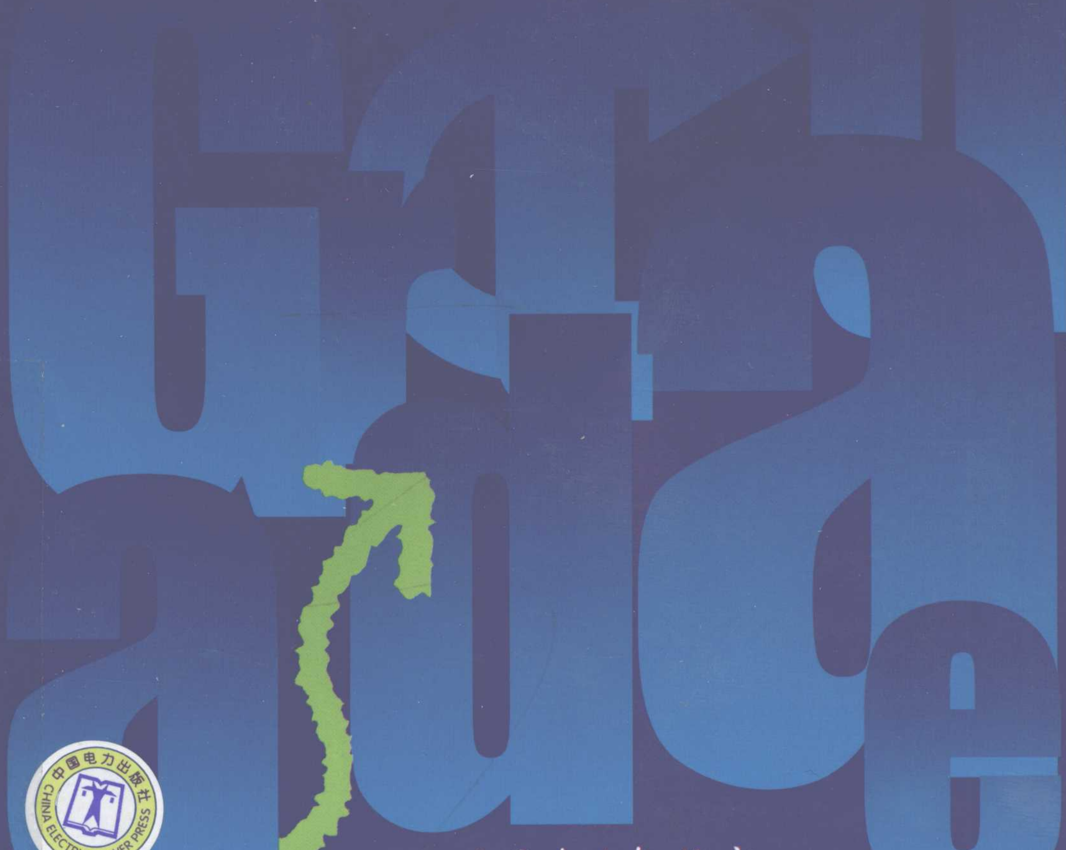
研究生教材
YANJIUSHENG JIAOCAI

矩阵理论及其应用

邱启荣　主编



中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

研究生教材
YANJIUSHENG JIAOCAI

矩阵理论及其应用

主　编　邱启荣
编　写　徐英凯　孙淑珍　李国东
主　审　朱来义

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书对矩阵理论的基础知识作了详细的介绍，同时结合使用 Matlab 软件解决矩阵论有关内容的计算问题。全书分为八章，内容包括线性空间、线性变换、Jordan 标准形、向量与矩阵的范数、矩阵分析、矩阵函数及其应用、矩阵的分解、广义逆矩阵。本书内容资料丰富、论述详尽严谨、文字通俗易懂、便于自学。

本书可作为理工科院校硕士研究生矩阵理论课程的教材，还可作为学习矩阵理论人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

矩阵理论及其应用/邱启荣主编. —北京：中国电力出版社，2008

研究生教材

ISBN 978-7-5083-7626-4

Ⅰ. 矩… Ⅱ. 邱… Ⅲ. 矩阵—理论—研究生—教材 Ⅳ. O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 091857 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号 100044 http://jc.cepp.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2008 年 7 月第一版 2008 年 7 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 12.25 印张 297 千字

定价 **19.60** 元

前　言

矩阵理论既是学习经典数学的基础，又是一门最有实用价值的数学理论。它不仅是数学的一个重要的分支，而且业已成为现代各科技领域处理大量有限维空间形式与数量关系的强有力的工具。特别是计算机的广泛应用，为矩阵论的应用开辟了广阔的前景。例如，数值计算、优化方法及稳定性理论等，都与矩阵论有着密切的联系，从而使矩阵理论近年来在内容上有相当大的更新，非现有教科书所能概括的。《矩阵理论及其应用》是工科院校硕士研究生重要的学位课程，我们根据各学科研究生学习和科研的需要，结合多年的教学经验，以读者熟悉的线性代数为基础，结合 Matlab 软件应用，编出此书。

