积分的应用, 传统的方法是讲授曲线的长度和曲面的面积, 另外还讲授

① 高木貞治《解析概論》, 改訂第 3 版, 岩波書店. pp.109-110. (中文版将由人民邮电出版社出版. —— 编者注)

② 第 6~9 章的内容见本书姊妹篇《微积分入门 II》. —— 编者注

③ 亀谷俊司《解析学入門》, 朝倉書店, p.303.

微分形式理论的初步知识. 但第 8 章已经超过了预定的篇幅, 只好忍痛割爱删除了微分形式理论部分, 在第 9 章中导出曲线长度公式和曲面面积公式后收尾.

现代数学受形式主义的影响很深, 强调数学是公理化构成的论证体系. 但我以为, 正如物理学是描述物理现象一样, 数学是描述客观存在的数学现象. 因此为了理解数学, 明确把握数学现象的直观是非常重要的. 我在撰写本书的过程中, 不仅在论证的严密性上, 而且在直观描述上都下了巨大的功夫.

向在本书的习题解答和提示的写作过程中付出辛勤劳动的前田博信氏表示衷心的感谢.

撰写本书过程中参考了高木先生的《解析概論》和藤原先生的《微分積分学 I》、《微分積分学 II》. 我想书中《解析概論》的影响应随处可见. 所有的术语都是以《岩波数学辞典第 3 版》为标准.

本书出版过程中得到了岩波书店编辑部荒井秀男先生的许多帮助, 借此机会向荒井先生表示衷心的感谢.

作 者

1990 年 12 月

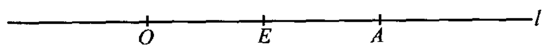
目 录

第1章 实 数

1.1 序

学过高中数学的人, 应该大致知道实数是什么. 可是从现代数学的观点来看, 高中数学的实数理论在严密性上有欠缺, 它作为分析学的基础还不很充分. 本章的目的是在把有理数作为已知的基础, 然后从理论上严密地阐述实数理论. 首先复习高中已经学过的有关实数的知识, 同时指出其严密性上的欠缺之处.

在一条直线 l 上取两个不同的点 O 和 E, 对 l 上任意一点 A, 用 OA 来表示以线段 OE 的长度为单位长度测量的, A 和 O 的距离.

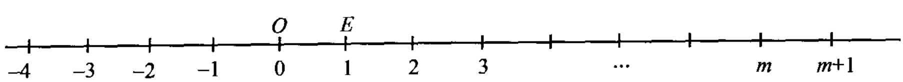


OA除O和A重合的情况之外都是正实数. 进一步

从 O 点观察,如果 A 与 E 在 O 同侧,则令 $\alpha=OA$,
从 O 点观察,如果 A 与 E 分别在 O 两侧, 则令 $\alpha=-OA$,
O 和 A 重合时,则令 $\alpha=0$.

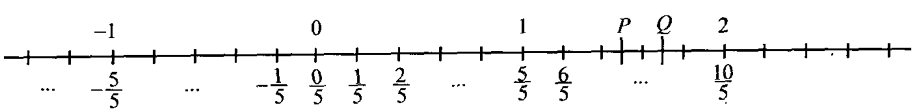
并且给直线 l 上每个点 A 分别对应一个实数 α, 则 l 上所有的点与全体实数之间是一一对应的. 此时把 l 叫做**数轴**, O 叫做原点, E 叫做单位点. 与 A 对应的实数 α 叫做 A 的**坐标**. 又 A 的坐标是 α 时, 记做 $A(\alpha)$, 并且把点 A 记做点 α, 或者简称为 α. 即实数与数轴上各点视为等同, 把实数看作是排列在数轴上的点.

整数是数轴上等距离排列的点:



相邻的两个整数 m 和 $m+1$ 的距离当然是 1.

自然数 n 确定时, 形如 m/n (m 是整数) 的有理数, 在数轴上以 $1/n$ 的距离排列. 例如下图表示有理数 $m/5$:



随着 n 的增大, 间隔 $1/n$ 能够无限变小. 因此无论在数轴上取多么短的线段 PQ, 只要 P 与 Q 不重合, P 与 Q 之间就存在无数多个有理数. 这表示, 有理数的集合在数轴上是处处稠密的.

