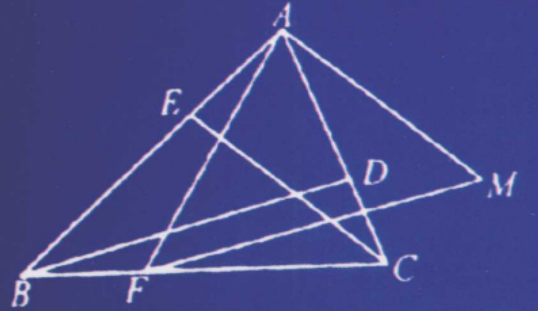
新课标

高中数学讲义

文卫星 编著

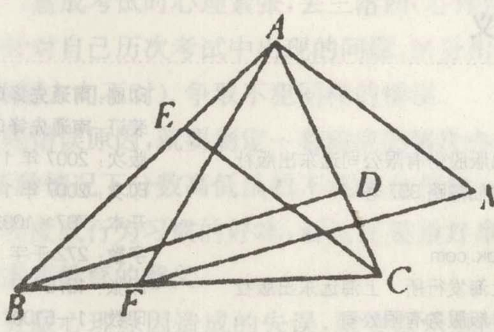


上海远东出版社

新课标

高中数学讲义

文卫星 编著



上海远東出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学讲义/文卫星编著. 一上海：上海远东出版社，2007

ISBN 978-7-80706-537-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 文… Ⅲ. 数学课—高中—解题 Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 131461 号

责任编辑：储成连 丁是玲

封面设计：李 廉

高中数学讲义

编著：文卫星

出版：上海世纪出版股份有限公司远东出版社

地址：中国上海市仙霞路 357 号

邮编：200336

网址：www.ydbook.com

发行：新华书店上海发行所 上海远东出版社

制版：南京前锦排版服务有限公司

印刷：南通先锋印刷有限公司

装订：南通先锋印刷有限公司

版次：2007 年 11 月第 1 版

印次：2007 年 11 月第 1 次印刷

开本：787×1092 1/16

字数：272 千字

印张：13.5

印数：1—5100

ISBN 978-7-80706-537-1/G·768 **定价：22.00 元**

零售、邮购电话：021-62347733-8555

前　言

本书所选内容和介绍的思想方法、技能技巧大多数是教材中没有明确提出的、对提高数学能力又是必须的.本书中重视一般问题的常规解法,尽可能地给出简易解法或多种解法,并根据试题的不同特点,以分析、评析、评注、解题规律等不同形式指出错误原因、揭示思维过程、总结解题经验,以达到提高数学能力的目的.相信同学们在认真读完本书后,能在精神上感到充实,在能力上觉得提高.这正是笔者所期待的.

本书的例题及习题源自4个部分:

一是错解部分,都是来自学生的平时作业、考试中的各种易错问题;

二是精选笔者近几年在教学研究中的最新成果,结合新教材及高考要求按照知识系统充实、加工而成;

三是精选高考中的典型试题及近年来期刊中出现的新题、好题,分别给出新颖解法;

四是选用了笔者在教学中原创的部分开放性、探索性问题.

本书共分30讲,第1~24讲按新教材的知识点顺序编写,每讲都给出内容概述,指出这一讲的重点、难点、重要的思想方法、解题规律和容易犯的错误,然后是精例评析,所选例题都是新教材中的重点、难点内容.每讲最后还给出若干能力训练题,并附有详细答案(包括选择题、填空题),便于学生自测.

第25~26讲为开放、探索性问题,大多数试题是笔者一年来的原创题.从这些问题中同学们会感到开放、探索性问题并不神秘、不可怕,大多可以根据常规问题进行联想、类比、深化,通过一步一步演变而来.

第27~30讲是对学(复)习方法、考试方法以及心理因素在学习、考试中的影响等若干问题进行的探讨.根据同学们在数学学习中存在的问题、在思想上产生的困惑,有针对性地分析原因,提出具体改进措施、指明努力方向.

本书得以出版,要感谢我所在的工作单位——上海市七宝中学,这里领导的关怀、同事的帮助、学生的努力,美丽的校园构成非常好的人文环境,让我对工作和生活充满乐趣.