本书是编者在原教材《矩阵理论及其应用》（中国电力出版社出版，2003 年）基础上改编的，书中的大部分内容在原教材中都有。本书在兼顾矩阵理论讨论的同时，注重矩阵理论应用的讨论，加强了与线性代数有关内容的衔接，使读者更容易理解和掌握，同时为弥补现有矩阵论教材应用实例较少的不足，重新配置例题与习题，增加了使用 Matlab 软件解决在矩阵论有关内容中的计算问题的内容，适当增加了一些有关的应用实例。

全书分为八章。其中：第一、二章由徐英凯编写；第三、六章由邱启荣编写；第四、五章由孙淑珍编写；第七、八章由李国东编写。全书由邱启荣统稿并担任主编。由朱来义担任主审。

本书的编写力求做到资料丰富、论述详尽严谨、文字通俗易懂，便于自学；尽可能满足不同专业工科及理科研究生学习的需要。全书内容充实，不同专业的研究生可根据需要删减。

由于编者的水平所限，错漏和不妥之处在所难免，敬请批评指正。

编　者

2008 年 4 月 30 日

目　　录

第一章　线　性　空　间

线性空间既是代数学的基本概念，也是矩阵理论的基本概念之一，本章首先介绍这一概念. 学习过这一部分内容的读者可以将本章略过，或仅作为回顾浏览.

§1.1　集 合 与 映 射

人们经常使用"一组"、"一队"、"一批"这样的词汇来描述某类事物，它们被用来表示一定事物的集体. 在数学上称它们为**集合**或**集**. 组成集合的内容称为集合中的**元素**.

我们用大写字母 A，B，C，… 表示集合，用小写字母 a，b，c，…表示集合的元素.

如果 a 是集合 A 的元素，就称 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$.

若集合 A 中仅含有有限个元素，则称其为有限集合，比如由 -1，1 这两个元素组成的集合就是一个有限集合.

若集合 A 中含有无限个元素，则称其为无限集合，比如由全体实数组成的集合就是一个无限集合.

集合可以用列出其所含有的全部元素，或者给出集合中元素所具备的特征的方式来表示. 当然前一种表示方式仅对有限集合适用，而无限集合的表示要用第二种方式.

例如，由 -1，1 这两个元素组成的集合可以表示为 $A=\{-1,1\}$，而由全体实数组成的集合可以表示为 $A=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$，当然第一个集合也可以表示为 $A=\{x\mid x^2-1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$.

不含有任何元素的集合称为**空集合**，记为 Φ. 例如集合 $A=\{x\mid x^2+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$就是一个空集合.

为了方便起见，我们约定：

$\mathbf{N}$ 为全体自然数组成的集合；

$\mathbf{Z}$ 为全体整数组成的集合；

$\mathbf{Q}$ 为全体有理数组成的集合；

$\mathbf{R}$ 为全体实数组成的集合；

$\mathbf{C}$ 为全体复数组成的集合.

设 A，B 是两个集合，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$，或记作 $B\supseteq A$.

根据这样的定义，一个集合 A 是它自身的子集，同时规定空集合 Φ 是任意集合的子集，这两个子集称为 A 的当然子集，而 A 的其他子集称为 A 的真子集.

设 A，B 是两个集合，如果 $A\subseteq B$，并且 $B\subseteq A$，则称这两个集合相等，记作 $A=B$.

设 A，B 是两个集合，由 A 的所有元素和 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A 或 x\in B\}$. 显然 $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$.

由 A 和 B 的公共元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=$

$\{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$. 显然 $A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$.

类似地，设给定 n 个集合 A_1，A_2，…，A_n. 由 A_1，A_2，…，A_n 的所有元素组成的集合称为 A_1，A_2，…，A_n 的并；而由 A_1，A_2，…，A_n 的公共元素组成的集合称为 A_1，A_2，…，A_n 的交，分别记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 和 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

设 A，B 是两个集合，由一切属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 B 在 A 中的**余集**，或称为 A 与 B 的**差**，记作 $A-B$. 即 $A-B=\{x \mid x \in A \text{且} x \notin B\}$. 例如，$\mathbf{R}-\boldsymbol{Q}$ 就是全体无理数的集合.

设 A，B 是两个集合，集合 $A+B=\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ 称为 A 与 B 的**和集**. 要注意和集与集合的并是两个完全不同的概念.

设 A，B 是两个集合，集合 $A \times B=\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ 称为 A 与 B 的**积**.

以上我们对集合进行了简单的讨论.

另一个常用的基本概念是映射，以下来讨论映射和它的一些性质.

定义 1.1.1 设 A，B 是两个非空集合，A 到 B 的一个映射是指一个对应法则，通过这一法则，对于集合 A 中的每一个元素 x，都有集合 B 中的一个唯一确定的元素 y 与之对应. 我们用字母 f，g，σ，μ，…表示映射，用记号 $f: A \to B$ 表示 f 是 A 到 B 的一个映射. 如果通过映射 f，与 A 中元素 x 对应的 B 中元素是 y，则记作 $f: x \mapsto y$ 或 $f(x)=y$. y 叫做元素 x 在 f 下的**象**，x 叫做 y 在 f 下的**原象**. A 在 f 下的象的集合记作 $f(A)=\{f(x) \mid x \in A\}$. 如果对于每一个 $x \in A$，$f(x)$ 都已给出，那么映射 f 就被确定了.

