

MODERN THEORIES OF GEAR MESHING

现代啮合理论

■ 刘鹄然 赵东福 宋德玉 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

TH132.4/15

2008

现代啮合理论

刘鹤然 赵东福 宋德玉 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

内 容 提 要

本书为有关齿轮啮合理论的专著,主要包括空间传动坐标系的对称设置,齿廓啮合条件的矩阵表示,空间啮合共轭齿廓曲率计算,根切界限点的判定方法,新共轭方法和新传动方式,活动标形及其在点啮合齿轮误差分析中的应用,弹性啮合理论,局部线接触啮合理论,高阶接触啮合理论等。

本书适合从事机械设计、机械制造等相关领域的研究人员、工程技术人员、本科高年级学生和研究生等参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

现代啮合理论 / 刘鹤然著. —杭州: 浙江大学出版社,
2008. 4
ISBN 978-7-308- 05839-1

I. 现… II. 刘… III. 啮合原理 IV. TH132. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 034918 号

现代啮合理论

刘鹤然 赵东福 宋德玉 著

责任编辑 王 波

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>

<http://www.press.zju.edu.cn>)

电话: 0571—88925592, 88273066(传真)

排 版 杭州好友排版工作室

印 刷 临安市曙光印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 11.75

字 数 244 千

版 印 次 2008 年 4 月第 1 版 2008 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308- 05839-1

定 价 25.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

前 言

齿轮啮合理论是一门技术科学,它在高副机构的分析和综合、齿轮机床和刀具设计以及机械加工中应用广泛。由于生产发展的需要和计算机的使用,近年来发展较快,我国学者做了较多贡献。

空间啮合原理主要研究两个互相包络的曲面间接触传动的关系。从广义来说包括一切互为包络的共轭曲面。如刀具与工件、齿轮与齿轮、蜗轮与蜗杆等。空间啮合理论是与生产实践紧密联系的一门技术科学。

同时,空间包络中的几何问题,一开始就引起数学家的兴趣。这方面的工作可以追溯到欧拉。欧拉对渐开线的研究仍沿用至今不衰。由于工业的迅速发展,比渐开线齿轮更复杂的齿轮和啮合不断出现,引起近代齿轮啮合理论的深入研究,这方面的问题,从本质上说是几何学的一个特殊问题,所以,又属于数学工作者研究的范畴。

本书是根据作者 20 世纪 80 年代以来潜心研究,以及在有关专业刊物发表的学术论文,经过补充、修改和整理而写成的,其中包括作者多年的研究成果。因此,作者在力求系统地阐述齿轮啮合的一般理论时,尽量把作者自己的学术成果所反映的新概念穿插进来。例如,在空间传动坐标系的设置方面,提出在空间传动坐标系的对称设置;在齿廓啮合条件方面,提出高赫曼方法矩阵形式;在局部线接触啮合理论方面,解决了钢管矫直过程矫直辊与钢管的最佳接触条件。如此等等。特别是在高阶接触啮合理论方面,作者通过理论总结和归纳,提出了齿廓啮合的新概念、新方法,把啮合理论推进到新的高度,是代表 21 世纪的新的传动形式。

本书第 5 章第 1 节由刘鹤然、赵东福撰稿,第 5 章第 2 节由刘鹤然、宋德玉撰稿。全书由刘鹤然统稿。第 1 章第 1 节坐标变换基础知识的介绍参考了卢贤缙、胡来璟、吴序堂等老前辈的著作。

在本书的写作和出版过程中,得到了许多专家的指导和朋友的帮助,在此一并表示感谢。错误在所难免,祈指正。

刘鹤然
2008 年 3 月

目 录

第 1 章 啮合基本理论	1
1.1 空间传动坐标系对称设置	1
1.1.1 解析几何中的坐标变换方法	1
1.1.2 利用矩阵进行坐标变换	4
1.1.3 对称的坐标变换矩阵	7
1.1.4 对称坐标系下的啮合方程式	8
1.2 啮合条件的矩阵表示	9
1.2.1 用高赫曼法表示啮合条件	9
1.2.2 高赫曼法的矩阵表示	13
1.2.3 齿轮与齿条的啮合条件式	14
1.2.4 双自由度包络的高赫曼法	15
1.3 空间啮合共轭齿廓曲率计算	16
1.3.1 相对运动速度方向的诱导法曲率与诱导短程挠率	16
1.3.2 沿接触线切线方向的法曲率和测地挠率	18
1.3.3 利用曲率圆求任意方向法曲率和测地挠率	19
1.3.4 与接触线切线垂直的矢量 p	20
1.4 计算共轭齿廓曲率的参数坐标法	20
1.5 利用拐圆求齿廓曲率	23
1.5.1 瞬心线机构与连杆机构的曲率	24
1.5.2 瞬心速度 v_I 与当量曲率圆	24
1.5.3 拐圆与 Eura-savali 公式	25
1.5.4 Bobilier 作图法与齿廓曲率	26
1.6 根切条件判别式	27
1.6.1 根切条件判别式的推导	27