第23、24讲部分内容由徐辉老师提供并帮助校阅部分书稿.张列军、刘坤、朱凌莉、李强、唐淑红、郝莉莉等老师也给予不少帮助,在此一并致谢!部分题目选自各类书刊,谨向这些作者表示衷心谢意.

由于编写时间仓促,加上水平有限,书中难免有些缺点、错误,欢迎读者批评指正.请把您的宝贵意见发到:shanghaiwwx@yahoo.com.cn.

文卫星

于上海市七宝中学

目　录

集合与逻辑

第1讲　集合学习中的疑难问题

1. 内容概述

集合是现代数学的基本语言. 它渗透到高中数学的各章节，许多问题用集合的语言表达将显得非常简单. 集合的元素具有确定性、无序性、互异性，对子集、真子集、集合的相等、集合的交、并、补等运算以及空集的特点要熟练掌握.

以集合形式的解答题在高考中时常出现，且试题难度属于中档以上.

2. 精例评析

2.1　忽视出现空集的几种情况

例1　设 $a\in\mathbf{R}$，集合 $A=\left\{x \mid y=\dfrac{1}{\sqrt{x-a}},\ a\in\mathbf{R}\right\}$，$B=\{x \mid 2a-x\geqslant 0,\ a\in\mathbf{R}\}$，$C=\{m \mid x^2-2mx+m^2-m=0$ 有实根，$m\in\mathbf{R}\}$. 若 $(A\cap B)\subsetneqq C$，求 a 的取值范围.

分析　因 $(A\cap B)\subsetneqq C$，要考虑 $A\cap B$ 是空集和不是空集两种情况.

解　由已知可得 $A=\{x \mid x>a\}$，$B=\{x \mid x\leqslant 2a\}$，$C=\{m \mid m\geqslant 0\}$.

(1) 当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，$a>0$，$A\cap B=\{x \mid a<x\leqslant 2a\}$，$(A\cap B)\subsetneqq C$ 恒成立；

(2) 当 $A\cap B=\varnothing$ 时，$2a\leqslant a$，$a\leqslant 0$，也满足条件.

综合(1)、(2)得 $a\in\mathbf{R}$.

评注　本题容易忽略 $A\cap B=\varnothing$ 的情况.

例2　集合 $A=\{x \mid x^2+(p+2)x+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数 p 的范围.

错解　$\because A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，$\therefore$ 方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 有负根或零根，

则 $\begin{cases}\Delta=(p+2)^2-4\geqslant 0,\\ x_1+x_2=-(p+2)\leqslant 0,\ \therefore\ p\geqslant 0,\\ x_1x_2=1>0.\end{cases}$

评析 $A\cap \mathbf{R}^+=\varnothing$，不一定能说明方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 有负根或零根，A 还可能是 $\varnothing$. 因此还要考虑 $A=\varnothing$ 的情形，此时 $\Delta<0\Rightarrow -4<p<0$. 综合上述，正确答案为 $p>-4$.

·解题规律·

一般地，$A\subseteq B$，$A\cap B=A$，$A\cap B=\varnothing(B\neq\varnothing)$，$A\cup B=B$ 等应考虑 $A=\varnothing$.

2.2 忽视元素互异性或已知条件

集合元素的三性：确定性、互异性、无序性. 其中互异性在解题中常常被忽视，造成错误. 另一个易被忽视的是求出的结果与已知矛盾，想不到检验.

例 3 是否存在实数 a，使 $A\cap B=\{2,\ 5\}$，其中 $A=\{2,\ 4,\ a^3-2a^2-a+7\}$，

$$B=\left\{1,\ 5(a-1),\ a^2-2a+2,\ -\frac{1}{2}(a^2-3a-8),\ a^3+a^2+3a+7\right\}.$$

分析 B 中有 5 个元素，且表达式较繁，只要仔细观察，其实 A 中只有一个元素不确定，因此 $a^3-2a^2-a+7=5$.

解 由题意得，$a^3-2a^2-a+7=5$，即$(a-2)(a-1)(a+1)=0$，$\therefore a=2$ 或 $a=1$ 或 $a=-1$.

