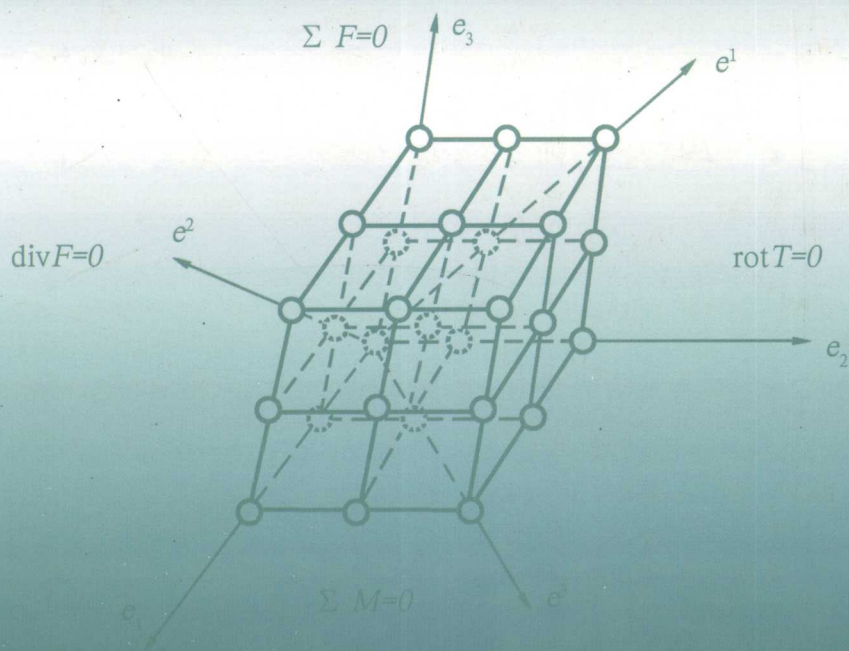


广义勾股定理及应用

谷安海 著



中南大学出版社

THE GENERAL PYTHAGOREANS THEOREM & ITS APPLICATION

广义勾股定理及应用

谷安海 著

Gu An Hai

江苏工业学院图书馆
藏书章

中南大学出版社

Center South University Press

广义勾股定理及应用

谷安海 著

☐责任编辑 邓立荣

☐出版发行 中南大学出版社

社址:长沙市麓山南路 邮编:410083

发行科电话:0731-8876770 传真:0731-8710482

电子邮件:csucbs @ public. cs. hn. cn

☐经 销 湖南省新华书店

☐印 装 湖南省地质测绘印刷厂

☐开 本 787×960 1/16 ☐印张 6.5 ☐字数 107 千字

☐版 次 2003 年 9 月第 1 版 ☐2003 年 9 月第 1 次印刷

☐书 号 ISBN 7-81061-726-5/O · 041

☐定 价 15.00 元

图书出现印装问题,请与经销商调换

自序

本书论述的内容是严谨的力学和数学,在写作时力求简明准确、由浅入深,以便主要论点具有初中文化程度的读者能看得懂,而全部内容具有大学文化程度的读者可以看明白。

当旋转机器转子做动平衡试验时,借助旋转标架(可移、转、变的坐标轴简称标架)和动平衡方法研究了三角形内角和边的关系,意外地得到了一种新的三角形内角的度量方法,从而导致用代数式的方法计算任意三角形内角和边的关系式的成立。这就是本书所要叙述的主要内容之一。

大家都知道:勾三股四弦五在我国已有两三千年历史了,这可以说是最早的勾股定理模式了。于此前后希腊人毕达哥拉斯(Pythagoreans)及其学派得到了直角三角形的两直角边的平方的和等于斜边平方的模式,并可能做出了合法的证明已有2500多年的历史了,直至今天这仍然是勾股定理代数模式的基础。