【例 1.1.1】 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 是全体 n 阶实矩阵 A 组成的集合，令 $f(A)=\det A$，则 $\forall A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，通过法则 f，在 $\mathbf{R}$ 中有唯一确定的实数 $x=\det A$ 与之对应，所以 $f: \mathbf{R}^{n\times n} \to \mathbf{R}$ 是一个映射.

【例 1.1.2】 设 $\mathbf{R}^+$ 是一切正实数的集合，$\forall x \in \mathbf{R}^+$，令 $f(x)=\pm\sqrt{x}$ 与之对应. 由于 $x>0$ 时，$f(x)$ 不能由 x 唯一确定，所以 f 不是 $\mathbf{R}^+$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射.

【例 1.1.3】 设 $P_n[x]$ 是所有次数不大于 n 的实系数多项式的集合，$\forall f(x) \in P_n[x]$，令 $\sigma[f(x)]=f'(x)$，则 σ 是 $P_n[x]$ 到自身的一个映射［其中 $f'(x)$ 表示 $f(x)$ 对 x 求一阶导数］.

某个集合 A 到自身的映射也称为 A 的一个**变换**.

【例 1.1.4】 设 A 是任意一个非空集合，$\forall x \in A$，令 $f(x)=x$ 与之对应：$f: x \mapsto x$. 显然这是 A 到 A 的一个映射，这个映射称为 A 的**恒等映射**（或**恒等变换**），记作 j_A.

关于两个集合间的映射有以下几点需要注意：

(1) A、B 可以是相同的集合，也可以是不同的集合；

(2) 对于 A 中的每一个元素 x，B 中必有一个唯一确定的元素与之对应；

(3) 一般来说，B 中的元素不一定都是 A 中元素的象；

(4) A 中不同元素的象可能相同.

定义 1.1.2 设 f，g 都是 A 到 B 的映射，如果 $\forall x \in A$，都有 $f(x)=g(x)$，则称映射 f 与 g 是相等的，记作 $f=g$.

定义 1.1.3 设 f 是 A 到 B 的一个映射. 如果 $f(A)=B$，则称 f 是 A 到 B 上的一个映射，也称 f 是一个满射.

定义 1.1.4 设 f 是 A 到 B 的一个映射. 如果对于 A 中的任意两个元素 x_1 和 x_2，当

$x_1 \neq x_2$ 时，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是 A 到 B 的一个单射.

定义 1.1.5 设 f 是 A 到 B 的一个映射，g 是 B 到 C 的一个映射，若对于每一个 $x \in A$，有 C 中的一个唯一确定的元素 $g[f(x)]$ 与之对应，则得到一个由 A 到 C 的映射 gf，称其为 f 与 g 的合成（或称为映射的积）.

事实 设给定映射 $f: A \to B$，$g: B \to C$，$h: C \to D$，则合成映射 $h(gf)$ 与 $(hg)f$ 都是 A 到 D 的映射. 并且有 $h(gf) = (hg)f$.

证 由定义 1.1.5 易见 $h(gf)$ 与 $(hg)f$ 都是 A 到 D 的映射.

设 $u = gf$，$v = hg$，则 $\forall x \in A$，有

$$hu(x) = h(u(x)) = h(g(f(x))), vf(x) = v(f(x)) = h(g(f(x)))$$

$\therefore hu = vf, h(gf) = (hg)f$.

一般的，映射的合成不满足交换律，即 $fg \neq gf$.

定义 1.1.6 如果映射 $f: A \to B$ 既是满射又是单射，即 f 满足以下条件：

(1) $f(A) = B$；

(2) $\forall x_1$，$x_2 \in A$，若 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $x_1 = x_2$.

则称 f 是 A 到 B 的一个 1—1 映射.

特别地，一个有限集合 A 到自身的 1—1 映射称为 A 的一个**置换**. 显然，如果 A 是有限集合，则恒等映射 j_A 是一个置换，这个置换也称为**恒等置换**.

定理 1.1.1 设 $f: A \to B$ 是一个映射，则以下两个条件等价：

(1) f 是 1—1 映射；

(2) 存在映射 $g: B \to A$，使得 $gf = j_A$，$fg = j_B$.

并且当条件 (2) 成立时，映射 g 由映射 f 唯一确定.

证 若条件 (1) 成立，$\because f(A) = B$，$\therefore \forall y \in B$，有 $x \in A$，使得 $f(x) = y$；

又因为 f 是单射，所以这个 x 是由 y 唯一确定的. 规定 $g: y \mapsto x$.

如果 $f(x) = y$，则 g 是 B 到 A 的一个映射.

设 $x \in A$，而 $f(x) = y$. 则有 $gf(x) = g(f(x)) = g(y) = x$，$\therefore gf = j_A$.

设 $y \in B$，而 $f(x) = y$，那么 $g(y) = x$，$\therefore fg(y) = f(g(y)) = f(x) = y$，

$\therefore fg = j_B$.

反之，若条件 (2) 成立，设 $y \in B$，令 $g(y) = x \in A$. $\because fg = j_B$，

$\therefore f(x) = f(g(y)) = j_B(y) = y$. $\therefore f$ 是满射.

再设 x_1，$x_2 \in A$，而 $f(x_1) = f(x_2)$，

$\therefore x_1 = j_A(x_1) = gf(x_1) = gf(x_2) = j_A(x_2) = x_2$. $\therefore f$ 是单射.