把 $a=2$ 代入 B 中，有 $5(a-1)=5$，$-\dfrac{1}{2}(a^2-3a-8)=5$ 与集合元素互异性矛盾，

$\therefore a=2$ 舍去；

把 $a=1$ 代入 B 中，$a^2-2a+2=1$，同样应舍去；

把 $a=-1$ 代入 B 中，$a^2-2a+2=5$，$-\dfrac{1}{2}(a^2-3a-8)=2$，$a^3+a^2+3a+7=4$，

此时 $A\cap B=\{2,\ 4,\ 5\}$ 与已知矛盾，$\therefore a=-1$ 应舍去.

综上所述，不存在实数 a，使 $A\cap B=\{2,\ 5\}$ 成立.

评注 得到 a 的值要代入集合 A、B，检验其是否满足集合元素的互异性或已知条件 $A\cap B=\{2,\ 5\}$.

·解题规律·

一般地，若集合的元素中含有变数，根据题意要求出变数的值，求出后要把它代入检验，检验其是否满足集合元素的互异性或是否满足已知条件.

2.3 忽视是否应该包含区间端点

当一个数集是另一个数集的子集时，要考虑相应的两个端点能否重合，稍有不慎，不该重合的重了，或该重合的没有重，都是错误的，对客观题则是"毁灭性"的，对解答题则是不完整的，有人戏称这是"成也一点，败也一点"，很有道理.

例 4 已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}\right\}$，函数 $f(x)=4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-2\sqrt{3}\cos 2x-1$，$x\in A$.

(1) 求 $f(x)$的取值范围；

(2) 若不等式 $|f(x)-m|<2$ 在 $x\in A$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围.

解 (1) $\because f(x)=2\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\right]-2\sqrt{3}\cos 2x-1$

$$=2\sin 2x-2\sqrt{3}\cos 2x+1$$

$$=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1.$$

又$\because \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\pi}{6}<2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$，即$3<4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1\leqslant 5$，$3<f(x)\leqslant 5$.

(2) **错解** $|f(x)-m|<2$，$\therefore f(x)-2<m<f(x)+2$恒成立，$\therefore m\geqslant 5-2$且$m\leqslant 3+2$，$\therefore m\in[3,5]$.

评析 若$f(x)-2<m$恒成立，则m应大于$f(x)-2$的最大值，而$f(x)-2$的最大值为3，故$m>3$，$\therefore$ 正确答案为$m\in(3,5]$.

例5 设集合$A=\{x\mid x^2-3x+2<0\}$，$B=\{x\mid m<x<2m+1\}$，若$A\subseteq B$，求实数m的取值范围.

分析 $A\subseteq B$表示$A\subsetneqq B$或$A=B$，因而解答需要分类讨论.

错解 A表示的不等式解为$1<x<2$，故A是非空集合.

$\therefore\begin{cases}m<1,\\2m+1>2,\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}<m<1.$

评析 $A\subseteq B$含$A\subsetneqq B$和$A=B$两种情况，上述解法是当$A\subsetneqq B$的情况，正确解法还应包含$A=B$的情况，此时，上述不等式组应该取等号，即所求的m应满足$\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant 1$.

本题容易忽视$A=B$的情形，导致错误. 若把A改成$A=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$，其他条件不变，则因为$A$含有端点1、2，而$B$不含端点$m$、$2m+1$，此时$A\subseteq B$等价于$A\subsetneqq B$，结论才是$\frac{1}{2}<m<1$.

若把B改成$B=\{x\mid m\leqslant x\leqslant 2m+1\}$，其他条件不变，此时应该有$\begin{cases}m\leqslant 1,\\2m+1\geqslant 2,\end{cases}\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant 1$. 此时$A\subseteq B$仍然等价于$A\subsetneqq B$，但因为$A$不含端点，而$B$含端点，所以不等式组要取等号. 如$m=1$时，$A=\{x\mid 1<x<2\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$，$A$是$B$的子集，满足条件. 同样可以验证$m=\frac{1}{2}$时也满足条件.