1.6.2 平面啮合根切条件的判别式	30
1.7 双自由度包络的一个根切条件判别式	38
1.7.1 单自由度包含的根切判别式	38
1.7.2 双自由度包络根切条件判别式	40
1.7.3 算例	42
1.8 活动标形及其在点啮合齿轮传动误差分析中的应用	44
1.8.1 活动标形法	44
1.8.2 用活动标形法做点啮合曲面运动分析	46
1.8.3 线啮合曲面的二阶参数	48
1.8.4 收缩齿直齿圆锥齿轮传动的误差分析	51
1.9 平面微分几何新形式及其在齿轮传动中的应用	52
1.9.1 曲线的 2 阶近似	52
1.9.2 局部坐标的活动标形	53
1.9.3 用活动标形分析点啮合齿轮传动误差	54
1.9.4 算例	55
第 2 章 共轭齿廓成形新方法与新传动方式	57
2.1 共轭齿廓成形新方法及其在环面蜗杆中的应用	57
2.2 滚珠环面蜗杆精确成形方法的探讨	58
2.2.1 蜗杆齿面的成形	58
2.2.2 蜗轮滚刀的齿面及其实现	59
2.2.3 砂轮轴线偏摆装置	61
2.3 可磨硬齿面蜗轮与蜗杆的共轭	62
2.4 变齿高蜗杆传动	64
2.4.1 变齿高蜗轮, 等齿高蜗杆	65
2.4.2 变齿高蜗轮, 变齿高蜗杆	66
2.4.3 结果	67
2.5 角修正柱面二次包络环面蜗杆传动	69
2.5.1 概述	69
2.5.2 第一次包络过程	70
2.5.3 第二次包络过程	71
2.5.4 接触线复现条件	72
2.5.5 圆柱面二次包络环面蜗杆传动	73
附录 1 接触线复现条件的详细推导	74
2.6 新型的变 β 值平面二次包络环面蜗杆	82
2.6.1 环面蜗杆的变螺旋升角齿线	82

2.6.2	实际蜗杆齿面与节曲面交线	83
2.6.3	定 β 值平面二次包络环面蜗杆的缺点	84
2.6.4	新型的变 β 值平面二次包络环面蜗杆	85
2.7	双自由度二次包络环面蜗杆传动	86
2.7.1	概 述	86
2.7.2	工艺过程	87
2.7.3	两次包络工艺参数之间的关系	88
2.8	产形轮纵向齿廓为摆线的圆弧齿锥齿轮啮合原理	90
2.8.1	摆线齿弧齿锥轮共轭齿面形成原理	90
2.8.2	产形轮齿面方程	92
2.8.3	啮合条件式	94
2.8.4	锥齿轮齿面方程	94
2.9	准双曲面齿轮设计计算新方法	96
2.10	内圆柱圆锥齿轮传动及其在锥差式减速器中的应用	98
2.10.1	提出这种新传动的理由	98
2.10.2	内圆柱圆锥齿轮传动的理论齿面	98
2.10.3	齿面截线	100
2.11	双自由度包络鼓形齿联轴器	100
2.11.1	双自由度包络鼓形齿齿形	100
2.11.2	计算实例	102
2.11.3	结束语	103
2.12	滚子槽式周向限制副的共轭	103
2.12.1	坐标系设置	103
2.12.2	与圆柱滚子共轭的齿槽	104
2.12.3	与滚槽相共轭的滚子线形	105
2.13	机器人腕关节所用球面齿轮传动	106
2.13.1	圆锥形凹齿的几何计算及齿廓方程	107
2.13.2	坐标系的设置	107
2.13.3	啮合条件与对应凸齿齿廓	108
2.13.4	凸齿的根切检验	110
2.13.5	齿的分布	110
2.13.6	计算实例	111
2.13.7	结 论	111
2.14	非圆行星轮系的等距条件	111
2.14.1	外啮合非圆齿轮传动	111
2.14.2	内啮合非圆齿轮传动	113