所以 f 是 1—1 映射.

此外，当条件 (2) 成立时，令 $g: B \to A$，$h: B \to A$ 均具有性质

$gf = hf = j_A$，$fg = fh = j_B$，则有 $g = gj_B = g(fh) = (gf)h = j_A h = h$. 所以 g 由 f 唯一确定.

定义 1.1.7 满足定理 1.1.1 条件 (2) 的映射 $g: B \to A$ 叫做 f 的逆映射，记作 f^{-1}. 显然有 $f^{-1}f = j_A$，$ff^{-1} = j_B$，$(f^{-1})^{-1} = f$.

需要注意的是：一个映射不一定有逆映射.

§1.2 线性空间及其性质

在解析几何中，我们已经学习过平面与空间的向量，线性空间是解析几何中向量概念的一般化.

定义 1.2.1 设 P 是一个数域，P 中的元素用小写拉丁字母 a，b，c，…表示，令 $\mathbf{V}$ 是一个非空集合，$\mathbf{V}$ 中的元素用小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，…表示. 称 $\mathbf{V}$ 中的元素为向量，P 中的元素为纯量. 如果下列条件被满足，则称 $\mathbf{V}$ 是 P 上的一个线性空间（或向量空间）：

（1）在 $\mathbf{V}$ 中定义了一个"加法". 对于 $\mathbf{V}$ 中任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$，有 $\mathbf{V}$ 中一个唯一确定的向量与它们对应，这个向量叫做 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

（2）有一个"纯量乘法". 对于 P 中每一个纯量 a 和 $\mathbf{V}$ 中每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\mathbf{V}$ 中一个唯一确定的向量与它们对应，这个向量叫做 a 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的积，记作 $a\boldsymbol{\alpha}$.

（3）向量的加法和纯量的乘法满足下列运算律：

1）$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

2）$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

3）在 $\mathbf{V}$ 中存在一个零向量，记作 $\mathbf{0}$，对于 $\mathbf{V}$ 中每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，都有 $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

4）对于 $\mathbf{V}$ 中每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，在 $\mathbf{V}$ 中存在一个向量 $\boldsymbol{\alpha}'$，使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}'=\mathbf{0}$，这样的 $\boldsymbol{\alpha}'$ 叫做 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量，记作 $\boldsymbol{\alpha}'=-\boldsymbol{\alpha}$；

5）$a(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=a\boldsymbol{\alpha}+a\boldsymbol{\beta}$；

6）$(a+b)\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\alpha}$；

7）$(ab)\boldsymbol{\alpha}=a(b\boldsymbol{\alpha})$；

8）$1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\mathbf{V}$ 中的任意向量，a，b 是 P 中的纯量.

$\mathbf{V}$ 中所定义的加法与纯量乘法称为 $\mathbf{V}$ 中的线性运算，在不致发生混淆的情况下，将数域 P 上的线性空间 $\mathbf{V}$ 简称为线性空间 $\mathbf{V}$. 当 P 为实数域 $\mathbf{R}$，或复数域 $\mathbf{C}$ 时，分别称 $\mathbf{V}$ 为实线性空间，或复线性空间.

【例 1.2.1】 在解析几何里，二维平面或三维空间中的所有向量，对于向量的加法和实数与向量的乘法这两种线性运算构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. 分别记作 $\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^3$.

【例 1.2.2】 分量属于数域 P 的全体 n 元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 构成 P 上的一个线性空间，记作 P^n. 当 $P=\mathbf{C}$ 时，P^n 称为 n 元复线性空间，记作 $\mathbf{C}^n$；当 $P=\mathbf{R}$ 时，P^n 称为 n 元实线性空间，记作 $\mathbf{R}^n$.

【例 1.2.3】 数域 P 上一切 $m\times n$ 矩阵所构成的集合，对于矩阵的加法和数与矩阵的乘法构成 P 上的一个线性空间.

当 $P=\mathbf{C}$ 时，则此空间记作 $\mathbf{C}^{m\times n}$；当 $P=\mathbf{R}$ 时，则此空间记作 $\mathbf{R}^{m\times n}$.

特别地，P 上一切 1 行 n 列矩阵所成的集合和一切 n 行 1 列矩阵所成的集合分别构成 P 上的线性空间. 前者称为 P 上的行空间，后者称为 P 上的列空间.

【例 1.2.4】 给定 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$，记 $R(A)=\{y\,|\,y=Ax, x\in\mathbf{C}^n\}$，$N(A)=\{x\mid Ax=0, x\in\mathbf{C}^n\}$，按 $\mathbf{C}^n$ 中的加法和数乘运算，$R(A)$，$N(A)$ 都是 $\mathbf{C}$ 上的线性空间.

证 （1）设 $y_1, y_2\in R(A)$，则存在 x_1，$x_2\in\mathbf{C}^n$，使得 $y_1=Ax_1$，$y_2=Ax_2$，

$\because \mathbf{C}^n$ 是线性空间，$\therefore x_1+x_2\in\mathbf{C}^n$，$\therefore A(x_1+x_2)\in R(A)$

又 $\because A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=y_1+y_2, \therefore y_1+y_2\in R(A)$.