$\sqrt{2}$ 不是有理数[①]. 不是有理数的实数叫做**无理数**. 因为 $\sqrt{2}$ 是无理数, 所以, 若 r 是有理数, 则 $r+\sqrt{2}$ 也是无理数. 显然 $r+\sqrt{2}$ 这样的无理数集合在数轴上也是处处稠密的. 因此, 全体无理数的集合在数轴上当然是处处稠密的.

如果用十进制的方法, 所有实数都可以用整数或小数的形式表示. 小数分为有限小数和无限小数. 有限小数意思从字面就可以理解. 例如：0.0625=625/10 000=1/16.

无限小数中如 $1.121\,621\,621\,6\cdots$, 这样从某一位开始, 相同的几位数字无限循环排列的数叫做**循环小数**.

$$\begin{aligned}1.121\,621\,621\,6\cdots &= 1.1+0.0216+0.000\,021\,6+\cdots\\ &= 1.1+0.0216\times\left(1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^9}+\cdots\right)\end{aligned}$$

除去有限小数 1.1, 剩下的部分是以 0.0216 作为初项, 以 $1/10^3$ 作为公比的无穷等比级数. 因此,

$$\begin{aligned}1.121\,621\,621\,6\cdots &= 1.1+\frac{0.0216}{1-\dfrac{1}{10^3}} = 1.1+\frac{21.6}{10^3-1} = \frac{11}{10}+\frac{216}{9990}\\ &= \frac{11\,205}{9990} = \frac{83}{74}.\end{aligned}$$

又例如循环小数

$$3.560\,975\,609\,756\,097\cdots$$

可以写成

$$\begin{aligned}3.560\,975\,609\,756\cdots &= 3+0.560\,97\times\left(1+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^{10}}+\cdots\right)\\ &= 3+0.560\,97\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{10^5}} = 3+\frac{56\,097}{99\,999}\\ &= 3+\frac{23}{41} = \frac{146}{41}.\end{aligned}$$

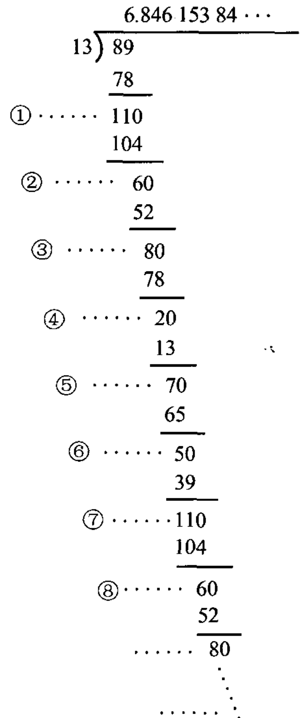
---

① 假定 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则它等于不可约分数 m/n (m,n 是自然数): $\sqrt{2}=m/n$. 所以 $2n^2=m^2$. 如果 m 是奇数, 则 m^2 也是奇数. 这与 $2n^2$ 是偶数相矛盾. 故 m 是偶数, 即 $m=2k$, k 是自然数, 所以 $n^2=2k^2$. 从而, n 是偶数. 这与 m/n 是不可约分数相矛盾. 故 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

一般地, 从某位开始的 n 个数字组成相同排列的无限循环小数, 是由有限小数和以有限小数作为初项并以 $1/10^n$ 作为公比的无穷等比级数的和组成的. 因为

$$1+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{10^{2n}}+\frac{1}{10^{3n}}+\cdots=\frac{1}{1-\dfrac{1}{10^n}}=\frac{10^n}{10^n-1}$$

是有理数, 因此, 循环小数都是有理数.



反之,既不是整数也不是有限小数的有理数必能用循环小数表示. 这可以通过进行除法运算, 在把分数用小数来表示的操作过程中观察了解. 例如 89 除以 13, 可以得到右边的式子,

所以
$$\frac{89}{13}=6.846\ 153\ 846\ 153\ 846\ 153\cdots.$$

这个无限小数的第 7 位以后每 6 位就出现相同的排列 846 153, 是因为第 7 行的余数和第一行的余数都是 11 的缘故. 确定小数点后面数字 846 15··· 的除法运算的步骤如下：首先由 89 除以 13 得出余数 11, 这个余数 11 的 10 倍 110 除以 13 得出商是 8 余数是 6. 这个余数 6 的 10 倍 60 除以 13 得出商是 4 余数是 8. 这个余数 8 的 10 倍 80 除以 13 得出商是 6 余数是 2. 依此类推, 得出的商依次排列为 846 15···.