古老的勾股定理之所以年轻,就在于它至今仍活跃在我们中间,显示出强大的生命力。它的产生始终与丈量土地、构筑城池、修建屋宇、研究天文、制作工具等实践活动相联系着,它并非是空想出来的,而是千百年来通过千百万人的实践经验积累起来的结果。但是时代不同了,随着科学的飞速发展,技术的日益进步,与科学技术有着千丝万缕联系的勾股定理也应当向前发展。然而时至今日,勾股定理在向任意三角形推广的过程中却要借助余弦函数,而余弦函数是超越函数,这就大大地冲淡了勾股定理用代数式运算的意义。本书在把勾股定理向任意三角形推广的过程中引进一个代数因子替换了余弦函数,然而这不是数学游戏!在仿照勾股定理的代数模式整理以后就得到一个适应于任意三角形边角关系的代数式,于是就称它为广义勾股定理。

2000多年来广义勾股定理能突破正交的界限,可以说是勾股定

理的一次大飞跃。然而,定理的产生毕竟是需要理论上的证明才能使人信服,勾股定理已经有了 370 多种不同的证法,而对广义勾股定理,本书做出了五种从初等数学到高等数学的不同程度、不同方法的证明,更多的证法有待读者去发现和证明了。广义勾股定理对科学技术发展将起多大作用,目前还说不清楚,但应指出:在力学方面这个来源于机械振动学的定理对连续介质力学中由位移函数的九个偏导数可逆表达 Cauchy 应变六方程、著名的 Cauchy 运动定律、在空间给定点上形变几何学的完全表示以及弹性体有限变形理论的完善方面已经起了应有的作用。在数学方面对建立平面斜交、空间三斜可变坐标、逆协坐标变换、充实广义的非对称阵、几何图形运算、无理数分析、微导数以及在矢量场中散度(Divergence)和旋度(Rotation Group)的表示方法等方面都将产生一定影响。在技术方面还可能对图像分析、微宏观测量、高层结构运算、多杆机构的研究等方面都有所应用。

广义勾股定理是笔者于 1987 年提出来的,得到了著名科学家钱伟长老先生的认可,并推荐到《应用数学与力学》上得以发表。

本书是一本应用面广的科技著作,适应于大、中专院校师生,科技人员,以及广大科技知识爱好者学习阅读。书中所述内容除几个主要论证外,大都是处在研发中的事物,某些可能尚未完善,不当之处在所难免,欢迎指正。

作者 1995 年 5 月 18 日于郑州

【部分具有双重以上意义记号的说明】

e :表示形角系数,坐标基矢量,或自然对数。

π :表示形角系数,圆周率,或角度。

ρ :表示形角系数,或密度。

σ :表示张应力,或应变张量。

τ :表示剪应力,剪应变张量,或三角形两邻边的比值。

$\Phi, (\Phi)$ 及 $\Psi, (\psi)$:分别表示两种不同的变换函数,或压缩系数。

θ :表示角度,或体积压缩系数。

λ :表示常数,或压缩系数。

ω :表示角度,或角速率。

Ω :表示一个域,或一个光滑的闭曲面。

R :表示数域,平面,或空间。

M, T :表示矩阵。

A, B, C, D, Q, S :表示矩阵。

以上这些记号的出现,有时可带有相应的上、下标。

【关键词】

非正交; 失重场; 非对称; 投影群; 数模型。

前 言

众所周知,著名的勾股定理或称毕氏定理(Pythagoreans Theorem)仅适用于正交三角形。本书论述的定理不仅适用于正交三角形也适用于斜交三角形,称广义勾股定理。勾股定理简明直观地联系了数与形,是几何学的基础。它在人类生产和社会实践中所发挥的作用,如何评价也不为过。但随着时代的前进,勾股定理也应向前发展。勾股定理毕竟是数千年前丈量土地年代的产物,而广义勾股定理则是当代机器转子做动平衡试验时产生的。虽然广义勾股定理无意,也不能替代勾股定理简明、直观、基础的作用,但在斜交坐标系中(包括正交),它确实包含了勾股定理的一切内容。这就是时代在前进,科技在发展的必然结果。