·解题规律·

不等式之间的包含关系，是否包含端点，要根据条件仔细确定，必要时可画数轴，利用数形结合帮助解题.

2.4 突出集合的工具作用

有些试题用集合的语言表述，或说是用集合"包装"，其实是一般的代数或几何问题，只

要把“包装”拆掉，就可转化为原来的问题进行解答.

例 6 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且 $f(0)=1$，$A=\{(x, y)\mid f(x^2+y^2)<f(1)\}$，$B=\{(x, y)\mid f(ax+by+c)=1, a, b, c\in\mathbf{R}, a\neq 0\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，求证：$a^2+b^2\leqslant c^2$.

解 本题中集合 A 的几何意义是：单位圆 $x^2+y^2<1$ 内部的点集，B 的几何意义是直线 $ax+by+c=0$，$A\cap B=\varnothing$ 表示单位圆与直线没有交点.

圆心 $(0, 0)$ 到直线的距离 $d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\geqslant 1$，即 $a^2+b^2\leqslant c^2$.

评注 由于单位圆不含边界，所以 $d\geqslant 1$，如果丢掉等号，那就错了.

例 7 已知奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 上有定义，且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，$f(1)=0$；函数 $g(\theta)=\sin^2\theta+m\cos\theta-2m$，$\theta\in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. 若集合 $M=\{m\mid g(\theta)<0\}$，集合 $N=\{m\mid f[g(\theta)]<0\}$，求 $M\cap N$.

分析 本题中集合 M、N 的表达式比较抽象，一时看不出交集是什么，因此，只能从条件入手判断 $f(x)<0$ 的解集，再结合其他条件确定解法.

解 $\because$ $f(x)$ 是奇函数且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也是增函数. 又 $f(1)=0$，$\therefore f(-1)=-f(1)=0$，从而当 $f(x)<0$ 时可得 $x<-1$ 或 $0<x<1$.

$\therefore N=\{m\mid f[g(\theta)]<0\}=\{m\mid g(\theta)<-1$ 或 $0<g(\theta)<1\}$.

于是 $M\cap N=\{m\mid g(\theta)<-1\}$，即 $\sin^2\theta+m\cos\theta-2m+1<0$，

$\therefore \cos^2\theta-m\cos\theta+2m-2>0$ 恒成立. 令 $t=\cos\theta$，则 $t\in[0, 1]$，

记 $\varphi(t)=t^2-mt+2m-2=\left(t-\dfrac{m}{2}\right)^2+2m-2-\dfrac{m^2}{4}$，$t\in[0, 1]$.

$$(1)\begin{cases}\dfrac{m}{2}<0,\\ \varphi(0)=2m-2>0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<0,\\ m>1,\end{cases}\Rightarrow m\in\varnothing;$$

$$(2)\begin{cases}0\leqslant\dfrac{m}{2}\leqslant 1,\\ \varphi\left(\dfrac{m}{2}\right)=2m-2-\dfrac{m^2}{4}>0,\end{cases}\Rightarrow 4-2\sqrt{2}<m\leqslant 2;$$

$$(3)\begin{cases}\dfrac{m}{2}>1,\\ \varphi(1)>m-1>0,\end{cases}\Rightarrow m>2.$$

综合(1)、(2)、(3)，得 $M\cap N=\{m\mid m>4-2\sqrt{2}\}$.

评注 本题条件看似复杂，一旦去掉集合符号以后，就转化成含参数的二次函数在某区间上最小值大于 0 恒成立问题，而这是大家所熟悉的. m 的范围还可以用分离变量法来解：

$$t^2-mt+2m-2>0\Leftrightarrow m>\frac{2-t^2}{2-t}，令 h(t)=\frac{2-t^2}{2-t}，则$$

$$h(t)=\frac{2-t^2}{2-t}=2+t+\frac{2}{t-2}=t-2+\frac{2}{t-2}+4\leqslant 4-2\sqrt{2},\ \therefore m>4-2\sqrt{2}.$$

·解题规律·

根据具体条件，理解问题的本质，转化为相关问题求解. 如例 6 转化为直线与圆域无公共点，最终转化为点到直线距离问题；例 7 转化为二次函数在闭区间上的最值问题.

