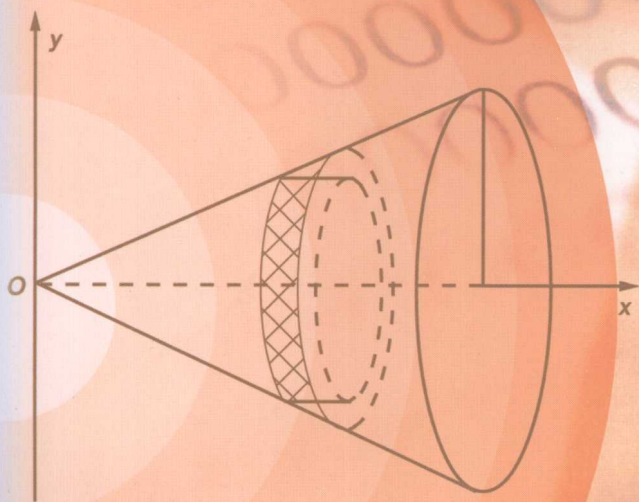


全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学

刘振忠 于晓秋 主编



中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学

刘振忠 于晓秋 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学/刘振忠, 于晓秋主编. —北京: 中国农业出版社, 2007. 8

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-11891-1

I. 高… II. ①刘…②于… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 112996 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100026)

责任编辑 龙永志 段 炼

北京中兴印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月北京第 1 次印刷

开本: 720mm×960mm 1/16 印张: 22.5

字数: 400 千字

定价: 29.50 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

编 写 人 员

主 编 刘振忠 于晓秋

编写人员 刘振忠 于晓秋 王增辉 杨树国

朱桂英 葛慧玲 周晓晶 王苦社

张巧生 李鸿鹏

主 审 徐 梅

前 言

为了适应高等教育大众化形势的要求，我们组织编写了这部高等数学教材。

高等数学是一门重要基础课，它在提高学生分析问题、解决问题和提高学生综合素质方面起着十分重要的作用。

本书具有以下几个方面的特色：

1. 在适应性上，本教材针对我国高等教育实行扩招和多层次办学的实际，考虑了普通高等农业院校学生的实际水平，本着起点适当降低，难度分散处理，注重联系生产和生活实际的原则，适合作为普通高等农林院校特别是实行扩招的农林院校的生物类、管理类等专业的高等数学的教学。

2. 在内容上，本着以上编写原则，适当地降低课程难度，减少某些定理和公式的推导和证明，在保证课程系统性的前提下，对部分内容进行了调整。

3. 在与实践结合上，注意到数学知识的实际应用，给出了数学知识在社会生活、农林科学和经济方面应用的实例。

本教材由黑龙江八一农垦大学、吉林农业大学、东北农业大学和青岛科技大学联合编写，由刘振忠教授、于晓秋副教授担任主编。参加编写工作的有黑龙江八一农垦大学的刘振忠（第一、二章），吉林农业大学的王增辉（第三章），东北农业大学的葛慧玲（第四章），黑龙江八一农垦大学的周晓晶（第五章），黑龙江八一农垦大学的朱桂英（第六、七章），黑龙江八一农垦大学的于晓秋（第八、九章），青岛科技大学的杨树国（第十章），黑龙江八一农垦大学数学系的王苦社、张巧生、李鸿鹏共同完成了全部课后习题及参考答案。

本书由黑龙江八一农垦大学数学系徐梅教授担任主审。

编 者

2007.5

内 容 摘 要

本书系全国高等农林院校“十一五”规划教材,根据编者多年的教学经验,按照继承与改革的精神,结合经济类、管理类微积分教学基本要求编写而成。

本教材共分为10章,主要内容有:函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,多元函数微分学,二重积分,微分方程,差分方程与无穷级数。教材中增加了许多和实际生活相关的应用实例和习题,注重突出应用数学能力与基本素质的培养,体现数学建模思想,从而增强了本书的实用性。

本教材可作为高等院校农、林、牧、生物、经管、财会等专业的教材,也可作为各类专业技术人员的参考书目。

目 录

前言

第一章 函数、极限与连续	1
第一节 函数	1
一、区间和邻域	1
二、函数的概念	1
三、函数的几种特性	4
四、反函数	6
五、基本初等函数	7
六、复合函数及初等函数	9
习题 1-1	11
第二节 极限的概念及性质	12
一、数列的极限	13
二、函数的极限	17
习题 1-2	22
第三节 无穷小与无穷大	22
一、无穷小	22
二、无穷大	24
三、无穷小和无穷大的关系	25
习题 1-3	26
第四节 极限的运算法则	26
一、极限的运算法则	26
二、极限求法举例	27
习题 1-4	30
第五节 极限存在准则 两个重要极限	31
一、极限存在准则	31
二、两个重要极限	32
习题 1-5	35
第六节 无穷小的比较	35