(2) 同理，设 $k\in\mathbf{C}$，$\therefore kx_1\in\mathbf{C}^n$，则 $A(kx_1)\in R(A)$，

又 $\because A(kx_1)=kAx_1=ky_1, \therefore ky_1\in R(A)$.

(3) 1) $y_1+y_2=Ax_1+Ax_2=A(x_1+x_2)=A(x_2+x_1)=Ax_2+Ax_1=y_2+y_1$；

2) $(y_1+y_2)+y_3=(Ax_1+Ax_2)+Ax_3=Ax_1+(Ax_2+Ax_3)=y_1+(y_2+y_3)$；

3) $\because \mathbf{0}\in\mathbf{C}^n, \therefore \mathbf{0}=A\mathbf{0}\in R(A)$；

4) 设 $x_1\in\mathbf{C}^n, \therefore -x_1\in\mathbf{C}^n, \therefore \mathbf{0}=Ax_1+A(-x_1)=A(x_1-x_1)\in R(A)$；

5) 设 $a\in\mathbf{C}, a(y_1+y_2)=a(Ax_1+Ax_2)=aAx_1+aAx_2=ay_1+ay_2$；

6) 设 $a,b\in\mathbf{C}, (a+b)y_1=(a+b)Ax_1=aAx_1+bAx_1=ay_1+by_1$；

7) $(ab)y_1=(ab)Ax_1=a(bAx_1)=a(by_1)$；

8) $1\cdot y_1=1\cdot Ax_1=Ax_1=y_1$.

所以 $R(A)$ 为 $\mathbf{C}$ 上的线性空间. 同理可证明 $N(A)$ 也是 $\mathbf{C}$ 上的线性空间.

【例 1.2.5】 复数域 $\mathbf{C}$ 可以视为实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

事实上，二复数之和还是复数，一个实数与一个复数之积还是复数，同时定义 1.2.1 中的 (3) 也成立.

【例 1.2.6】 任意数域 P 总可以视为它自身上的线性空间.

【例 1.2.7】 全体实函数，按函数的加法和实数与函数的乘法构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

【例 1.2.8】 仅由 $\mathbf{C}$ 上线性空间 $\mathbf{V}$ 中的零元素 $\mathbf{0}$ 构成的单元素集合 $\mathbf{0}=\{\mathbf{0}\mid\mathbf{0}\in\mathbf{V}\}$，按 $\mathbf{V}$ 中的运算定义运算，则 $\mathbf{0}$ 是 $\mathbf{C}$ 上的一个线性空间，这个空间叫做零空间.

【例 1.2.9】 问当 $\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，相容的线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的全体 $\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^n\}$ 是否构成线性空间?

证 (反证法) 若 $\boldsymbol{S}$ 是线性空间，则 $\forall x_1, x_2\in\boldsymbol{S}$，有 $x_1+x_2\in\boldsymbol{S}$.

但是 $\boldsymbol{A}(x_1+x_2)=\boldsymbol{A}x_1+\boldsymbol{A}x_2=2b\neq b$，$\therefore x_1+x_2\notin S$.

所以 $\boldsymbol{S}$ 不是线性空间.

【例 1.2.10】 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是两个收敛于 0 的实数无穷序列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$；且 $\forall a\in\boldsymbol{R}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}aa_n=a\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

易证定义 1.2.1 中的 (3) 也成立.

所以，一切收敛于 0 的实序列对于如上定义的加法和数与序列的乘法构成 $\boldsymbol{R}$ 上的一个线性空间.

【例 1.2.11】 n 阶线性齐次常微分方程 $L[x]=\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+a_2\dfrac{\mathrm{d}^{n-2}x}{\mathrm{d}t^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n x=0$ 的解的全体 $\boldsymbol{S}=\{x(t)\mid L[x]=0\}$，对于普通函数的加法、数乘法构成 $\mathbf{C}$ 上的线性空间.

对于零向量与负向量，我们有以下的定理.

定理 1.2.1 在线性空间 $\mathbf{V}$ 中，零向量是唯一的；对于 $\mathbf{V}$ 中的任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，其负向量也是唯一的.

证 设 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{0}'$ 都是 $\mathbf{V}$ 的零向量，则 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{V}$，有 $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}'=\boldsymbol{\alpha}$.

$\therefore \mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}'$.

设$\boldsymbol{\alpha}'$，$\boldsymbol{\alpha}''$都是$\boldsymbol{\alpha}$的负向量，则有$\boldsymbol{\alpha}'+\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\alpha}''+\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

所以$\boldsymbol{\alpha}'=\boldsymbol{\alpha}'+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}'+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}'')=(\boldsymbol{\alpha}'+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}''=\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}''=\boldsymbol{\alpha}''$.

定义 1.2.2 在线性空间$\mathbf{V}$中，两个向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的差为$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$，记作$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$.

定理 1.2.2 对任意向量$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}\in\mathbf{V}$，对任意的数$a\in P$，有

(1) $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，$a\mathbf{0}=\mathbf{0}$；

(2) $a(-\boldsymbol{\alpha})=(-a)\boldsymbol{\alpha}=-a\boldsymbol{\alpha}$；

(3) $a\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\Rightarrow a=0$或$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；

(4) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta}$.

