级数的截断误差与割离井法的计算机实现

JISHUDEJIEDUANWUCHA

GELI JINGFA DE JISUANJI SHIXIAN

常安定 著

西安地图出版社

级数的截断误差与割离并法的计算机实现

常安定 著

西安地图出版社

内容提要

本书对非稳定渗流割离井法计算机求解进行了系统的研究，对级数计算机求解时的截断误差从数学上进行了分析研究，并对割离井法各计算公式的截断误差从数学上进行了研究，通过编程将割离井法进行了计算机实现，最后，本书给出了利用割离井法公式反求水文地质参数的一些方法。

本书可作为地下水、热传导、地质专业研究生和教师使用，也可作为数学专业的教师和学生参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

级数的截断误差与割离井法的计算机实现/常安定著.
—西安:西安地图出版社，2003.8
ISBN 7-80670-436-1

Ⅰ.级...　Ⅱ.常...　Ⅲ.①级数-误差-计算方法②地下水-渗流-水力计算:计算机辅助计算
Ⅳ.①O173②P641.2-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 066745 号

级数的截断误差与割离井法的计算机实现

常安定 著

西安地图出版社出版发行
(西安市友谊东路 334 号　邮政编码:710054)
新华书店经销　长安大学雁塔印刷厂印刷
850 毫米×1168 毫米·1/32　6.25 印张　180 千字
2003 年 9 月第 1 版　2003 年 9 月第 1 次印刷
印数:0001-1000
ISBN 7-80670-436-1/P·12
定价:20.00 元

序

对常安定博士新作《级数的截断误差与割离井法的计算机实现》的出版,我表示由衷的祝贺和感激之情。祝贺他的成功!感激他使我提出的割离井渗流得到继承和发展。

地下水非稳定井流计算割离井法提出的历史背景是对驰名的泰斯公式的持疑。泰斯公式问世于1935年,它的理论基础是弹性释放学说,也就是认为:从含水层中抽出的水是由于减压而产生的水体膨胀,而且这种弹性释放被假设是瞬时完成的……。实践和理论均可证明:地下水的弹性释放学说是与事物的本质严重相悖的,因此,泰斯公式的应用具有很大的局限性,尤其不宜应用于非承压地下水,其中包括广泛被开发利用的地下潜水的井流计算。

为了解决上述难题,在苏联攻读副博士期间,我在导师П.П.克里门托夫和H.A普鲁特尼科夫的指导下,依据疏干理论研究出地下水非稳定井流计算的割离井法,建立了针对不同水文地质条件和工作方式的系列公式,或者说建立了地下水向井孔渗流的系列数学模型。并于1991年由科学出版社出版了拙著《地下水非稳定渗流解析法》,书中比较全面的论述了割离井法及其数理基础,介绍了部分模型求解的辅助图表和算例,旨在尽快的将研究成果用于实际。

但是,由于这些公式的数学表达式比较繁难,不仅包含着特殊函数,而且级数中又包含了级数,从而使割离井法的推广应用受到了很大限制。为求得新的突破,我便商请几位研究生从事割离井法的深化研究。为了适应时代的节拍,他(她)们的研究重点放在方法的“计算机实现上”。先后从事过这个方面研究的有魏晓妹博士、张艳杰博士和曹树堂硕士,他(她)们都有了很好的成就。而常安定同志的研究不仅借鉴了前人的工作,而且他以自己深厚的数学功底、忘我的钻

研精神和冷静的创造性思维,在计算机和计算技术飞速发展了的今天,使割离井法的计算机实现研究从数学理论到求解过程得到了进一步的深化和发展!如果可作对比的话,在本书中反映的研究成果,就其计算功能和先进性而言已经超过了前人围绕泰斯公式的推广应用所进行的有关工作。

常安定同志的著作,还丰富了数学宝库,特别是在级数的应用领域。

可以相信,由于该书的问世,割离井法将获得健康的发展和应用,将会以中国人的名义充实地下水科学宝库,推进渗流科学的发展!