2.14.3 非圆行星轮系的同心条件	114
2.14.4 非圆行星传动的传动比	114
第3章 齿轮数控加工方法	116
3.1 刀倾半展成法在螺旋锥齿轮数控铣齿机上的实现	116
3.1.1 数控铣齿机简介	116
3.1.2 刀倾法的机床调整	117
3.1.3 在 NC 铣齿机上刀倾法加工	117
3.1.4 算例	119
3.2 在螺旋锥齿轮数控铣齿机上变性半展成法的实现	120
3.2.1 变性法的原理	120
3.2.2 变性法的机床调整	120
3.2.3 在数控铣齿机上复现变性法加工	121
3.3 在 NC 数控铣机上加工连续展成法螺旋锥齿轮	122
3.3.1 展成法原理	122
3.3.2 加工摆线齿圆锥齿轮的机床调整	123
3.4 啮合轴与盘形刀具加工分阶式双圆弧齿轮的过渡曲面及其消除	124
3.4.1 啮合轴	124
3.4.2 啮合条件式	124
3.4.3 运动学法	127
3.4.4 具体计算	127
3.5 奥利康与克林根贝尔格制铣齿机工作原理的新认识	129
3.5.1 产形轮摆线齿线的形成	129
3.5.2 机床传动系统示意图与附加滚切运动	130
3.5.3 几个问题的解答	131
3.6 非圆齿轮的加工运动计算	132
3.6.1 用齿条刀具加工	132
3.6.2 用齿轮刀具加工	134
3.6.3 算例	135
第4章 弹性啮合理论	137
4.1 接触变形与点啮合共轭齿面失配传动性能预控	137
4.1.1 基本关系式	137
4.1.2 失配传动性能的预控	139
4.1.3 考虑接触变形的失配传动性能的预控	140

4.2 点啮合失配齿面传动性能及接触区形状的预控	141
4.2.1 概 述	141
4.2.2 基本关系	141
4.2.3 点啮合 Baxter 方法	142
4.2.4 考虑接触变形的失配传动性能的预控	143
第 5 章 局部线啮合原理	146
5.1 矫直辊辊形分析与管棒材矫直的密切关系	146
5.1.1 理论矫直辊辊形曲线	146
5.1.2 局部“线接触”条件	147
5.1.3 矫直辊表面曲率	148
5.1.4 算例	149
5.2 局部线接触原理与复杂曲面加工	150
5.2.1 用三坐标半加工复杂曲面	150
5.2.2 特色和优点	152
第 6 章 高阶切触啮合理论	153
6.1 概述	153
6.2 国内外的情况	154
6.3 高阶接触齿面分析	155
6.3.1 曲线的 3 阶近似	155
6.3.2 齿面啮合点邻域间隙为 4 阶无穷小的条件的推导 ——平面直齿轮为例	156
6.4 基准齿条的构造方法	156
6.4.1 一般高阶接触齿轮齿条的构造方法	160
6.4.2 用渐开线拟合高阶接触齿轮齿条	161
6.4.3 高阶接触齿轮齿条算例	163
6.4.4 齿轮齿条的构造方法二(改变高阶导数法)	165
参考文献	171

第 1 章 啮合基本理论

1.1 空间传动坐标系对称设置

在齿轮运动中,各构件之间存在着相对运动,往往需要分别在与不同构件相固连的坐标系中表示点的位置或矢量。有时在一个构件上也采用不同的坐标系来表示点的位置。这些可以通过一次或多次坐标变换来实现。坐标变换是研究齿轮啮合原理的重要方法。本节将较为详细地介绍坐标变换的两种方法,一种是解析几何中的坐标变换方法,对简单的坐标变换建议采用这种方法;一种是矩阵方法,建议用于复杂的多次坐标变换。本书采用右旋坐标系,它的一种判别方法是:右手握拳,当 x 轴顺着四指握绕方向转向 y 轴时,伸出的拇指表示 z 轴方向。