本书第1章叙述广义勾股定理在离心力场中用机器转子做动平衡试验时怎样产生的,以及它的力学意义和应用。这是定理的第一种证明方法,也是最重要的证明方法。本章是用动力学观点写的,具有高中文化程度的读者可以阅读。第2章叙述在给定三角形中,内角且仅指三角形内角的一种新的度量方法的概念,以及如何借助余弦定律推证该定理的。为加深对新概念,新定理的认识,又用了近乎繁琐的例题做了说明。这是本定理的第二种证明方法,其内容具有初中文化程度的读者可以阅读。前两章除特例外,不建议在校的初、高中学生阅读,因与中考、高考命题无关。从第3章开始到第9章,引进活动坐标轴(简称标架),给出逆变坐标与协变坐标的关系式;解释了点在三维矢量空间中具有三个逆变坐标及三个协变坐标的意义,亦即具有6个坐标的概念,这就为建立了非正交坐标体系奠定了基础;用位移函数的9个偏导数互逆表达Cauchy应变六方程,从而完善了在空间给定点上变形的几何表示;给出了非对称双线性,充实了广义的非对称

阵的概念,用力平衡及力偶平衡的条件,推导出空间力系应变张量的非对称阵 M 及其 15 个待定元的解;在完善 Cauchy 运动定律过程中,在失重条件下得到连续介质物态散度等于零($\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0$)和旋度等于零($\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} = 0$)的论断;借此又得到空间力系牵引力张量的非对称阵 T ,但知其 15 个待定元的通解——多元高次(非整次幂)无理方程具有无穷多个解,其解算是很难的。只有在特定的边界条件下,求得稳定的特解才是可能的。最后指明,上述两种不同的广义的非对称张量阵 M 及 T 与弹性结构大变形有关,其解算(见例题 12 至例题 16)必须应用广义勾股定理。广义勾股定理产生后,又经过每分钟 11230 转的六级透平压缩机转子做动平衡实验和机组运行的试验,这些都是实用的。第 10 章简要介绍了形角系数与微导数的关系,但尚未开发。

总之,书中讨论的一切都是运动的和变动的,这种运动和变动包括平移和旋转。空间不一定是正交的,点不一定是固定的,即使点位已定,点向仍可转动。 n 维矢量空间,如果没有 $2n$ 个坐标的限制,点的定位、定向是不可能的,换句话说,点是固定不了的。这是一个有待深入开发的领域,在那里大有作为。

本书主要论点具有初中文化程度的读者能看得懂,而全部内容具有大学文化程度的读者可以看明白,因此是一本应用面广的科技著作,适合于大、中专院校师生、科技人员,以及广大科技知识爱好者阅读。建议有关专业大学生阅读,共同探讨研究,开发应用。

书中论点的起萌初期尽管尚有不足,但还是得到原东北工学院(今东北大学)副院长苏士权教授的支持,得以在《东北工学院学报》上发表。广义勾股定理的问世,曾得到全国政协副主席、著名科学家钱伟长先生的支持,得以在《应用数学和力学》1987 年第 12 期上发表;关于失重场中连续介质物态的旋度 $\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} = 0$ 等价于其广义非对称张量阵 $\det T = 0$ 的论断,曾得到兰州大学校长、中国科学院院士、著名的数学力学家叶开沅教授的推荐,得以在《应用数学和力学》1992 年第 13 卷第 11 期上发表;而广义非对称张量阵 T 待定元的数值特解

——高次(非整次幂)无理方程解的数值计算,曾得到美国 ANSYS 有限公司上海办事处咨询专家谷安涛顾问的帮助;该书的出版发行,得到了中南大学出版社的支持和帮助。如果没有以上各位专家、学者的支持和帮助,该定理的问世是无望的,此书的出版也是不可能的。在此深表谢意。