2.5 准确理解集合符号的意义

集合的元素具有一类共性，因而可以用来描述具有整体性质的问题，这类题目一旦在高考题中出现，往往有一定的难度，甚至少数同学连读懂题意都会有困难，需要反复读题才能理解题意.

例 8 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体：存在非零常数 T，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立.

(1) 函数 $f(x)=x$ 是否属于集合 M？说明理由；

(2) 设函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图像与 $y=x$ 的图像有公共点，证明：$f(x)=a^x\in M$；

(3) 若函数 $f(x)=\sin kx\in M$，求实数 k 的取值范围.

分析 本题给出的集合 M 比较抽象，其实 $M=\{f(x)\mid$ 存在非零常数 T，使 $f(x+T)=Tf(x),\ x\in\mathbf{R}\}$，第(1)题就是问 $f(x)$ 是否属于集合 M，因此，首先要理解 M 的定义.

解 (1) 对于非零常数 T，由于 $f(x)=x$，$\therefore f(x+T)=x+T$，$Tf(x)=Tx$. $\because$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$，$x+T=Tx$ 不能恒成立，$\therefore f(x)$ 不属于 M.

(2) $\because$ 函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图像与函数 $y=x$ 的图像有公共点，

$\therefore$ 方程组 $\begin{cases}y=a^x,\\ y=x\end{cases}$ 有解，消去 y 得 $a^x=x$，显然 $x=0$ 不是方程 $a^x=x$ 的解，$\therefore$ 存在非零常数 T，使 $a^T=T$.

于是，对 $f(x)=a^x$ 有 $f(x+T)=a^{x+T}=a^T\cdot a^x$，而 $Tf(x)=T\cdot a^x$，$\because a^T=T$，$\therefore f(x+T)=Tf(x)$，故 $f(x)=a^x\in M$.

(3) 当 $k=0$ 时，$f(x)=0$，显然 $f(x)=0\in M$.

当 $k\neq 0$ 时，$\because f(x)=\sin kx\in M$，若存在非零常数 T，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立，即 $\sin(kx+kT)=T\sin kx$.

$\because k\neq 0$，且 $x\in\mathbf{R}$，$\therefore kx\in\mathbf{R}$，$kx+kT\in\mathbf{R}$，$\therefore \sin kx\in[-1,1]$，$\sin(kx+kT)\in[-1,1]$，故要使 $\sin(kx+kT)=T\sin kx$ 成立，只有 $T=\pm 1$. 当 $T=1$ 时，$\sin(kx+k)=\sin kx$，由诱导公式知，$k=2m\pi$，$m\in\mathbf{Z}$ 时等式成立；当 $T=-1$ 时，$\sin(kx-k)=-\sin kx$，同理可知 $k=(2m-1)\pi$ 时等式成立.

$\therefore k=0$，或 $k=2m\pi$，或 $k=(2m-1)\pi$，其中 $m\in\mathbf{Z}$.

综合上述，实数 k 的取值范围是 $\{k\mid k=m\pi,\ m\in\mathbf{Z}\}$.

评注 如果熟悉公式 $\sin(k\pi+\alpha)=(-1)^k\sin\alpha$，从 $\sin(kx+k)=\sin kx$ 便立刻发现

$k=2m\pi$，若 $\sin(kx+k)=-\sin kx$，则 $k=(2m-1)\pi$，其中 $m\in\mathbf{Z}$.

如果由 $\sin(kx+k)=\sin kx$ 得 $kx+k=n\pi+(-1)^n kx$，$(n\in\mathbf{Z})$ 也可以求解，但运算和思维的要求都较高，出错几率增加.

例 9 (1) 设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^t+2^s \mid 0\leqslant s<t$，且 $s,t\in\mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列，

即 $a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=6$，$a_4=9$，$a_5=10$，$a_6=12$，….

将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大，左小右大的原则写成如下的三角形数表：

3

5　6

9　10　12

—　—　—　—

—　—　—　—　—

(i) 写出这个三角形数表的第四行、第五行各数；(ii) 求 a_{100}.