任意一个非整数、非有限小数的分数 $q/p(p,q$ 是自然数), 把它用无限小数来表示的除法运算的步骤完全类似. 即首先用 q 除以 p 得出商是 k, 余数是 r_1, 其次 $10r_1$ 除以 p 得出商是 k_1 余数是 r_2, 然后 $10r_2$ 处以 p 得出商是 k_2 余数是 r_3, $\cdots$, $10r_n$ 除以 p 得出商是 k_n 余数是 $r_{n+1},\cdots$, 以此类推得出的商 $k_1,k_2,\cdots,k_n,\cdots$ 分别是 $0,1,2,\cdots,9$ 中的某一个数字, 分数 q/p 可用无限小数：

$$k.k_1k_2k_3\cdots k_n\cdots=k+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\cdots+\frac{k_n}{10^n}+\cdots$$

来表示. 当然, 在这里整数 k 也是用十进制数表示.

这种无限小数是循环小数, 可以通过以下方法确定：对某个 n, 当 $r_n=0$ 时, $k_n,k_{n+1},k_{n+2},\cdots$ 皆为 0,

$$\frac{q}{p}=k.k_1k_2\cdots k_{n-1}$$

成为有限小数, 与假设矛盾. 所以, 余数 r_n 全都是不大于 $p-1$ 的正整数. 因此, p 个余数 $r_1,r_2,\cdots,r_p$ 不可能全部不同. 换言之, 这 p 个余数中, 至少有两个是一样的：

$$r_m=r_n,\quad 1\leqslant m<n\leqslant p.$$

此时, 确定从小数点后第 n 位开始的数字 $k_n, k_{n+1}, k_{n+2}, \cdots$ 的除法运算与确定从第 m 位开始的数字 $k_m, k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots$ 的除法运算是一致的. 因此,

$$k_n = k_m, \quad k_{n+1} = k_{m+1}, \quad k_{n+2} = k_{m+2} \cdots.$$

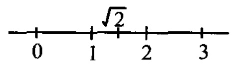
也就是说, q/p 是从第 m 位开始, 数字 $k_m k_{m+1} \cdots k_{n-1}$ 的无限循环的循环小数.

无理数用无限不循环小数来表示. 例如

$$\sqrt{2} = 1.414\ 213\ 56 \cdots. \tag{1.1}$$

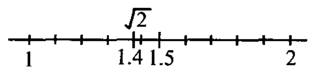
这个无限小数的表示是如下得到的. 首先, $\sqrt{2}$ 在 1 和 2 之间:

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$



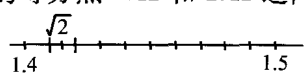
把 1 和 2 之间分成 10 等份, $\sqrt{2}$ 放入相邻的等分点 1.4 和 1.5 之间:

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5.$$



把 1.4 和 1.5 之间分成 10 等份, $\sqrt{2}$ 放入相邻的等分点 1.41 和 1.42 之间:

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42.$$



把 1.41 和 1.42 之间分成 10 等份, $\sqrt{2}$ 放入相邻的等分点 1.414 和 1.415 之间:

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415.$$

反复进行这个操作, 就可以得出无限小数的表示 (1.1).

任意一个实数 α 用无限小数表示, 除 α 是整数或有限小数这种情况外, 其余完全可以用同样的方法来获得. 即, 首先确定满足

$$k < \alpha < k+1$$

的整数 k, 然后获得满足

$$k + \frac{k_1}{10} < \alpha < k + \frac{k_1+1}{10},$$

$$k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} < \alpha < k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2+1}{10^2},$$

$$k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \frac{k_3}{10^3} < \alpha < k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \frac{k_3+1}{10^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

的 $k_1, k_2, k_3, \cdots$ 顺次排列构成的无限小数表示:

$$\alpha = k.k_1k_2k_3k_4\cdots. \tag{1.2}$$

考虑到 α 还包含整数或有限小数的情况, 上面的一系列不等式也可以换成下面的一系列不等式:

$$k \leqslant \alpha < k+1, \quad k + \frac{k_1}{10} \leqslant \alpha < k + \frac{k_1+1}{10},$$

$$k+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}\leqslant\alpha<k+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2+1}{10^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