习题 1-6	37
第七节 函数的连续与间断	38
一、函数的连续性	38
二、函数的间断点	40
习题 1-7	42
第八节 初等函数的连续性	43
一、连续函数的运算法则及复合函数的连续性	43
二、闭区间上连续函数的性质	44
习题 1-8	46
第二章 导数与微分	48
第一节 导数的概念	48
一、引例	48
二、导数的概念	49
三、求导举例	51
四、左导数和右导数	53
五、导数的几何意义	54
六、函数的可导性与连续性的关系	55
习题 2-1	56
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则	57
一、函数和、差的求导法则	57
二、函数积的求导法则	58
三、函数商的求导法则	59
习题 2-2	60
第三节 反函数与复合函数的求导法则	61
一、反函数的求导法则	61
二、复合函数的求导法则	63
三、导数基本公式及求导法则	66
习题 2-3	67
第四节 高阶导数	68
习题 2-4	70
第五节 隐函数的导数	71
一、隐函数的导数	71
二、对数求导法	73

习题 2-5	74
第六节 由参数方程所确定的函数的导数	75
习题 2-6	77
第七节 函数的微分及应用	78
一、微分的定义	78
二、微分的几何意义	80
三、微分公式与微分运算法则	80
四、微分在近似计算中的应用	82
习题 2-7	83
第三章 中值定理与导数的应用	85
第一节 微分中值定理	85
一、罗尔定理	85
二、拉格朗日中值定理	87
三、柯西中值定理	90
习题 3-1	91
第二节 洛必达法则	92
习题 3-2	96
第三节 泰勒公式	97
一、泰勒公式	97
二、麦克劳林公式	99
习题 3-3	100
第四节 函数单调性的判定	101
习题 3-4	103
第五节 函数的极值及其求法	104
一、极值的定义	104
二、极值存在的条件和求极值的方法	104
习题 3-5	108
第六节 函数的最大值与最小值	109
习题 3-6	111
第七节 曲线的凹凸性	111
习题 3-7	114
第八节 函数作图	115
习题 3-8	117

第四章 不定积分	118
第一节 不定积分的基本概念与性质	118
一、原函数与不定积分的概念	118
二、不定积分的基本性质	120
三、不定积分的基本公式	120
四、简单不定积分的计算	121
习题 4-1	123
第二节 换元积分法	124
一、第一类换元积分法	124
二、第二类换元积分法	129
习题 4-2	133
第三节 分部积分法	134
习题 4-3	138
第四节 几种特殊函数的不定积分	138
一、有理函数积分	138
二、三角函数有理式的积分	140
三、简单无理函数的积分	142
习题 4-4	143
第五节 不定积分在经济学中的应用	143
习题 4-5	145
第五章 定积分及其应用	146
第一节 定积分的概念与性质	146
一、定积分问题举例	146
二、定积分的定义	148
三、定积分的几何意义	150
四、定积分的性质	151
习题 5-1	153
第二节 微积分基本定理	154
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的关系	154
二、可变上限的定积分	155
三、牛顿—莱布尼茨公式	157
习题 5-2	159

第三节 定积分的计算	160
一、定积分的换元积分法	160
二、定积分的分部积分法	163
习题 5-3	164
第四节 定积分的近似计算	165
一、矩形法	166
二、梯形法	166
习题 5-4	168
第五节 定积分的应用	168
一、定积分的微元法	168
二、平面图形的面积	169
三、体积	173
四、平面曲线的弧长	175
五、变力做功	177
六、在经济学中的应用	178
习题 5-5	179
第六节 广义积分	180
一、无穷区间上的广义积分	180
二、无界函数的广义积分	183
习题 5-6	185
第六章 多元函数微分学	186
第一节 空间解析几何的基本知识	186
一、空间直角坐标系	186
二、几种特殊的曲面	189
三、空间曲线	193
习题 6-1	195
第二节 二元函数的概念	196
一、预备知识	196
二、多元函数的概念	197
三、二元函数的极限与连续	199
习题 6-2	202
第三节 偏导数	203
一、偏导数的定义及其计算方法	203