(2) 设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^r+2^t+2^s \mid 0\leqslant r<s<t$，且 $r,s,t\in\mathbf{Z}\}$ 中所有的数都是从小到大排列成的数列，已知 $b_k=1\,160$，求 k.

解 不少同学看到这个条件会感到不知所措，理解题意很困难. 其实，只要把条件中的 6 个数字是怎么出来的规律找到，其他就好办了. 为此，根据 $0\leqslant s<t$ 列出一张表：

t \ s	0	1	2	3	4	5	…
1	3						
2	5	6					
3	9	10	12				
4	17	18	20	24			
5	33	34	36	40	48		
6	65	66	68	72	80	96	
…							

(1) (i) 从表中我们不仅发现前三行，还发现了第四行、第五行的数字分别是 17，18，20，24；33，34，36，40，48.

(ii) $t=1$，第一行有一个数字，$t=2$，第 2 行有 2 个数字，…，$t=n$，第 n 行有 n 个数字，此时表中共有 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 数字，令 $\dfrac{n(n+1)}{2}<100\Rightarrow n<14$，当 $n=13$ 时有 91 个数字，所以 a_{100} 位于第 14 列第 9 行，即 $t=14$，$s=8$，$a_{100}=2^{14}+2^8=16\,640$.

(2) 对 $b_n=2^r+2^t+2^s(0\leqslant r<s<t$，且 $r,s,t\in\mathbf{Z})$，仿上列表有困难，可以把数字排出来，为简便，记 $b_n=(t,s,r)$，则 b_n 可按如下方式排列.

第 1 组(2, 1, 0)

第 2 组(3, 1, 0)

(3, 2, 0) (3, 2, 1)

第 3 组(4, 1, 0)

(4, 2, 0) (4, 2, 1)

(4, 3, 0) (4, 3, 1) (4, 3, 2)

… … … …

第 n 组有 n 行共有 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=C_{n+1}^{2}$ 项.

$\because$ $b_k=1\,160=2^{10}+2^{7}+2^{3}$，$\therefore$ b_k 为第 10 组第 7 行第 4 项. 前 9 行有 $1+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_9^2=C_{10}^3$ 项，前 6 行有 $1+2+\cdots+6$ 项，$\therefore$ $k=(1+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_9^2)+(1+2+\cdots+6)+4=145$.

评注 本题只是借用集合的语言，考查数列与组合(不用组合数仅用数列知识也可以，但计算量要大些)的简单知识，但是题目设计新颖，对阅读能力的要求较高. 解题的基本思路就是把满足条件的数想办法列出来，(1)是用表格发现规律，(2)是对题目的信息作了加工转化，变得通俗易懂，简洁明了.

·解题规律·

此类试题新颖，平时很难模拟到，对考生的阅读理解能力和心理承受能力要求都比较高. 解题时要静心、反复阅读直到理解题意再开始解答.

3. 能力训练

1. 设集合 $A=\{x\,|\,|x-2|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\,|\,y=x^2,\ -1\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于(　　).

A. $\mathbf{R}$　　B. $\{x|x\in\mathbf{R},\ x\neq 0\}$　　C. $\{0\}$　　D. $\varnothing$

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，且 $A=\{x\,|\,|x-1|>2\}$，$B=\{x\,|\,x^2-6x+8<0\}$，则$(\complement_U A)\cap B$ 等于(　　).

A. $[-1,4]$　　B. $(2,3)$　　C. $(2,3]$　　D. $(-1,4)$

3. 若 A、B、C 为三个集合，$A\cup B=B\cap C$，则一定有(　　).

A. $A\subseteq C$　　B. $C\subseteq A$　　C. $A\neq C$　　D. $A=\varnothing$

4. 设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$. 若 $f(x)>0$ 的解集为 A，$B=\{x\,|\,1<x<3\}$，$A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

5. 集合 $A=\{x\,|\,x^2+(2-a)x+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cup\mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$，求实数 a 的范围.

6. 已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-3x+2>0,\ x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\,|-2\leqslant x<m,\ x\in\mathbf{Z}\}$，若 $A\cap B$ 只有四个元素，求 m 的取值范围.