1.1.1 解析几何中的坐标变换方法

(1) 坐标轴的平移

如图 1-1-1 所示,坐标系 S_2 相对坐标系 S_1 沿坐标轴 x_1 、 y_1 平移距离 a 、 b 。 $x_1O_1y_1$ 平面上任意点 M 在坐标系 S_1 中的坐标 (x_1, y_1) 用坐标系 S_2 中的坐标 (x_2, y_2) 表示为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2 + a \\ y_1 &= y_2 + b \end{aligned} \right\} \quad (1-1-1)$$

如用坐标系 S_1 中的坐标 (x_1, y_1) 表示坐标系 S_2 中的坐标 (x_2, y_2) , 则有

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 - a = x_1 + (-a) \\ y_2 &= y_1 - b = y_1 + (-b) \end{aligned} \right\} \quad (1-1-2)$$

如果我们将式(1-1-1)、式(1-1-2)中等号左边的坐标称为待求坐标系的待求坐标,而将等号右边的坐标称为已知坐标系的已知坐标。则式(1-1-1)等号右边的第二项是已知坐标系 S_2 的坐标原点 O_2 在待求坐标系 S_1 中的坐标 (a, b) ; 式(1-1-2)等号右边的第二项是已知坐标系 S_1 的坐标原点 O_1 在待求坐标系 S_2 中的坐标 $(-a, -b)$ 。显然,如果二坐标系沿坐标轴 z 相对平移距离 c , 规则是相同的。于是我们得到坐标系移轴普遍公式如下:

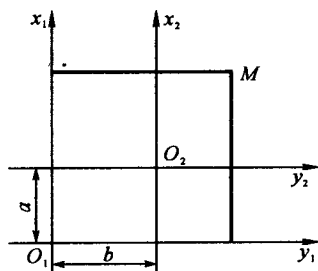


图 1-1-1

$$\left. \begin{aligned} x_n &= x_1 + a_1 \\ y_n &= y_1 + b_1 \\ z_n &= z_1 + c_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-3)$$

即待求坐标系 S_n 的各坐标等于已知坐标系 S_1 的相应坐标加上已知坐标系 S_1 的坐标原点在待求坐标系 S_n 的相应坐标值。这里 a_1, b_1, c_1 取代数值。

(2) 坐标轴的旋转

如图 1-1-2 所示, 坐标系 S_2 相对坐标系 S_1 绕坐标原点 O 旋转 ϕ 角, 讨论 $x_1 O_1 y_1$ 平面上任意点 M 在坐标系 S_1 中的坐标 (x_1, y_1) 与在坐标系 S_2 中的坐标 (x_2, y_2) 的关系。先将 S_1 作为待求坐标系, 即以坐标 x_2, y_2 表示坐标 x_1, y_1 。作 $QA \perp OA$, $QC \perp OC$, 则有

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= PM = MB + QC = x_2 \cos \phi + y_2 \sin \phi \\ y_1 &= OP = -QB + OC = -x_2 \sin \phi + y_2 \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (1-1-4)$$

将 S_2 作为待求坐标系, 即以坐标 x_1, y_1 表示坐标 x_2, y_2 。作 $PT \perp MQ$, $PS \perp OQ$, 则有

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= QM = MT - PS = x_1 \cos \phi - y_1 \sin \phi \\ y_2 &= OQ = PT + OS = x_1 \sin \phi + y_1 \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (1-1-5)$$

如果将式(1-1-4)、式(1-1-5)等号右边的坐标 x_2, y_2 和 x_1, y_1 看作变量, 可以发现它们的系数是坐标系 S_1 和 S_2 的相应坐标轴间正向夹角的余弦, 式(1-1-4)可写成

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2 \cos \phi + y_2 \cos(90^\circ - \phi) = x_2 \cos(x_1, \hat{x}_2) + y_2 \cos(x_1, \hat{y}_2) \\ y_1 &= x_2 \cos(90^\circ + \phi) + y_2 \cos \phi = x_2 \cos(y_1, \hat{x}_2) + y_2 \cos(y_1, \hat{y}_2) \end{aligned} \right\} \quad (1-1-6)$$

式(1-1-5)可写成

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \phi + y_1 \cos(90^\circ + \phi) = x_1 \cos(x_2, \hat{x}_1) + y_1 \cos(x_2, \hat{y}_1) \\ y_2 &= x_1 \cos(90^\circ - \phi) + y_1 \cos \phi = x_1 \cos(y_2, \hat{x}_1) + y_1 \cos(y_2, \hat{y}_1) \end{aligned} \right\} \quad (1-1-7)$$