证 (1) $0\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=0\boldsymbol{\alpha}+(0\boldsymbol{\alpha}-0\boldsymbol{\alpha})=(0\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha})-0\boldsymbol{\alpha}=(0+0)\boldsymbol{\alpha}-0\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}-0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$

同理可证$a\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

(2) $\because a\boldsymbol{\alpha}+a(-\boldsymbol{\alpha})=a(\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha}))=a\mathbf{0}=\mathbf{0}$

$$a(-\boldsymbol{\alpha})=-a\boldsymbol{\alpha}$$

同理可证$(-a)\boldsymbol{\alpha}=-a\boldsymbol{\alpha}$.

(3) 设$a\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，但$a\neq 0$，

则$\alpha=1\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{a}a\right)\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{a}(a\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{a}\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

(4) $\because\ \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\gamma}+(-\boldsymbol{\beta})\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta}$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta}$$

由前面所述可见，对于给定的数域P，分量取自P的n元数组$P^n(n\in\mathbf{Z})$，在通常的运算下（在P^n中按分量相加）构成P上的一个线性空间. 特别是，$\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$为本教材的基本线性空间. 具有实系数或复系数的（不超过某一指定次数的，或任意次数的）多项式集合，以及区间$[a, b]\subset\mathbf{R}$上的实（复）值连续函数，或任意函数的集合也是（$\mathbf{R}$上或$\mathbf{C}$上）线性空间的例子.

当然，有限维空间$\mathbf{R}^n$与由$[0, 1]$上的实值连续函数组成的无限维线性空间之间，有着本质的区别.

§1.3 基、维数与坐标

线性空间中相关性概念与线性代数中向量组线性相关性概念类似.

设V是P上的一个线性空间，则有

(1) 线性组合：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m\in\mathbf{V}$，$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_m\in P$

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

称为元素组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$的一个线性组合.

(2) 线性表示：$\mathbf{V}$中某个元素$\boldsymbol{x}$可表示为其中某个元素组的线性组合，则称$\boldsymbol{x}$可由该元素组线性表示.

(3) 线性相关性：如果存在一组不全为零的数λ_1，λ_2，…，$\lambda_m\in P$，使得对于元素$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m\in V$有

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

则称元素组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，否则称其线性无关.

【例 1.3.1】 讨论 $P_3[t]$ 中的多项式组，$f_1(t)=1+4t-2t^2+t^3, f_2(t)=-1+9t-3t^2+2t^3, f_3(t)=-5+6t+t^3, f_4(t)=5+7t-5t^2+2t^3$ 的线性相关性.

解 设 $k_i(i=1,2,3,4)$，使得 $k_1f_1(t)+k_2f_2(t)+k_3f_3(t)+k_4f_4(t)=0$，代入 $f_i(t)$ 整理后得 $(k_1-k_2-5k_3+5k_4)+(4k_1+9k_2+6k_3+7k_4)t+(-2k_1-3k_2-5k_4)t^2+(k_1+2k_2+k_3+2k_4)t^3=0.$

因为 1，t，t^2，t^3 线性无关，所以

$$\begin{cases}k_1-k_2-5k_3+5k_4=0\\4k_1+9k_2+6k_3+7k_4=0\\-2k_1-3k_2-5k_4=0\\k_1+2k_2+k_3+2k_4=0\end{cases}$$

因为此方程组的系数行列式 $D=0$，所以它有非零解，故 $f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)$ 线性相关.

线性相关性概念是个非常重要的概念，我们应用它来研究线性空间.

定义 1.3.1 设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 P 上的一个线性空间，$\boldsymbol{V}$ 中满足以下两个条件的向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 叫做 $\boldsymbol{V}$ 的一个基.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

(2) $\boldsymbol{V}$ 中的每一个向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

其中 n 称为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的维数，记作 $\dim\boldsymbol{V}=n$. 维数为 n 的线性空间称为 n 维线性空间，记作 $\boldsymbol{V}^n$.

在线性代数中，我们曾经学习了极大线性无关组的概念. 实际上，线性空间的基就是线性空间的极大线性无关组.

【例 1.3.2】 在线性空间 $\mathbf{R}^2$ 中，任意两个不共线的非零向量都构成 $\mathbf{R}^2$ 的一个基；在线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中，任意三个不共面的非零向量都构成 $\mathbf{R}^3$ 的一个基. 并且 $\dim\mathbf{R}^2=2$，$\dim\mathbf{R}^3=3$.

【例 1.3.3】 设 $\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 是数域 $\boldsymbol{C}$ 上所有 $m\times n$ 矩阵构成的线性空间，考虑如下的 mn 个矩阵

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix} & (i)\\ (j) & \end{array}$$

在 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 中，除去第 i 行第 j 列位置上的元素是 1 外，其余的元素都是 0，$(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$. 由定义 1.3.1 可见 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\}$ 构成所有 $m\times n$ 矩阵组成的线性空间 $\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 的一个基，并且 $\dim\boldsymbol{C}^{m\times n}=m\times n$. 当然对于线性空间 $\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 而言，也有 $\dim\boldsymbol{R}^{m\times n}=m\times n$. 显然，$\boldsymbol{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 有一个相同的基 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\}$.

【例 1.3.4】 零空间的维数是零.