当 α 是负数时, 式 (1.2) 中 k 是负整数. 此时, 令 $h_n=9-k_n$, 因为

$$0.k_1k_2k_3k_4\cdots+0.h_1h_2h_3h_4\cdots=0.9999\cdots=1,$$

所以

$$\alpha=k+1-0.h_1h_2h_3h_4\cdots.$$

因此, 若令 $h=-k-1$, h 是非负整数, 则

$$\alpha=-h.h_1h_2h_3h_4\cdots. \tag{1.3}$$

这是负实数 α 的一般十进制小数表示. 同理, 任意的实数都可以用十进制小数来表示.

反之, 任意的十进制小数是否也一定表示一个实数呢? 关于有限小数和循环小数, 由于我们已经阐述过, 把

$$k.k_1k_2k_3k_4k_5\cdots \tag{1.4}$$

设为如

$$1.010\ 110\ 111\ 011\ 110\ 111\ 110\ 1\cdots$$

这样的无限不循环小数. 在高中数学中, 实数 α

$$\alpha=k.k_1k_2k_3k_4k_5\cdots$$

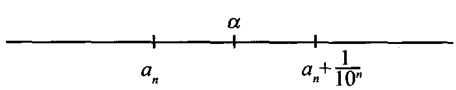
的存在性作为当然的结果确认下来. 即 (1.4) 的小数去掉 $n+1$ 位以后的数字, 得到的有限小数设为

$$a_n=k.k_1k_2k_3\cdots k_n$$

的话, 就是承认了使不等式:

$$a_n<\alpha<a_n+\frac{1}{10^n},\quad n=1,2,3,4\cdots$$

完全成立的实数 α 的存在性. 放在数轴上考虑, 即意味着, 对于所有的 n=1, 2, 3, 4, $\cdots$ 的点, a_n 与 $a_n+1/10^n$ 之间存在点 α.



由于实数作为在以线段 OE 的长度为单位长度测量数轴上两点 O, A 间的距离时, 附加了±号来考虑, 因此为了证明实数 α 的存在, 必须证明数轴上存在这样的点 α. 为此, 必须明确数轴到底是什么. 至此, 我们看到高中数学中直线乃至实数还欠缺明确的定义.

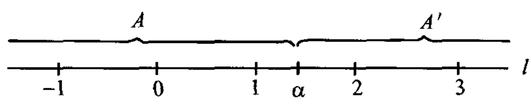
1.2 实 数

在本节, 我们假定读者已经掌握了有理数及其大小、加减乘除的知识, 在此基础上, 给出实数的严格定义. 要理解数学, 必须严密地追踪其论证过程, 仅仅如此还是不够的, 还必须对数学的现象有一个直观的理解."原来是这样, 原来如此, 我明白了!", 当你这样想的时候才能对它有一个综合的把握, 才能自由地驾驭理论. 以下在阐述实数的严密的理论时, 不时插入有助于帮助理解的说明, 也就是下面的小字印刷部分.

a) 实数的定义

有理数全体构成的集合用 $\mathbf{Q}$ 来表示. $\mathbf{Q}$ 的元素用 a, b, c, r, s 等字母表示. $\mathbf{Q}$ 关于加减乘除运算构成域 (field), 所以又把 $\mathbf{Q}$ 叫做**有理数域**. $\mathbf{Q}$ 的元素间定义了大小关系, 用 "$>$" 和 "$<$" 来表示, 这些我们在高中已经学过. 我们可以把有理数想象成按照大小顺序, 在直线上排成一行, 所以又把 $\mathbf{Q}$ 叫做**有理直线**. 对于两个不同的有理数 a, b, $a < b$ 时, 存在无数个有理数 r, 使 $a < r < b$ 成立, 这称之为有理数的**稠密性.**

再回到高中数学, 回顾一下数轴 l, 有理直线 $\mathbf{Q}$ 是 l 上的有理点, 即坐标是有理数的点的全体构成的集合. 现在如果给定一个有理数 α, $\mathbf{Q}$ 在下图中被 α 点分割成左侧的部分 A 和右侧的部分 A'.