7. 记函数 $f(x)=\sqrt{2-\dfrac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)](a<1)$ 的

定义域为 B.

(1) 求 A；(2) 若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

8. 已知集合 $A=\left\{(x,y)\mid y=\frac{1}{2}x^2\right\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2=9\}$，求证：$A\cap B\neq\varnothing$ 的条件是 $-3\leqslant a\leqslant 5$.

参考答案

1. $A=[0,4]$，$B=[-4,0]$，$A\cap B=\{0\}$，选 B.

2. $A=(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$，$\complement_U A=[-1,3]$，$B=(2,4)$，选 C.

3. $A\cup B=B\cap C\Rightarrow A\subseteq B\subseteq C$，选 A.

4. 由题意，结合 $f(x)$ 的图像可知 $f(1)f(3)<0$，可得 a 的范围为 $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{6}{7},+\infty\right)$.

5. 若 $A\neq\varnothing$，即方程 $x^2+(2-a)x+1=0$ 只有正根，由 $\Delta\geqslant 0$ 及 $x_1+x_2=a-2>0$，$x_1x_2=1>0$，解得 $a\geqslant 4$；若 $A=\varnothing$，$\Delta<0$ 解得 $0<a<4$，综合得 $a>0$.

6. A 为满足不等式 $x<1$ 或 $x>2$ 的整数点，-2，-1，0 三个元素显然满足条件，另一个元素应该是 3，因此，m 的值应介于 3 到 4 之间，且含 4 不含 3，即 $3<m\leqslant 4$.

7. (1) $2-\frac{x+3}{x+1}\geqslant 0$，解得 $A=(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$.

(2) 由 $(x-a-1)(2a-x)>0$，得 $(x-a-1)(x-2a)<0$. $\because a<1$，$\therefore a+1>2a$，$\therefore B=(2a,a+1)$.

$\because B\subseteq A$，$\therefore 2a\geqslant 1$ 或 $a+1\leqslant -1$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 或 $a\leqslant -2$，而 $a<1$，$\therefore \frac{1}{2}\leqslant a<1$ 或 $a\leqslant -2$，故当 $B\subseteq A$ 时，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup\left[\frac{1}{2},1\right)$.

8. 先求 $A\cap B=\varnothing$，再求其补集. 由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2,\\ x^2+(y-a)^2=9,\end{cases}$ 得 $y^2+2(1-a)y+a^2-9=0\cdots$①.

$\because y=\frac{1}{2}x^2\geqslant 0$，$\therefore A\cap B=\varnothing$ 的条件是①无解或只有两个负根，则

$\Delta<0$ 或 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ -2(1-a)<0,\\ a^2-9>0,\end{cases}$ 解得 $a>5$ 或 $a<-3$. 从而 $A\cap B\neq\varnothing$ 的条件为 $a\in[-3,5]$.

不等式

第2讲　不等式性质及应用

1. 内容概述

不等式的主要内容：不等式的基本性质、不等式的解法、利用重要不等式求最值、不等式的证明. 其中不等式的解法和利用重要不等式求最值是重点.

不等式是高中数学的重要内容，它可以渗透到高中数学的各章节，尽管在高考中不一定单独出不等式的试题，但在各年的考题中，不等式的内容所占分值都比较大，而且涉及不等式的试题有时较难.

2. 精例评析

2.1　解不等式

例1　解下列关于 x 的不等式(组)：

(1) $\frac{1}{2}<\frac{x-1}{x-2}<1$；　(2) $\left|\frac{2x-3}{x+2}\right|>1$；　(3) $|x+1|+|x-2|>5$.

解　(1) $\frac{1}{2}<\frac{x-1}{x-2}<1\Leftrightarrow\left(\frac{x-1}{x-2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{x-2}-1\right)<0\Leftrightarrow\frac{x}{(x-2)^2}<0\Leftrightarrow x<0$. 即所给不等式当 $x<0$ 时成立.