线性空间不一定是有限维的，如 $\mathbf{C}[a,b]$ 就是一个无限维的线性空间. 在矩阵论中只考虑有限维情况，对于无限维情况有兴趣的可阅读泛函分析及其他书籍的相关内容.

定理 1.3.1 设$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$是数域$P$上的线性空间$\mathbf{V}^n$的一个基，则$\mathbf{V}^n$中的每一个向量可以唯一地被表示为基向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$的线性组合.

证 设$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{V}^n$，$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$

$$\boldsymbol{\alpha} = y_1\boldsymbol{\alpha}_1 + y_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

两式相减有 $(x_1-y_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2-y_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_n-y_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$

$\because \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，$\therefore x_1=y_1, x_2=y_2, \cdots, x_n=y_n$.

反之，任给一个有序数组$x_1, x_2, \cdots, x_n$，总有唯一的元素$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{V}^n$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表示为$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\in\mathbf{V}^n$（其中$x_1, x_2, \cdots, x_n\in P$）.

由此可知，如果$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是$\mathbf{V}^n$的一个基，则$\mathbf{V}^n$中元素的全体可以表示为

$$\mathbf{V}^n = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, x_1, x_2, \cdots, x_n \in P\}$$

也就是说$\mathbf{V}^n$中的向量$\boldsymbol{\alpha}$与有序数组$x_1, x_2, \cdots, x_n$之间构成一一对应关系.

定义 1.3.2 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是线性空间$\mathbf{V}^n$的一个基，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{V}^n$，有且仅有一个有序数组$x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，我们称$x_1, x_2, \cdots, x_n$为元素$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标，记作$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

【例 1.3.5】 取定$\mathbf{R}^3$中三个不共面的向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$，$\forall\xi\in\mathbf{R}^3$，$\xi$可以唯一地表示为$\xi=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 因此，向量$\xi$关于基$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$的坐标为$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$.

【例 1.3.6】 在$\mathbf{R}^n$中如下的n个向量：$\varepsilon_i=(0,\cdots,0,\underset{(i)}{1},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$i=1, 2, \cdots, n$作成$\mathbf{R}^n$的一个基，此基称为$\mathbf{R}^n$的标准基.

$\because\ \forall\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，有

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

$\therefore\boldsymbol{\alpha}$关于基$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$的坐标为$(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

【例 1.3.7】 在$\mathbf{R}^n$中如下的n个向量

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_1 &= (1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}, \\
\varepsilon'_2 &= (0,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}, \\
\varepsilon'_3 &= (0,0,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}, \\
&\vdots \\
\varepsilon'_n &= (0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

也是$\mathbf{R}^n$的一个基，因为$\forall\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，有

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\varepsilon'_1 + (a_2-a_1)\varepsilon'_2 + \cdots + (a_n-a_{n-1})\varepsilon'_n$$

$\therefore\boldsymbol{\alpha}$关于基$\{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n\}$的坐标为$(a_1, a_2-a_1, \cdots, a_n-a_{n-1})^{\mathrm{T}}$.

【例 1.3.8】 求线性空间$P_n[x]$的基、维数以及向量p的坐标.

在$P_n[x]$中，它的一个基为$p_1=1$，$p_2=x$，$p_3=x^2$，$\cdots$，$p_n=x^{n-1}$，$p_{n+1}=x^n$；

$\therefore \dim P_n[x]=n+1$.

任意一个次数不大于n的多项式$p=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$可以表示为

$$p = a_0p_1 + a_1p_2 + a_2p_3 + \cdots + a_{n-1}p_n + a_np_{n+1}$$

$\therefore p$在基$\{p_1, p_2, \cdots, p_{n+1}\}$下的坐标为$p=(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

如果在$P_n[x]$中另取一个基$\{p'_1, p'_2, \cdots, p'_{n+1}\}$，其中$p'_1=1$，$p'_2=x-a$，$\cdots$，$p'_{n+1}=(x-a)^n$，则由$p$在$x=a$点的 Taylor 多项式$p=p(a)+p'(a)(x-a)+\cdots+\dfrac{p^{(n)}(a)}{n!}$

$(x-a)^n$ 可知 p 在基 $\{p'_1,\ p'_2,\ \cdots,\ p'_{n+1}\}$ 下的坐标为 $p=\left(p(a),p'(a),\cdots,\dfrac{p^{(n)}(a)}{n!}\right)^{\mathrm{T}}$.

【例 1.3.9】 线性空间 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 的一个基为

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{bmatrix}(i) \\ (j)\end{array} \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

$\forall \boldsymbol{M}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，有

$$\boldsymbol{M}=a_{11}\boldsymbol{E}_{11}+a_{12}\boldsymbol{E}_{12}+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{E}_{1n}+a_{21}\boldsymbol{E}_{21}+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{E}_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$$

$\therefore \dim\mathbf{C}^{m\times n}=mn$；$\boldsymbol{M}=(a_{ij})$ 在基 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 下的坐标为

$$(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},a_{21},\cdots,a_{mn})^{\mathrm{T}}$$

设 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}^n$ 的向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的坐标分别为 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，$\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n$，那么 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+y_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_n+y_n)\boldsymbol{\alpha}_n$.

设 $a\in P$，那么 $a\boldsymbol{\alpha}=(ax_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(ax_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(ax_n)\boldsymbol{\alpha}_n$.

所以有如下定理.