A 是由比 α 小的有理数构成的集合, A' 是由比 α 大的有理数构成的集合, 记为:

$$A = \{r \in \mathbf{Q} | r < \alpha\}, \quad A' = \{r \in \mathbf{Q} | r > \alpha\} \quad \mathbf{Q} = A \cup A', \quad A \cap A' = \varnothing.$$

显然 A 中的有理数恒小于 A' 中的有理数.

$$r \in A, \quad s \in A', \quad \text{则 } r < s. \tag{1.5}$$

根据 A 和 A' 的定义得:

$$r \in A, \quad s \in A', \quad \text{则 } r < \alpha < s. \tag{1.6}$$

即 α 是 A 和 A' 的分界点. 如在 1.1 节开头所述, 有理数的集合 $\mathbf{Q}$ 在数轴上是处处稠密的. 由此可知, α 是由满足条件 (1.6) 的 A 和 A' 所确定的唯一的一个实数. 假设除了 α 以外, 还存在一个满足条件的实数 β, 不妨假设 $\alpha > \beta$, 那么必定存在有理数 t, 使得 $\alpha < t < \beta$ 成立. 根据 (1.6), t 既不包含在 A 中也不包含在 A' 中, 这与结论 $A \cup A' = \mathbf{Q}$ 相矛盾.

本节的目的是在假定读者已了解有理数的基础上, 给实数以明确的定义. 现在假设给定一个无理数 α, 如上所述, α 把 $\mathbf{Q}$ 分成满足条件 (1.5) 的两部分 A 和 A'. 反过来, α 是由

A 和 A' 确定的分界点. 在这种情况下, 要在有理数的基础上来定义无理数, 同样可以把这个操作过程反过来. 首先, 把 $\mathbf{Q}$ 分成满足条件 (1.5) 的两部分 A 和 A', 然后用 A 和 A' 的分界点来定义实数. 这是来自于 Dedekind 的分划思想.

下面就根据 Dedekind 思想来阐述实数的定义. 有理直线 $\mathbf{Q}$ 被分割成两个非空子集 A 和 A', 如果 A 和 A' 满足以下两个条件时 , A 和 A' 的组叫做**有理数的分划**(cut,Schnitt), 用记号 $\langle A, A'\rangle$ 来表示.

(1) $r \in A, s \in A'$, 那么 $r < s$;

(2) 没有属于 A 的最大有理数. 即如果 $r \in A$, 则存在 $t \in A$ 使得 $t > r$.

当然, $\mathbf{Q}$ 被分割成 A 和 A' 两部分, 意味着 $\mathbf{Q} = A \cup A', A \cap A' = \varnothing$.

分划 $\langle A, A'\rangle$ 中, A' 是 A 关于 $\mathbf{Q}$ 的补集. 即 A' 是从 $\mathbf{Q}$ 中除去全部属于 A 的有理数后剩下的元素构成的集合. 分划 $\langle A, A'\rangle$ 是由 A 唯一确定的. 由于命题 "如果 $s \in A'$, 那么 $r < s$" 与它的逆否命题 "如果 $s \leqslant r$ 那么, $s \in A$" 等价, 所以, 分划的条件 (1) 只和关于 A 的下列条件等同:

(3) $r \in A$ 时, $s \leqslant r, s \in \mathbf{Q}$, 那么 $s \in A$.

同样, (1) 和涉及 A' 的下列条件也等同.

(3)′ $r \in A'$ 时, $s \geqslant r, s \in \mathbf{Q}$, 那么 $s \in A'$.

定义 1.1 有理数的分划叫做**实数**(real number).

实数用 α, β 等希腊字母来表示. 实数 $\langle A, A'\rangle$ 用 α 表示的时候, 记为 $\alpha = \langle A, A'\rangle$. 所谓两个实数 $\alpha = \langle A, A'\rangle$ 和 $\beta = \langle B, B'\rangle$ 相等 (记 $\alpha = \beta$), 是指 $\langle A, A'\rangle$ 和 $\langle B, B'\rangle$ 是相同的分划. 这也意味着 A 和 B 是相同的集合.

实数论完成之际, $\alpha = \langle A, A'\rangle$ 是 A 和 A' 的分界点, 即对任意的 $r \in A, s \in A'$, 满足不等式 $r < \alpha \leqslant s$ 的实数只有一个. 虽然如此, 但在此阶段不等式 $r < \alpha \leqslant s$ 还没有意义, 所以只能在形式上把分划这一概念定义为实数.