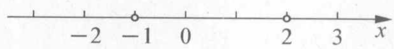
评注　不等式 $a<f(x)<b$ 通常是转化为不等式组 $\begin{cases}f(x)-a>0,\\b-f(x)>0,\end{cases}$ 来求解，有时解题较繁. 注意到 $a<f(x)<b\Leftrightarrow(f(x)-a)(f(x)-b)<0$. 当 $f(x)-a$ 与 $f(x)-b$ 能分解因式时，转化为可分解因式的高次多项式解答相当简单.

思考题　$a<f(x)<b$ 的解法能否推广到：$g(x)<f(x)<h(x)\Leftrightarrow[f(x)-g(x)][f(x)-h(x)]<0$？

(2) $\left|\frac{2x-3}{x+2}\right|>1\Leftrightarrow|2x-3|>|x+2|\Leftrightarrow4x^2-12x+9>x^2+4x+4\Leftrightarrow x>5$ 或 $x<\frac{1}{3}$，但 $x\neq-2$，$\therefore x\in(-\infty,-2)\cup\left(-2,\frac{1}{3}\right)\cup(5,+\infty)$.

评注 本题常规解法是把原不等式化为$\dfrac{2x-3}{x+2}>1$或$\dfrac{2x-3}{x+2}<-1$，再把解集并起来.在分别解这两个分式不等式过程中出错几率较大.

(3) $|x+1|+|x-2|>5$的常规解法是分区间讨论，其实，利用绝对值的几何意义非常简单：$|x+1|+|x-2|$表示到点-1的距离与到点2的距离之和大于5，从数轴一看便知解集为$\{x\mid x<-2$或$x>3\}$.



评注 有些同学用移项平方的方法，由于一次平方不能完全去掉绝对值，还要分类讨论，这是很麻烦的，导致在运算环节出错，功亏一篑.通常情况下一次平方不能去掉绝对值时，就不宜采用这种方法，而应分类讨论.

例2 解下列关于x的表达式：

(1) $\arcsin 2x>\arcsin(x-1)$； (2) $\log_x(ax)>0$； (3) $\sqrt{2ax-a^2}>1-x(a>0)$.

解 (1) 由反正弦函数定义及单调性得

$$1\geqslant 2x>x-1\geqslant -1\Leftrightarrow\begin{cases}2x\leqslant 1,\\2x>x-1,\\x-1\geqslant -1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant\dfrac{1}{2},\\x>-1,\\x\geqslant 0,\end{cases}\Rightarrow x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right].$$

评注 有同学会这样解：$\begin{cases}-1\leqslant 2x\leqslant 1,\\2x>x-1,\\1\geqslant x-1\geqslant -1,\end{cases}\Rightarrow x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，解法没有错，但运算繁了.节省计算量是减少错误的有效途径之一.

(2) $\log_x(ax)>0\Rightarrow 1+\log_x a>0\Rightarrow\dfrac{1+\log_a x}{\log_a x}>0\Rightarrow\log_a x>0$或$\log_a x<-1$.

若$a>1$，则$x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)\cup(1,+\infty)$；若$0<a<1$，则$x\in(0,1)\cup\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$；若$a=1$，$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

评注 不要忽略对$a=1$的讨论.在得到$1+\log_x a>0$，不少同学会这样做：$\log_x a>-1$，对x分类讨论，后面再对a进行分类讨论，形成二次分类，麻烦不说，最后还要合并，而这又是一个容易出错的地方.出现这种不合理解法的原因是没有搞清楚应该对参数a分类，而不是主元x.

(3) **分析** 把无理不等式转化为代数不等式是常规思路，因此想到用换元法.

令$t=\sqrt{2ax-a^2}$，则$t\geqslant 0$，且$x=\dfrac{t^2+a^2}{2a}$，原不等式化为$t^2+2at+a^2-2a>0$，即$(t+a)^2>2a$，$\therefore t>\sqrt{2a}-a$或$t<-\sqrt{2a}-a$（舍去）.

$\because t\geqslant 0$，当$\sqrt{2a}-a\geqslant 0$，即$0<a\leqslant 2$时，$x=\dfrac{t^2+a^2}{2a}>\dfrac{(\sqrt{2a}-a)^2+a^2}{2a}=1+a-$