作 者

2002 年 9 月 30 日于深圳

目 录

概 述	(1)
第1章 定理是怎么发现的	(2)
I 定理发现的理论基础	(2)
II 定理的推导方法	(4)
III 定理在平衡技术上的应用	(5)
第2章 定理的初等证明和典型例题	(10)
I 定理的初等证明	(10)
II 典型例题	(12)
III 讨论和结语	(14)
第3章 定理的第三种证明方法和例题	(15)
I 定理在 n 维空间中的证明	(15)
II 定理的几何解释和例题	(18)
第4章 定理的第四种证明方法及其在 n 维空间中的行为	(22)
I 引言	(22)
II 预备知识	(23)
III 定理的证明	(25)
IV 定理在抽象空间中的行为	(26)
第5章 定理的第五种证明方法及讨论	(29)
I 引言和记号	(29)
II 预备知识	(30)
III 定理的证明	(32)
IV 讨论	(33)
第6章 形角系数在几何形体中的行为	(34)
I 预备知识	(34)
II 形角系数和三角函数的基本关系	(36)
III 形角系数和三角函数的诱导关系	(40)
IV 逆协混合坐标基空间夹角的表示	(46)
第7章 三斜对偶坐标系的理论基础	(47)
I 仿射坐标系的定义和记号	(47)

II	投影几何的概述	(49)
III	预备知识	(50)
IV	主要结果	(53)
V	闭曲面上的切面及剖面的法向记号	(55)
第8章	静态弹性应变张量及其力学模型的数值计算方法	(56)
I	静态弹性应变张量的推导	(56)
II	主要结果	(62)
III	应变张量的力学模型及其数值计算方法	(63)
第9章	动态弹性(连续介质)牵引力张量及其力学模型的 数值计算方法	(70)
I	动态平衡的充要条件	(70)
II	动态牵引力张量的推导	(71)
III	讨论和结语	(77)
IV	牵引力张量的力学模型及其数值计算方法	(78)
第10章	形角系数与微导数的关系	(87)
参考文献		(89)

概 述

众所周知,一个古老而又年轻的勾股定理或称毕达哥拉斯定理(Pythagoreans Theorem)仅适用于直角三角形边角关系的解算,不适用于任意三角形边角关系的解算。把勾股定理推广到适用于非直角三角形边角关系的解算,或者说用勾股定理的模式和比较简单的代数方法用于任意三角形边角关系的解算,不仅是必要的而且是可能的。但这个问题至今没有得到妥善解决,本书所要解决的就是这个问题。

除拓扑学中的某些三角剖分外,几乎任一几何形体的包络面都可以进行三角剖分的。因此,一般地说在单连通域中几何形体的元是三角形也不算离谱。而三角剖分的随机性又不一定产生正交三角形,所以任意三角形边角关系的解算就显得十分重要了。为了把任意三角形边角关系解算的几何学问题,限制在用纯代数方法进行运算,就需要引进某种形式的代数因子。而该代数因子不仅具有几何学意义,而且具有力学意义。

在研究几何学问题时大家都知道,角的度量是用弧度 π 或角度 $^{\circ}$ 来定义的。而为了满足以上所说的,具有几何学意义的代数因子的需要,则三角形的内角(且仅指三角形的内角)的度量不仅用弧度 π 或角度 $^{\circ}$ 来定义以外,还应当有另外的度量方法。这种另外的三角形内角的度量方法并不是空想出来的,而是机器转子在离心力场中做动平衡试验时自然产生出来的。但它的产生就自然地导致了广义勾股定理的问世。

第1章 定理是怎么发现的

I 定理发现的理论基础

一般地说,任何一个旋转机器的转子都极难达到绝对平衡,转子的不平衡就造成了机器的振动。为提高机器的运行品质,降低机器振动,寻找转子的不平衡量并使其降低到某一限值以内就是机械工程师们经常碰到的实际问题。在解决这一问题的手段和方法上,工业技术界已经有了各种平衡机器的出现和各种找转子不平衡量的方法在使用着,但至今仍在不断发展中。在从事转子平衡技术研究时注意到:当寻找高速旋转圆盘不平衡量的过程中用 Den Hartog 图解计算值单面两点法求不平衡量的值是对头的,但其结果是不够精确的^[1]。要得到较精确的数值解答,就必须用数值计算代替图解计算值。而在图解计算值更新为数值计算的过程中,一个具有力学意义的比值就恰巧是以上所说的代数因子。为简捷说明问题,首先考虑具有一个