分析式(1-1-6)、式(1-1-7)可以得到如下规则: 待求坐标系的每个坐标可写成已知坐标系各个坐标的线性表达式, 其系数等于该待求坐标的坐标轴与各个已知坐标的坐标轴夹角余弦。例如在式(1-1-6)第一式中, 待求坐标 x_1 表示为已知坐标的坐标 x_2, y_2 的线性式, x_2 的系数等于待求坐标 x_1 轴与 x_2 轴的夹角余弦, y_2 的系数等于待求坐标 x_1 轴与 y_2 轴的夹角余弦。对于三维坐标系 S_1 和 S_n , 当它们的 3 个坐标轴均有相对旋转时, 上述规则同样是成立的, 即

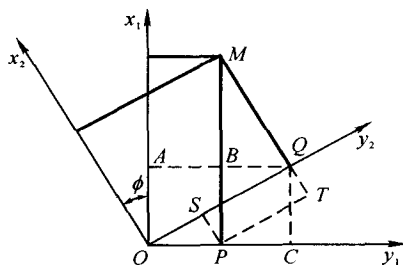


图 1-1-2

$$\left. \begin{aligned} x_n &= x_1 \cos(x_n, \hat{x}_1) + y_1 \cos(x_n, \hat{y}_1) + z_1 \cos(x_n, \hat{z}_1) \\ y_n &= x_1 \cos(y_n, \hat{x}_1) + y_1 \cos(y_n, \hat{y}_1) + z_1 \cos(y_n, \hat{z}_1) \\ z_n &= x_1 \cos(z_n, \hat{x}_1) + y_1 \cos(z_n, \hat{y}_1) + z_1 \cos(z_n, \hat{z}_1) \end{aligned} \right\} \quad (1-1-8)$$

(3) 坐标轴同时平移和旋转

如图 1-1-3 所示, 坐标系 S_2 相对坐标系 S_1 沿坐标轴 x_1, y_1 平移距离 a, b 至辅助坐标系 S_p 位置后, 以 O_2 为中心旋转 ϕ 角。讨论 $x_1 O_1 y_1$ 平面上任意点 M 在坐标系 S_1 中的坐标 (x_1, y_1) 与在坐标系 S_2 中的坐标 (x_2, y_2) 的关系。我们利用中间坐标系 S_p 分步求解。先将 S_2 作为已知坐标系。第一步由坐标系 S_2 求坐标系 S_p , 根据式(1-1-8), 有

$$\begin{aligned} x_p &= x_2 \cos \phi + y_2 \sin \phi \\ y_p &= -x_2 \sin \phi + y_2 \cos \phi \end{aligned}$$

第二步由坐标系 S_p 求坐标系 S_1 , 根据式(1-1-3), 有

$$\begin{aligned} x_1 &= x_p + a \\ y_1 &= y_p + b \end{aligned}$$

将 x_p, y_p 表示式代入上式, 得到 S_1 的坐标表示式为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2 \cos \phi + y_2 \sin \phi + a \\ y_1 &= -x_2 \sin \phi + y_2 \cos \phi + b \end{aligned} \right\} \quad (1-1-9)$$

如果将 S_1 作为已知坐标系, 第一步由坐标系 S_1 求坐标系 S_p 。根据式(1-1-10), 有

$$\begin{aligned} x_p &= x_1 - a \\ y_p &= y_1 - b \end{aligned}$$

第二步由坐标系 S_p 求坐标系 S_2 , 根据式(1-1-8), 有

$$\begin{aligned} x_2 &= x_p \cos \phi - y_p \sin \phi \\ y_2 &= x_p \sin \phi + y_p \cos \phi \end{aligned}$$

将 x_p, y_p 表示式代入上式, 得到 S_2 的坐标表示式为

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \phi - y_1 \sin \phi - (a \cos \phi - b \sin \phi) \\ y_2 &= x_1 \sin \phi + y_1 \cos \phi - (a \sin \phi + b \cos \phi) \end{aligned} \right\} \quad (1-1-11)$$

在图 1-1-3 中, 作 $O_1 Q \perp O_2 Q$, $PS \perp O_1 Q$, $PT \perp O_2 Q$ 。设坐标系 S_1 的坐标原点 O_1 在坐标系 S_2 中的坐标为 (a_1, b_1) , 则有

$$\begin{aligned} a_1 &= -O_2 Q = -(O_2 T - PS) = -(a \cos \phi - b \sin \phi) \\ b_1 &= -O_1 Q = -(PT + O_1 S) = -(a \sin \phi + b \cos \phi) \end{aligned}$$