李佩成

2003年8月

前言

我长期从事高等数学教学,但自己很想把数学知识用于工程方面的科学研究,一则让数学服务于实际,二则促进教学质量的提高。这种愿望在我攻读博士学位时实现了,我在博士生导师李佩成教授的指导下,选择了地下水非稳定渗流计算,割离井法的计算机实现及水文地质参数的快速测求为研究内容,花了将近四年的时间完成了学位论文《非稳渗流割离井法求解的计算机实现及快捷求参研究》,本书即是在该论文的基础上充实修改而成的。

地下水是十分重要的水资源,也是重要的环境因子,尤其是面大量广与地面水和深层地下水处于积极交换状态的地下潜水,应当得到特别的研究和关注。但是,长时期内,潜水向井孔的非稳定运动,缺乏可信的计算理论和公式,尽管井孔是提取、排除和勘探地下水的主要建筑物。针对生产实际的需要,在20世纪60年代,李佩成教授提出了潜水井群计算的割离井法,推演出对应典型水文地质条件的13种井孔渗流计算的数学模型。这些模型都是一些由不同类的圆柱函数或其它函数构成的无穷级数。因此,模型的解析求解是比较繁难的,影响了割离井系列模型的推广和应用。因此,李佩成教授早在80年代便提出了利用计算机实现求解的设想。

利用计算机实现割离井法的求解必须解决几个数学难题,首先要使计算机能够识别连续运算,这就需要对原公式进行数学的渐近处理,恰当选择公式中特殊函数等的渐近式,在使用渐近式之后又必须解决截断误差的评判问题,还要保证精度达到工程的要求。当然,良好的编程也是重要的研究内容。参考魏晓妹、张艳杰、卢玉东博士及曹树堂硕士的研究成果,本书介绍的研究内容,主要集中在上述的数学问题。同时参考雅可布、周文德等学者对泰斯公式进行的简化

前言

思路，作者对割离井法中的部分公式也作了类似研究。

全书共分六章，第一章主要介绍研究对象；第二章对割离井法计算机求解过程中的基础理论和方法进行阐述，也对公式中的超越方程的求解进行详细讨论；第三章给出了确定一般级数截断误差的估计方法；第四章割离井法计算公式截断误差的确定，为割离井法的计算机实现在理论上作了准备；第五章对割离井法的各公式进行编程，形成计算软件，并用实例分析验证；第六章介绍用割离井法公式求水文地质参数的方法。这些内容以割离井法计算机实现为主线，将应用数学、渗流计算及计算机编程有机的联系起来。

本书的出版，是想为地下水的开发利用事业，为渗流科学殿堂添砖增瓦，但因自己的知识特别是跨学科的知识所限，错误在所难免，敬请批评指正。使我十分欣慰的是通过上述研究和本书的出版，增加我对教学服务于工程实践的信心和决心，也提高和丰富了教学内容。为此，我要感谢我的导师李佩成教授的悉心指导，在本书中包含了李佩成教授丰富的思想，凝聚了他的大量心血。

作者也要感谢魏晓妹教授、张艳杰、卢玉东博士和曹树堂硕士，她(他)们围绕割离井法进行的研究工作，大大的启发和帮助了我。

趁本书出版之际，我还要十分感谢党新益教授、袁志发教授，他们从数学上为我的博士论文也就是为本书把关；感谢王强忠教授、王文科教授、钱惠教授，他们从渗流理论角度审查了我的论文。

我应当感谢的人很多，由于篇幅，我将把对他们的感激之情永远的铭记在心！

常安定

2003 年夏于长安大学

目录

目录

目录

目录

第1章

非稳定渗流割离井法及公式

1.1 地下水非稳定井流研究的历史与现状

水是人们赖以生存及从事生产活动不可缺少的宝贵资源。地下水是水资源的重要组成部分，由于其水质好、分布广、抗旱能力强，往往是更为可贵的供水水源，而在干旱、半干旱地区，则是主要的、有时甚至是惟一可用水源，从人们的日常生活到发展农业、工业，以至国防建设，都用到地下水。