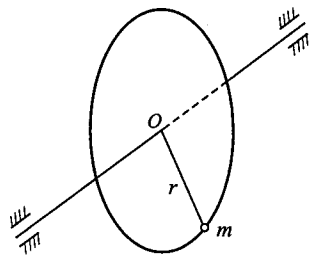


图1 高速旋转圆盘

自由度的高速旋转圆盘(图1),待把它推广到具有两个自由度的高速旋转细长转子时可参见文献^[2],本书不再详述。

从应用力学观点来看,平衡技术就是利用试验不平衡量求转子的原始不平衡量的值。设某一旋转圆盘存有原始偏心质量为 m_0 (g) 其偏心矢径 r_0 (cm)。若旋转角速度为 ω ,则产生的振幅 z (cm) 与其离心力 $m_0 r_0 \omega^2$ 成正比。若旋转角速度较大且不考虑圆盘的重力时,那么该圆盘在离心力场中旋转时,其振幅 z 仅与偏心质量和偏心矢径的乘积 $m_0 r_0$ 有关。因此称乘积 $m_0 r_0$ 为该圆盘的原始不平衡量。假如在该圆盘的任一相位上附加一个试验不平衡量 mx 时,其合成的不平衡量 $(m_0 r_0 + mx)$ 所产生的振幅为 z' 。那么在其逆相位上附加同一个试验不平衡量 $-mx$ 时,则其合成的不平衡量 $(m_0 r_0 - mx)$ 所产生的振幅又为 z'' 。

当 $m_0 = m = 1$, 且令 $z = r_0, z' = r_1, z'' = r_2$ 时,可参见旋转失量平衡坐标图(见

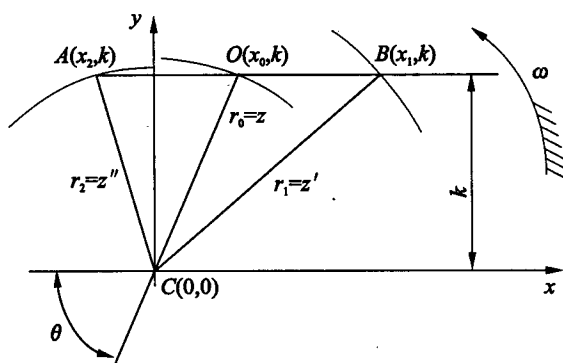


图2 振幅相对平衡矢量示意图

图2)。由于两次试验不平衡量数值相同相位相反的条件是可知的,因此当 $y=k$ (参变量) 时, 已知

$$(x_1 - x_0) = (x_0 - x_2) \quad (1.1)$$

是成立的。若

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + k^2 &= r_1^2 \\ x_2^2 + k^2 &= r_2^2 \\ x_0^2 + k^2 &= r_0^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{或} \quad \left. \begin{aligned} x_1^2 &= r_1^2 - k^2 \\ x_2^2 &= r_2^2 - k^2 \\ x_0^2 &= r_0^2 - k^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

再由图2知:

$$x_1 + x_2 = 2x_0$$

已知:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 4x_0^2 \quad (1.3)$$

(1) 求参变量 k 的表达式。把式(1.2)代入式(1.3)整理得

$$2x_1x_2 = 4r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 - 2k^2$$

平方后得等式为

$$4x_1^2x_2^2 = (4r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 - 2k^2)^2 \quad (1.4)$$