将式(1-1-11)和这一结果比较可以发现, 它的最后一项(连同符号)就是坐标系 S_1 的坐标原点 O_1 在坐标系 S_2 中的坐标 (a_1, b_1) 。

式(1-1-9)和式(1-1-11)等号右边都是由两部分组成, 前两项是已知坐标系坐标的线性表示式, 最后一项是已知坐标系的坐标原点在待求坐标系中的坐标。

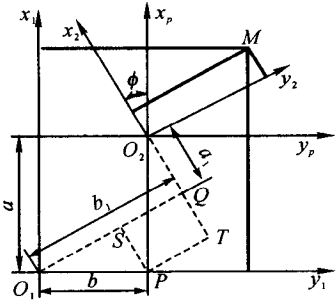


图 1-1-3

就是说同时存在坐标轴平移和旋转的情况下,式(1-1-3)和式(1-1-8)表示的移轴和转轴坐标变换普遍规则是同时成立的。对于三维坐标系可表示为

$$\left. \begin{aligned} x_n &= x_1 \cos(x_n, \hat{x}_1) + y_1 \cos(x_n, \hat{y}_1) + z_1 \cos(x_n, \hat{z}_1) + a_1 \\ y_n &= x_1 \cos(y_n, \hat{x}_1) + y_1 \cos(y_n, \hat{y}_1) + z_1 \cos(y_n, \hat{z}_1) + b_1 \\ z_n &= x_1 \cos(z_n, \hat{x}_1) + y_1 \cos(z_n, \hat{y}_1) + z_1 \cos(z_n, \hat{z}_1) + c_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-12)$$

对多级坐标变换,遵守式(1-1-12)表示的普遍规则:即待求坐标系 S_n 的每个坐标可写成已知坐标系 S_1 各个坐标的线性表达式和常数项,其线性表达式系数等于各个已知坐标的坐标轴与该待求坐标的坐标轴之间夹角的余弦,常数项等于已知坐标系 S_1 的坐标原点在待求坐标系 S_n 中的相应坐标值。

在实际运用时,对比较简单的多级坐标变换,可直接按式(1-1-12)写出其坐标变换公式。对比较复杂的多级坐标变换,一般引进一个或几个中间坐标系,分步求解。从已知坐标系开始,依次求得各个中间坐标系的坐标变换公式,并将上一个坐标系的变换结果代入下一个坐标系的变换公式中,最后求得待求坐标系的变换公式。

(4) 矢量的坐标变换

在研究齿轮啮合原理时,经常要进行一般矢量在不同坐标系之间的坐标变换。前面讨论点的坐标变换实质是一种特殊矢量——径矢的坐标变换。因为一般矢量在坐标轴上的投影与它的起点在空间的位置无关,坐标轴平移和坐标原点变动不改变矢量在坐标轴上的投影(即坐标)。所以利用点的坐标变换式(1-1-12)做矢量的坐标变换时,应去掉等号右边的第四项,并将点的坐标 x_n, x_1 等换成相应的矢量坐标,其他变换规则是相同的。例如已知矢量 u 在坐标系 S_1 中的坐标为 u_{x1}, u_{y1}, u_{z1} , 求它们在坐标系 S_n 中的坐标 u_{xn}, u_{yn}, u_{zn} , 矢量坐标变换公式为

$$\left. \begin{aligned} u_{xn} &= u_{x1} \cos(x_n, \hat{x}_1) + u_{y1} \cos(x_n, \hat{y}_1) + u_{z1} \cos(x_n, \hat{z}_1) \\ u_{yn} &= u_{x1} \cos(y_n, \hat{x}_1) + u_{y1} \cos(y_n, \hat{y}_1) + u_{z1} \cos(y_n, \hat{z}_1) \\ u_{zn} &= u_{x1} \cos(z_n, \hat{x}_1) + u_{y1} \cos(z_n, \hat{y}_1) + u_{z1} \cos(z_n, \hat{z}_1) \end{aligned} \right\} \quad (1-1-13)$$