井是提取、排除和开发利用地下水的最主要建筑物，地下水向抽水井或排水井孔的运动常常表现为明显的非稳定井流特征。在地下水的开发利用中，不论进行水井布局规划与结构设计、水文地质参数测定、井群干扰计算、地下水资源评价，还是进行水井的合理设计等，都需进行地下水动力学计算，尤其是需要进行地下水的非稳定井流计算。

地下水非稳定井流理论的发展经历了一个漫长的过程，它是随着人们对地下水开发利用强度、规模的日益加大而逐渐发展和深化的[23,111,112]。

1856 年，法国工程师达西(H. Darcy)通过砂柱中水的渗透实验，提出了水在多孔介质中的渗透定律——达西定理，揭开了地下水渗流研究工作的序幕，为定量研究地下水水流运动奠定了基础；随后另一位法国水力学家裘布衣(J. Dupuit)于 1863 年以达西定律为基础，

推导出了水流向井孔运动的稳定井流公式,即著名的裘布衣公式,奠定了稳定流的理论基础[7];1904 年,布西尼斯克(Boussinesq)利用水量平衡原理提出了潜水非稳定流偏微分方程,即著名的布西尼斯克方程或地下水非稳定渗流运动基本方程。

假定潜水含水层骨架不可压缩,水是均质、等温、且不可压缩的,不考虑滞后释水效应,则有上部入渗补给的潜水含水层中非稳定渗流的微分方程为

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[T\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[T\frac{\partial H}{\partial y}\right]+w \tag{1-1}$$

式中:H 为潜水含水层中的地下水水位,量纲$[L]$(注:以不透水底板上部作为基准面);$T=KH$ 为含水层的导水系数,量纲$[L^2T^{-1}]$;K 为渗透系数,量纲$[LT^{-1}]$;μ 为给水度,无量纲;x、y 为笛卡儿直角坐标,量纲$[L]$;t 为时间,量纲$[T]$;w 为入渗补给强度,量纲$[LT^{-1}]$。

式(1-1)也称为布西尼斯克方程。该方程是一个非线性偏微分方程,目前尚难精确求解,因此在实际应用时,除了用数值方法外,通常采用线性化方法近似地将它变成一个线性偏微分方程来求解。最常见的线性化方法是[6,14]:在一定的时间和空间内取导水系数 T 的平均值,并把它视为常数,因而常说的 T 为常数,实际上便是把计算时段内的潜水含水层的厚度(此时,将水位与厚度看成一个概念)取平均值,并在计算时段内将其看成常数。设:

$$\alpha=\frac{T}{\mu}=\frac{KH_p}{\mu} \tag{1-2}$$

式中:α 为水位传导系数,量纲$[L^2T^{-1}]$;H_p 为含水层平均厚度,量纲$[L]$;此时式(1-1)变为:

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\alpha\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right]+\frac{w}{\mu} \tag{1-3}$$

若无入渗发生,即 $w=0$,则式(1-3)中不含附加项$\frac{w}{\mu}$,若无入渗而需考虑蒸发损失 ε,则附加项变为$\frac{\varepsilon}{\mu}$,且取负号。

地下水向井孔运动呈辐射状流，使用圆柱坐标更为方便，即对式(1-3)采用坐标变换：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{1-4}$$

式(1-3)变为[6],[7]：

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \alpha\left[\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right] + \frac{w}{\mu} \tag{1-5}$$

当承压含水层中发生非稳定渗流，一般认为是由岩层以及水的弹性体积变化引起的，可得到其渗流方程。如上、下均有弱透水层补给的承压含水层中井孔的非稳定渗流的微分方程为：

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \alpha_t\left[\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right] + K_t\frac{H_s - H}{M_s\mu_t} + K_t\frac{H_x - H}{M_x\mu_t} \tag{1-6}$$