二、高阶偏导数	207
习题 6-3	208
第四节 全微分及其应用	208
一、全微分的定义	208
二、全微分在近似计算中的应用	211
习题 6-4	212
第五节 多元复合函数的求导法则	212
一、复合函数为一元函数的情形	212
二、复合函数为二元函数的情形	213
三、一种特殊的情形	214
习题 6-5	215
第六节 隐函数的求导公式	216
习题 6-6	218
第七节 多元函数的极值	219
一、二元函数的极值	219
二、最大值与最小值	221
三、条件极值 拉格朗日乘数法	222
习题 6-7	223
第七章 二重积分	224
第一节 二重积分的概念与性质	224
一、二重积分的概念	224
二、二重积分的性质	226
习题 7-1	228
第二节 二重积分的计算法	228
一、利用直角坐标计算二重积分	229
二、利用极坐标计算二重积分	235
习题 7-2	238
第三节 二重积分的应用	240
一、曲面的面积	240
二、空间几何体的体积	241
三、平面薄片的质量	242
习题 7-3	243

第八章 微分方程	244
第一节 微分方程的基本概念	244
习题 8-1	247
第二节 可分离变量的微分方程	248
习题 8-2	250
第三节 齐次方程	251
习题 8-3	253
第四节 一阶线性微分方程	253
一、一阶线性微分方程	253
二、伯努利方程	256
习题 8-4	258
第五节 可降阶的高阶微分方程	258
一、 $y''=f(x)$ 型的微分方程	259
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	260
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	261
习题 8-5	262
第六节 二阶线性微分方程	263
一、二阶常系数齐次线性微分方程	263
二、二阶常系数非齐次线性微分方程	267
习题 8-6	270
第九章 差分方程	271
第一节 差分方程的基本概念	271
一、差分概念	271
二、差分方程	273
三、差分方程的解	274
习题 9-1	275
第二节 一阶常系数线性差分方程	275
一、一阶常系数齐次线性差分方程	276
二、一阶常系数非齐次线性差分方程	277
习题 9-2	280
第三节 二阶常系数线性差分方程	280
一、二阶常系数齐次线性差分方程	280

二、二阶常系数非齐次线性差分方程	282
习题 9-3	283
第四节 差分方程的简单应用	283
一、筹措教育经费	283
二、分期偿还贷款	284
习题 9-4	286
第十章 无穷级数	287
第一节 无穷级数的概念和性质	287
一、无穷级数的概念	287
二、无穷级数的基本性质和级数收敛的必要条件	292
习题 10-1	293
第二节 常数项级数的审敛法	294
一、正项级数及其审敛法	294
二、交错级数及其审敛法	299
三、绝对收敛与条件收敛	300
习题 10-2	301
第三节 幂级数	302
一、函数项级数	302
二、幂级数及其收敛性	303
三、幂级数的基本性质	307
习题 10-3	308
第四节 函数的幂级数展开	309
一、泰勒级数	309
二、函数展开成幂级数	310
习题 10-4	315
第五节 幂级数展开式的应用	316
一、近似计算	316
二、欧拉公式	318
习题 10-5	319
习题参考答案	320
参考文献	345

第一章 函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象, 极限概念是高等数学最基本的概念, 而极限方法则是高等数学研究问题的重要工具. 本章简要介绍函数概念及其简单性质、数列和函数的极限定义, 极限的性质和计算方法, 并在此基础上讨论函数的连续性问题.

第一节 函 数

一、区间和邻域

1. 区间的概念

区间是表达变量变化范围的一个概念. 设 a, b 都是实数, 且 $a < b$, 集合 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间, 记为 (a, b) . $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记为 $[a, b]$, 类似地可以得到半开区间 $(a, b]$ 和 $[a, b)$, 它们分别由集合 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ 和 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ 表示.

2. 邻域

当在某点附近的点所构成的集合里讨论问题时, 我们常用到邻域的概念.

设 δ 是任意一个正数, a 为某一实数, 称满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的实数 x 的全体为 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$. 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

a 称为邻域中心, δ 称为邻域半径. 称满足不等式 $0 < |x - a| < \delta$ 的实数 x 的全体为 a 的去心 δ 邻域. 事实上, $U(a, \delta)$ 由开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 内的所有点构成, 或者说邻域就是一个以 a 为中心的、左右长度都相等的开区间 (图 1-1).