再把式(1.2)代入式(1.4)平方后整理得

$$[4r_0^2 - (r_1^2 + r_2^2)]^2 - 4r_1^2r_2^2 = 8k^2(2r_0^2 - r_1^2 - r_2^2) \quad (1.5)$$

把式(1.5)进行因子分解, 配方后可得

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \alpha) = 8k^2(\alpha\gamma + \beta\delta) \quad (1.6)$$

或

$$k = 0.25 \sqrt{\frac{2(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \alpha)}{(\alpha\gamma + \beta\delta)}} \quad (1.7)$$

式中

$$r_0 + r_1 = \alpha, r_0 + r_2 = \beta, r_0 - r_1 = \gamma, r_0 - r_2 = \delta \quad (1.7a)$$

因此可知 k 是与标架选择无关的常量。

(2) 求试验不平衡量的表达式。因不平衡量是矢量, 当设试验不平衡量为 $F = mx$ 时(试验重量的大小及相位是已知的), 而 F 所产生的振幅是未知的。所以, 令 $m_0 = m = 1$ 时, 则转子试验不平衡量 F 是可以振幅 x 来表达的, 为此仅考虑振幅 x 之值即可。

由图 2 知:

$$OA = OB = \frac{AB}{2}$$

或

$$x = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

即

$$F = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \quad (1.8)$$

但

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

而把式(1.2)、式(1.4)代入上式消去 k 则得

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= (r_1^2 - k^2) + (r_2^2 - k^2) - (4r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 - 2k^2) \\ &= 2r_1^2 + 2r_2^2 - 4r_0^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

再把式(1.9)分解整理并考虑式(1.7a)得

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= -(4r_0^2 - 2r_1^2 - 2r_2^2) \\ &= -2(r_0^2 - r_1^2 + r_0^2 - r_2^2) \\ &= -2(\alpha\gamma + \beta\delta) \end{aligned} \quad (1.9a)$$

就知 F 的表达式为

$$F = \sqrt{\frac{-(\alpha\gamma + \beta\delta)}{2}} \quad (1.10)$$

最后可知 F 也是与标架选择无关的常量。这就是定理发现的理论基础。

II 定理的推导方法

前已述及, 假如某圆盘旋转时原始不平衡量产生的振幅为 r_0 , 在任一相位上附加一个试重后产生的合成振幅为 $r_1 = a$, 而在其逆相位上附加同一个试重后产生的合成振幅为 $r_2 = b$. 令

$AB = c, BC = a, CA = b, OC = r_0, OA = OB = \Delta$ 时, (见图 3)

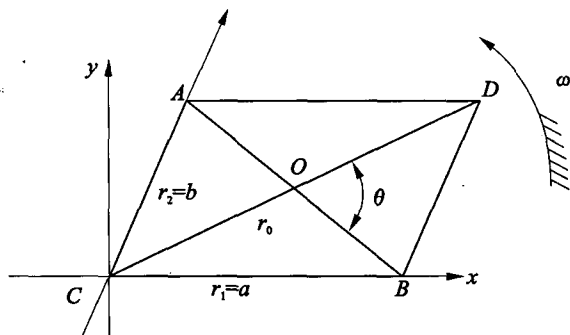


图3 旋转振幅示意矢量

即知 $r_1 = a, r_2 = b, 2\Delta = c_0$

因为 $F = x = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) = \Delta$, 且由式(1.9)知:

$$c^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2 - 4r_0^2 = 2a^2 + 2b^2 - 4r_0^2 \quad (1.11)$$

为消去 r_0 , 需要引进一个代数因子 e 。当且仅当该 e 的表达式为

$$e = \frac{r_0}{\Delta} = \frac{2r_0}{c} \quad (1.12)$$

时, 式(1.11)式变为

$$c^2 = 2a^2 + 2b^2 - e^2 c^2 \quad (1.13)$$

把式(1.13)仿照勾股定理的代数模式整理后得

$$\left. \begin{aligned} c^2 &= \varphi(a^2 + b^2) \\ \varphi &= \frac{2}{1 + e^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