式中：H 为主含水层水位，量纲[L]；r 为考察点距主井的距离，量纲[L]；t 为时间，量纲[T]；M 为主含水层厚度，量纲[L]；μ_t 为主含水层弹性释水系数，无量纲；K_t 为主含水层渗透系数，量纲[LT^{-1}]；α_t 为压力传导系数，量纲[L^2T^{-1}]；H_s、H_x 为上、下弱透水层的水头，量纲[L]；K_s、K_x 为上、下弱透水层的渗透系数，量纲[LT^{-1}]；M_s、M_x 为上、下弱透水层的厚度，量纲[L]。

若无越流补给，则式(1-6)变为：

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \alpha_t\left[\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right] \tag{1-7}$$

1935 年，泰斯(C. V. Theis)首先提出了非稳定井流计算公式[97]，促进了地下水非稳定井流理论的发展。

泰斯公式建立的前提假定井孔的直径很小，含水层十分广阔，抽水井为完整井，抽水期间井的出水量是固定的(Q 为常数)，岩体和水都具有弹性，包含在含水层中的水随着水头压力的降低而瞬时释放，含水层起始水位是水平的，顶板、底板可以认为是绝对不透水的，在此条件下，含水层中水位降深公式为：

$$S = \frac{Q}{4\pi T}W(u) = \frac{0.08Q}{T}W(u)$$

式中：$T=KM,\alpha=\dfrac{KM}{\mu_t}$；$W(u)$被称为井函数，$W(u)=-0.5772-\ln u+u-\dfrac{u^2}{2\cdot 2!}+\dfrac{u^3}{3\cdot 3!}+\dfrac{u^4}{4\cdot 4!}+\cdots\cdots$；$u=\dfrac{r^2}{4at}$；$M$ 为含水层厚度，量纲 L；α 为压力传导系数，量纲 L^2T^{-1}；Q 为井出水量，量纲 L^3T^{-1}。

1940 年，雅可布(C. E. Jacob)进一步论述了承压含水层弹性释水理论[117]；1954 年，博尔顿(N. S. Boulton)提出了重力疏干给水理论[87]，并发表了潜水非稳定井流第一公式；1955 年，汉图什(M. S. Hanstush)和雅可布提出越流承压含水层的越流理论，进一步发展了非稳定井流理论[98]；1959 年，汉图什提出了定降深非稳定井流公式；1963 年，博尔顿提出了滞后给水理论[99,87,88]，并发表了潜水非稳定井流第二公式，进一步改进了潜水非稳定井流理论；1964 年，汉图什提出了考虑弱透水层释水的非稳定井流计算公式[90]；1967 年，帕多布洛斯(I. S. Papadoubulos)提出了考虑抽水井容量(井筒存水量)的非稳定井流抽水公式；1969 年，纽曼(S. P. Neuman)和威瑟斯庞(P. A. Witherspoon)提出了双层承压含水层，越流含水层水流通用理论，1971 年，又提出了有限元法求解自由水面非稳定流分析理论[113]；之后，随着计算机应用和信息技术的发展，地下水渗流的数值计算方法和模拟求解方法得到了很大的发展[91,92]。