定理 1.3.2 设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 P 上的一个 n 维线性空间，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一个基，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，它们关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的坐标分别是 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)^{\mathrm{T}}$，那么，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 关于这个基的坐标就是 $(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \cdots,\ x_n+y_n)^{\mathrm{T}}$.

又设 $a\in P$，那么，$a\boldsymbol{\alpha}$ 关于这个基的坐标就是 $(ax_1,\ ax_2,\ \cdots,\ ax_n)^{\mathrm{T}}$.

一般来说，线性空间及其元素是抽象的对象，不同空间的元素完全可以具有千差万别的类别及性质. 但坐标表示却把它们统一了起来，坐标表示把这种差别留给了基和基元素，由坐标所组成的新向量仅由数域中的数表示出来. 更进一步，原本抽象的“加法”及“数乘”经过坐标表示就演化为向量加法及数对向量的数乘.

【例 1.3.10】 求 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & -3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 4\end{pmatrix}$ 的极大线性无关组.

解 向量组 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & -3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 4\end{pmatrix}$ 在自然基 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 下的坐标分别是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,4,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,6,-3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,3,4,4)^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 1 & 4 & 4 & 3\\ 2 & 4 & 6 & 4\\ -1 & -2 & -3 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因此 $\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2 & 4\\4 & -2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3 & 4\\6 & -3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1 & 3\\4 & 4\end{pmatrix}$的极大线性无关组为 $\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2 & 4\\4 & -2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1 & 3\\4 & 4\end{pmatrix}$.

【例 1.3.11】 求 $P_3[t]$ 中的多项式组，$f_1(t)=1+4t-2t^2+t^3$，$f_2(t)=-1+9t-3t^2+2t^3$，$f_3(t)=-5+6t+t^3$，$f_4(t)=5+7t-5t^2+2t^3$ 的秩和一个极大无关组.

解 取 $P_3[t]$ 的基 1，t，t^2，t^3. 以 $f_1(t)$，$f_2(t)$，$f_3(t)$，$f_4(t)$ 在此基下的坐标为列向量构造矩阵 $\boldsymbol{A}$. 并且对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -5 & 5\\4 & 9 & 6 & 7\\-2 & -3 & 0 & -5\\1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-4r_1\\r_3+2r_1}}\begin{pmatrix}1 & -1 & -5 & 5\\0 & 13 & 26 & -13\\0 & -5 & -10 & 5\\0 & 23 & 16 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_2]{\substack{r_2\times\frac{1}{13}\\r_3+r_2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & -5 & 5\\0 & 1 & 2 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可知 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$，且 $\boldsymbol{A}$ 的第 1、2 个列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组；所以多项式组 $f_1(t)$，$f_2(t)$，$f_3(t)$，$f_4(t)$ 的秩为 2，且 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 是一个极大无关组.

一个向量的坐标依赖于基的选取，对于线性空间 V 的两个不同的基来说，同一个向量的坐标一般是不相同的.

以下我们来讨论，一个向量关于不同的基的坐标之间的关系.

设$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$和$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$是 V^n 的两个基，由此可知 $\boldsymbol{\beta}_j$ 作为 V^n 中的元素，可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1&=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n\\\boldsymbol{\beta}_2&=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n\\&\ \vdots\\\boldsymbol{\beta}_n&=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

式中，$(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}_j$ 关于基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$的坐标（$j=1,2,\cdots,n$）.

以这 n 个坐标为列，作一个 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

式中，矩阵 $\boldsymbol{T}$ 叫做由基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$到基$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$的过渡矩阵.

式（1.3.1）可以记为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}\tag{1.3.2}$$

设 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\boldsymbol{\alpha}$ 关于基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，关于基$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$的坐标为 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$. 于是有

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\tag{1.3.3}$$

以及

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{\beta}_i=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\tag{1.3.4}$$

将式（1.3.2）代入式（1.3.4）有

$$\boldsymbol{\alpha}=((\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T})\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\left[\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right]\tag{1.3.5}$$

由式（1.3.5）可见 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的坐标为 $\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

但是我们知道向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于一个基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的坐标是唯一的，所以

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\tag{1.3.6}$$

于是有以下定理.

定理 1.3.3 设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 P 上的一个 n 维线性空间，$\boldsymbol{T}$ 是由基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵，那么 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 与关于基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 的坐标 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$ 由等式（1.3.6）联系着.

如果：$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$，$\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$，$\{\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n\}$ 都是线性空间 $\boldsymbol{V}^n$ 的基；由基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$；由基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$，$\{\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$. 则由以上的讨论可知

$$\boldsymbol{\beta}_k=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\boldsymbol{\alpha}_i,\quad k=1,2,\cdots,n\tag{1.3.7}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_j=\sum_{k=1}^{n}b_{kj}\boldsymbol{\beta}_k,\quad j=1,2,\cdots,n\tag{1.3.8}$$

将式（1.3.7）代入式（1.3.8）有

$$\boldsymbol{\gamma}_j=\sum_{k=1}^{n}b_{kj}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i\tag{1.3.9}$$

其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.\tag{1.3.10}$$

令 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，根据以上的讨论可知：由基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$；同时由式（1.3.10）亦可看出 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

∵由式（1.3.7）和式（1.3.8）可知

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$$