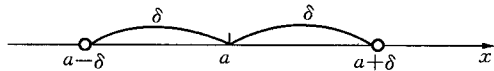


图 1-1

二、函数的概念

函数概念在初等数学阶段已经接触过, 这里我们只做一些简要介绍.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记

作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量.

这里, f 是表示变量 y 和 x 间对应法则的符号. f 也可改用其他字母, 例如 g, h 等, 这时函数就记作 $y=g(x), y=h(x)$ 等.

使得函数解析式 $y=f(x)$ 有意义的自变量构成的集合, 称为函数的定义域. 记为 D , 即

$$D = \{x | f(x) \text{ 有意义} \}.$$

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$. 当 x_0 遍取 D 的各个数值时, 对应的函数值全体组成的数集 W 称为函数的值域. 即

$$W = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

如果自变量在定义域内任取一个数值时, 对应的函数值有且只有一个, 则称这种函数为单值函数, 否则称之为多值函数, 本书的函数若没有特殊说明, 都是指单值函数.

函数常用的表示方法有以下三种:

1. 解析法: 即用一个解析式子表示两个变量之间关系的方法, 也叫公式法.
2. 表格法: 用表格表示变量之间关系的方法.
3. 图像法: 用几何图形表示变量之间关系的方法.

例 1 圆的面积 A 是随着它的半径 r 的变化而变化的, 它们之间的关系为

$$A = \pi r^2.$$

当 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时, 由上式就可以确定圆面积 A 的相应的值.

例 2 在初速度为 0 的自由落体运动中, 设物体下落的时间为 t , 落下的距离为 s , 那么 s 与 t 之间存在以下函数关系

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

其中 g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$, 那么当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时, 由上式就可以确定 s 的相应数值.

对应法则和定义域是函数概念的两个基本要素. 定义域一般可用一个区间或多个区间的并来表示.

对于不考虑实际意义的, 用解析式表达的函数, 它的定义域就是自变量能够取到的使解析式子有意义的一切实数值. 对于从实际问题中抽象出来的函数关系, 它的定义域要根据问题的实际意义来确定. 如在例 1 中, 函数的定义域

$D=(0, +\infty)$; 例 2 中, 函数的定义域 $D=[0, T]$.

例 3 求函数 $y=\ln(1-x)+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解 要使所给的解析式子有意义, 必须满足

$$1-x>0 \text{ 且 } x+2\geq 0,$$

即

$$x<1 \text{ 且 } x\geq -2,$$

这两个集合的交集为 $[-2, 1)$, 因此该函数的定义域为 $[-2, 1)$.

下面我们给出几个特殊函数的例子.

例 4 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数, 其定义域 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域 $W=\{-1, 0, 1\}$, 其图形如图 1-2 所示. 对于任何实数 x , 有: $x=\operatorname{sgn} x \cdot |x|$.

在定义域的不同范围内用不同的解析式子表示的函数, 称为分段函数.

例 5 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & \text{当 } x > 1 \end{cases}$$

试求:

(1) 函数的定义域、值域;

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(3)$;

(3) 画出函数的图形.

解 (1) 函数的定义域为 $[0, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$;

(2) 因为 $\frac{1}{2} \in [0, 1]$, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $1 \in [0, 1]$, 所以 $f(1) = 2\sqrt{1} = 2$; $3 \in (1, +\infty)$, 所以 $f(3) = 1+3=4$;

(3) 根据函数的定义, 在 $[0, 1]$ 上, 函数的图形为曲线 $y=2\sqrt{x}$, 在 $(1, +\infty)$ 上, 函数的图形为直线 $y=1+x$, 该函数的图形如图 1-3 所示.

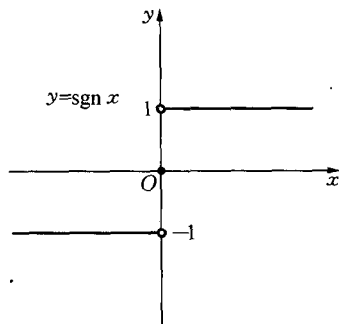


图 1-2

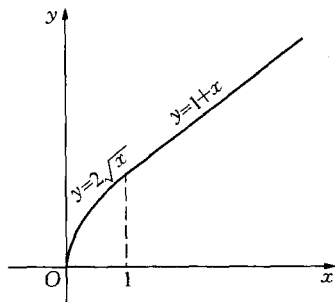


图 1-3