式中: φ 称为变换函数, e 称为形角系数。上式就称为广义的勾股定理⁽³⁾。定理的论证方法, 本书著者推导出来后尚未发表。为了说明定理的推导并非数学游戏! 才把它的内容写进来。形角系数的力学意义就是转子的原始不平衡量与试验不平衡量的比值, 它的数学意义将论述于后。

III 定理在平衡技术上的应用

(1) 该定理的第一次应用, 恰巧就是用某厂四车间三号窑前鼓风机的转子做动平衡试验的全过程和试验的结果。该鼓风机的技术规格如下:

$Q = 6700 \text{ m}^3/\text{min}, H = 1.03 \times 10^4 \text{ Pa}, n = 1450 \text{ r/min}, N = 260 \text{ kW}$, 而其鼓风机

转子大样示意图见图4。

试验方法详见文献^[2]。其试验数据的计算请参见图2,作为例题7已引入本书第6章。该机转子于1981年12月18日做动平衡试验后,即投入运行。参加试验者还有该分厂机动科长于杰工程师和电修分厂技师李志奇师傅。在数据整理过程中,发现了形角系数,后于1982年春节广义勾股定理正式确立,于1987年12月广义勾股定理公开发表。

(2)为了进一步验证该广义勾股定理在找机器转子动平衡时的迅速性和可靠性,再引进高速机器转子动平衡验证性的实验数据,以供参考。现选用某厂一号空压站四号透平压缩机的转子做动平衡试验,该机技术规格如下:

$Q = 250 \text{ m}^3/\text{min}$, $H = (1 \sim 9) \times 10^5 \text{ Pa}$, $n = 11230 \text{ r/min}$, $N = 1500 \text{ kW}$, $W = 360 \text{ kg}$ (转子净重),其六级透平压缩机转子大样图见图5,而其柔性转子共振试验台示意图见图6。

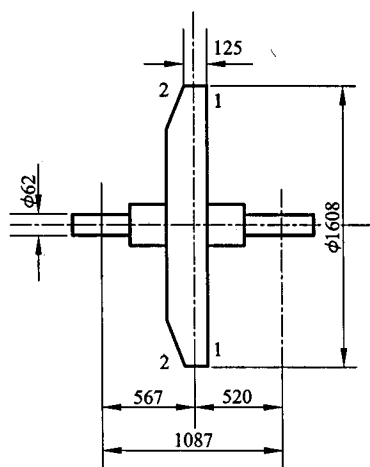


图4 鼓风机转子

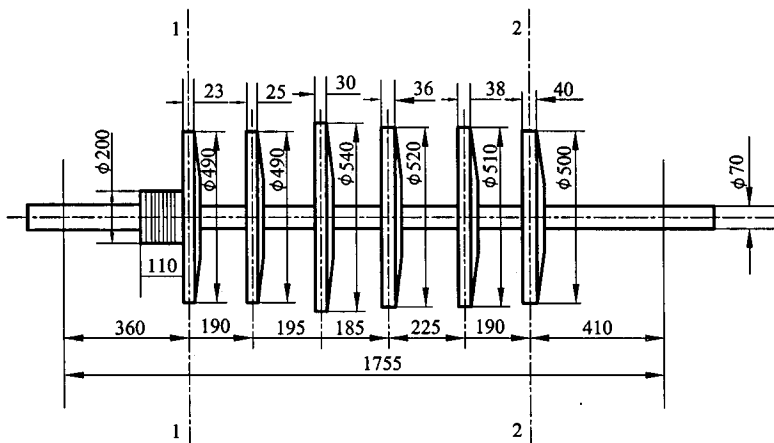


图5 六级透平压缩机转子

该机为六级透平压缩机,一般该机转子做动平衡试验时,要经过多次试校,有时颇费周折,延误时日。但用该定理给出的方法做动平衡试验时,仅用一次试验,读取三组数据,即可运算出不平衡量的向角及量值。再用上述结果,调整转