对于分划 $\langle A, A'\rangle$, 可以考虑两种类型:

(I) 没有属于 A' 的最小有理数;

(II) 有属于 A' 的最小有理数.

当 $\langle A, A'\rangle$ 是第 (II) 种类型时, 设 a 是属于 A' 的最小有理数

$$A = \{r \in \mathbf{Q} | r < a\}, \quad A' = \{r \in \mathbf{Q} | r \geqslant a\}. \tag{1.7}$$

此时, 称实数 $\langle A, A'\rangle$等于有理数 a. 记为 $\langle A, A'\rangle = a$. 取任意有理数 a, 根据 (1.7), 若定义分划 $\langle A, A'\rangle$, 当然实数 $\langle A, A'\rangle = a$. 此时我们把实数$\langle A, A'\rangle$和有理数 a 视为相同. 因此, 所有有理数都是实数. 实数 $\langle A, A'\rangle$ 是有理数的无限集合的组, 是同一个有理数处于不同水平的概念. 我们姑且把这二者视为同一, 并把实数概念看成是有理数概念的推广.

$\langle A, A' \rangle$ 在第 (I) 种类型中, 实数 $\alpha = \langle A, A' \rangle$ 和任意有理数都不同. 此时, 把 $\alpha = \langle A, A' \rangle$ 叫做**无理数**(irrational number).

b) 实数的大小

实数论完成之际, 因为如果 $\alpha = \langle A, A' \rangle$, 那么 $A = \{r \in \mathbf{Q} | r < \alpha\}$, 所以实数的大小理应定义如下.

定义 1.2 已知两个实数 $\alpha = \langle A, A' \rangle$, $\beta = \langle B, B' \rangle$, 如果 $A \subset B$, 则 α 比 β 小, 或者说 β 比 α 大. 记作 $\alpha < \beta$, $\beta > \alpha$.

当 $\alpha = a$,$\beta = b$ 都是有理数时, 在此作为定义的实数 α, β 的大小和作为有理数 α, β 的大小一致. 从而显然有 $A = \{r \in \mathbf{Q} | r < a\}$, $B = \{r \in \mathbf{Q} | r < b\}$.

定理 1.1 两个实数 α, β 之间的关系是以下三者之一, 并且仅有其中之一成立.

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \alpha > \beta.$$

证明 $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ 分别等价于 $A \subset B$, $A = B$, $A \supset B$. 三个关系 $A \subset B$, $A = B$, $A \supset B$ 之中必有某两个不成立, 因此必有其中之一成立. 即只需证 $A \subseteq B$[①] 或 $A \supseteq B$ 即可. 为此, 我们来假定既非 $A \subseteq B$, 也非 $A \supseteq B$, 即存在满足 $a \in A$, 且 $a \notin B$ 的有理数 a 和满足 $b \in B$, 且 $b \notin A$ 的有理数 b. 由于 $a \notin B$, 即 $a \in B'$, 所以根据分划的条件 (1) 得 $b < a$, 同理得 $a < b$. 这是矛盾的. □

定理 1.2 如果 $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, 则 $\alpha < \gamma$.

证明 设 $\alpha = \langle A, A' \rangle$, $\beta = \langle B, B' \rangle$, $\gamma = \langle C, C' \rangle$, 则 $A \subset B$, $B \subset C$. 所以 $A \subset C$, 即 $\alpha < \gamma$. □

定理 1.3 对于任意实数 $\alpha = \langle A, A' \rangle$ 下式成立.

$$A = \{r \in \mathbf{Q} | r < \alpha\}, \quad A' = \{r \in \mathbf{Q} | r \geqslant \alpha\}. \tag{1.8}$$

证明 为了比较有理数 r 和实数 α, 把 r 看作实数, 并用分划来表示:

$$r = \langle R, R' \rangle, \quad R = \{s \in \mathbf{Q} | s < r\}, \quad R' = \{s \in \mathbf{Q} | s \geqslant r\}.$$

因为 $A \cup A' = \mathbf{Q}$, $A \cap A' = \varnothing$, 所以要证 (1.8) 式只需证明: 如果 $r \in A$, 则 $r < \alpha$; 如果 $r \in A'$, 则 $r \geqslant \alpha$.