地下水非稳定流研究发展到现阶段表现出如下主要特点：

(1)提出并进一步完善与地下水资源评价密切相关的渗流计算方法。

(2)广泛引用石油渗流力学及热传导理论等其他学科领域的成就，研究和解决地下水非稳定流的相关问题。

(3)发展了水文地质数值计算方法及计算机数值模拟技术，用线性问题逼近非线性问题，使非线性和变系数方程的计算求解变为可能。

(4)地下水弥散理论、非饱和带的水分运动理论有了新的发展。

这些巨大的发展使地下水非稳定井流研究成为众多研究领域中的十分活跃的学科。

我国虽然是世界上凿井取水最早的国家之一,但是对地下水进行大量而系统的研究还是从1949年建国以后开始的;在20世纪50年代初期,主要是从苏联引进稳定流抽水试验的理论、方法、规程等;但是,随着水文地质勘探工作的广泛深入开展,发现所引进的方法并不能完全解决生产中出现的问题,为此,我国的水文地质工作者做出了积极的努力;经过多年的实践和研究,在应用数值法求解地下水非稳定流渗流问题、多层介质的渗流计算、水动力弥散理论和实验方法及地下水水质模型研究以及发展井流理论等方面做出了重大的贡献。其中,张蔚榛教授在地下水与土壤水渗流理论[15]等方面,毛昶熙教授在工程渗流理论及计算方面[121],薛禹群、朱学愚、罗焕炎、陈崇希等教授在地下水井流力学及数值计算方面[75,16]都做出了非常突出的贡献。李佩成教授在潜水非稳定渗流理论及解析求解方面做出了贡献。由于我国众学者的创造性的劳动,遂使我国在渗流研究领域从整体上跨入了世界研究的先进行列。

虽然数值法适应于求解条件比较复杂的问题,是进行区域地下水开采资源评价的一种有效方法,也为地下水渗流计算做出了不少贡献,然而亦存在一些问题。应用数值法求解地下水渗流的定解问题仅仅是给出了研究区域中离散点的水头值,并且对井孔附近的水位计算容易产生较大误差,而解析法因其理论的严密性,直接反映渗流机理,计算公式的物理概念清晰,能够获得精确解等特点,在国内外仍得到广泛的应用,且随着计算机的普及,解析法的大量手工计算逐渐由计算机来实现,这进一步推动了解析法的广泛使用。

综上所述,由20世纪30年代发展起来的非稳定渗流理论,随着生产力的发展,其研究的深度不断增加,解决实际问题的范围越来越广泛,且采用的技术越来越先进,使地下水渗流计算理论与方法的研究焕发出无穷的活力。

1.2　割离井法理论基础及数学模型

如前所述,虽然地下水非稳定井流理论得到了很大发展,但在二十世纪五六十年代还主要是泰斯公式及其相应的弹性释水理论,在实际应用中存在不少问题,尤其不适宜潜水含水层的井流计算,首先因为抽水时潜水井的出水量主要来源于含水层的疏干,难以满足泰斯公式弹性释放的假使条件[29]。

为了寻求适宜于潜水井,特别是排灌井群的潜水井非稳定井流计算公式,李佩成教授经过多年的实践与研究,于 1964 年提出了潜水非稳定井流计算的割离井法[1,2],简称为"割离井法",推演出针对不同水文地质条件和运行条件的系列非稳定井流数学模型,对地下水非稳定井流研究做出了重要贡献。但是这些模型和公式比较复杂,阻碍了它的推广和应用。

为了克服应用的困难,并将割离井法推广于实际,他和他的部分学生进行了卓有成效的研究工作。本书的工作是将这些研究理论化、系统化和实用化,使中国人的创造成功的得到推广和应用。

所谓"割离井",主要是指处于不透水或者隔水圆形边界的单井,位于圆形隔水边界中。上述的隔水边界,对"割离井"而言,可能是实际存在的,也可能是从渗流力学分析中概化而来的。

对于实际存在的"割离井"及圆形隔水边界的"割离井"是容易理解的。这里简要介绍如何通过渗流力学的分析而抽象概化出来的"割离井"[4,3,13,23]。

如图 1-1 所示,甲井、乙井是从均布井群中分离出来的两个相邻的井。在井群中各井孔工作条件相同的情况下,随着抽水时间的延续,浸润漏斗不断伸展,致使相邻井的水位降落曲线相接,并在相接处出现分水岭,在分水岭断面 AB 处的水力坡度为零,用数学表达式则为:

$$\left.\frac{\partial H}{\partial r}\right|_{r=R_0}=0 \tag{1-8}$$