(1) 当 $r \in A$ 时: 根据分划条件 (3), $s < r$, $s \in \mathbf{Q}$, 则由 $s \in A$, 从而 $R \subseteq A$. 又因为 $r \notin R$, 所以 $R \neq A$. 故 $r < \alpha$.

(2) 当 $r \in A'$ 时: 根据分划条件 (3)$'$, $s \geqslant r$, $s \in \mathbf{Q}$, 则由 $s \in A'$ 得 $R' \subseteq A'$. 又因为 R, A 分别是 $\mathbf{Q}$ 中 R' 和 A' 的补集, 因此 $A \subseteq R$, 即 $r \geqslant \alpha$. □

定理 1.3 说明, 实数 $\alpha = \langle A, A' \rangle$ 成为 A 和 A' 的边界点.

---

① "$A \subseteq B$" 表示一般的包含关系 (不限于真包含关系).

定理 1.4 对任意两个实数 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$, 存在无数个满足 $\alpha<r<\beta$ 的有理数 r.

证明 设 $\alpha=\langle A, A'\rangle$, $\beta=\langle B, B'\rangle$, 因为 $\alpha<\beta$, 所以 $A\subset B$. 因此存在满足 $b\in B$, $b\notin A$ 的有理数 b. 因为 $b\in A'$, 由定理 1.3, $\alpha\leqslant b$. 根据分划的条件 (2), 因没有属于 B 的最大的有理数, 所以存在无数个满足 $b<r$, $r\in B$ 的有理数 r. 由定理 1.3, $r\in B$ 和 $r<\beta$ 等价, 所以这些有理数 r 都满足不等式 $\alpha<r<\beta$. □

实数全体的集合用 $\mathbf{R}$ 来表示. 我们可以想象实数按照大小 $(<)$ 顺序排成一行, 把 $\mathbf{R}$ 叫做**数轴**. 至此在高中数学中含义模糊的数轴概念得以明确定义. $\mathbf{R}$ 表示数轴时, 称实数为数轴上的点, 把有理数叫做**有理点**, 把无理数叫做**无理点**.

我们在 1.1 节中已经阐述过有理数的集合 $\mathbf{Q}$ 在数轴上处处稠密. 定理 1.4 表明这一结论在严格定义的数轴上仍然是成立的.

定理 1.5 对给定的自然数 m 及任意实数 α, 存在有理数 a 满足

$$a<\alpha\leqslant a+\frac{1}{m}.$$

证明 设 $\alpha=\langle A, A'\rangle$, 任取 $r_0\in A$, 对自然数 n, 令 $r_n=r_0+n/m$. 如果设 $s\in A'$, 当 $n>m(s-r_0)$ 时, $r_n=r_0+n/m>s$, 因此 $r_n\in A'$. 从而满足 $r_{k-1}\in A$, $r_k\in A'$ 的自然数 k 确定. 令 $a=r_{k-1}$, 则 $a<\alpha\leqslant a+1/m$. □

这个定理蕴含了实数可以由有理数任意逼近.

c) 无理数

如 1.1 节所述, 在高中数学中, 我们对于无限不循环小数必是实数这一点, 还不能明确地说明. 实数的十进制小数表示在以后的数列的极限中会讲到, 在这里, 先证明无限不循环小数是无理数.

已知无限不循环小数 $k.k_1k_2k_3\cdots k_n\cdots$, 其中 k 为整数, 并令

$$a_n=k.k_1k_2\cdots k_n=k+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\cdots+\frac{k_n}{10^n},\quad b_n=a_n+\frac{1}{10^n}.$$

如 1.1 节所述, 这个无限小数表示实数 α, 无非是实数 α 关于一切自然数 n 满足下面的不等式:

$$a_n\leqslant\alpha<b_n. \tag{1.9}$$

显然, 由 $a_{n-1}\leqslant a_n$ 及 $0\leqslant k_n\leqslant 9$ 得,

$$b_n=a_{n-1}+\frac{k_n+1}{10^n}\leqslant a_{n-1}+\frac{10}{10^n}=b_{n-1}.$$

考虑到它是无限不循环小数, 所以从某一位开始, 以后的全部 k_n 不能都是 0, 并且, 从某一位开始, 以后的全部 k_n 也不能都是 9. 即存在无数个满足 $k_m\geqslant 1$ 的