1.1.2 利用矩阵进行坐标变换

为了利用矩阵进行坐标变换,必须对坐标变换式(1-1-12)做如下改变:分别在坐标系 S_1, S_n 中引进变量 t_1, t_n , 式(1-1-12)的第四项是 t_1 的系数;令 $t_n = t_1 = 1$, 并为式(1-1-12)增加第4个表示式。于是式(1-1-12)改变为下面的等效式,即

$$\left. \begin{aligned} x_n &= x_1 \cos(x_n, \hat{x}_1) + y_1 \cos(x_n, \hat{y}_1) + z_1 \cos(x_n, \hat{z}_1) + t_1 a_1 \\ y_n &= x_1 \cos(y_n, \hat{x}_1) + y_1 \cos(y_n, \hat{y}_1) + z_1 \cos(y_n, \hat{z}_1) + t_1 b_1 \\ z_n &= x_1 \cos(z_n, \hat{x}_1) + y_1 \cos(z_n, \hat{y}_1) + z_1 \cos(z_n, \hat{z}_1) + t_1 c_1 \\ t_n &= x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + z_1 \cdot 0 + t_1 \cdot 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-14)$$

如果将 x_1, y_1, z_1, t_1 作为变量, x_n, y_n, z_n, t_n 看做常数项,则式(1-1-14)表示一个非齐次线性方程组,可以用矩阵表示,即

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x_n, \hat{x}_1) & \cos(x_n, \hat{y}_1) & \cos(x_n, \hat{z}_1) & a_1 \\ \cos(y_n, \hat{x}_1) & \cos(y_n, \hat{y}_1) & \cos(y_n, \hat{z}_1) & b_1 \\ \cos(z_n, \hat{x}_1) & \cos(z_n, \hat{y}_1) & \cos(z_n, \hat{z}_1) & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \quad (1-1-15)$$

式(1-1-14)可以简记为

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{M}_{n1} \mathbf{r}_1 \quad (1-1-16)$$

式中, $\mathbf{r}_n$ 和 $\mathbf{r}_1$ 分别为同一点在待求坐标系 S_n 和已知坐标系 S_1 的两个径矢的列矩阵。

利用矩阵方法进行坐标变换的关键是求出系数矩阵 $\mathbf{M}_{n1}$, 然后按式(1-1-15)做矩阵乘法, 即求是由已知坐标系各个坐标表示的待求坐标系每个坐标的表达式。根据式(1-1-15), 其系数矩阵 $\mathbf{M}_{n1}$ 为

$$\mathbf{M}_{n1} = \begin{pmatrix} \cos(x_n, \hat{x}_1) & \cos(x_n, \hat{y}_1) & \cos(x_n, \hat{z}_1) & a_1 \\ \cos(y_n, \hat{x}_1) & \cos(y_n, \hat{y}_1) & \cos(y_n, \hat{z}_1) & b_1 \\ \cos(z_n, \hat{x}_1) & \cos(z_n, \hat{y}_1) & \cos(z_n, \hat{z}_1) & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-1-17)$$

矩阵各项系数(矩阵元素)的确定规则和式(1-1-11)表示的坐标轴平移与旋转普遍规则是相同的。如果将待求坐标系 S_n 的坐标轴 x_n, y_n, z_n 代表矩阵的行号 1, 2, 3, 已知坐标系 S_1 的坐标轴 x_1, y_1, z_1 代表矩阵的列号 1, 2, 3, 则矩阵前三行和前三列的每个元素等于其所处位置的行坐标轴与列坐标轴之间夹角的余弦。例如处于 y_n 行与 z_1 列的元素等于 y_n 轴与 z_1 轴之间夹角的余弦 $\cos(y_n, \hat{z}_1)$ 。

对于比较复杂的情况, 从已知坐标系 S_1 到待求坐标系 S_n 要经过多级坐标变换, 引进一个或多个中间坐标系, 这时系数矩阵 $\mathbf{M}_{n1}$ 为多个分系数矩阵的乘积, 即

$$\mathbf{M}_{n1} = \mathbf{M}_{n(n-1)} \cdots \mathbf{M}_{32} \mathbf{M}_{21} \quad (1-1-18)$$

注意等号右边分系数矩阵的顺序不能改变, 每个分系数矩阵均按上述坐标变换普遍规则写出。

同理, 矢量的坐标变换式(1-1-30)也可以写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} u_{xn} \\ u_{yn} \\ u_{zn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x_n, \hat{x}_1) & \cos(x_n, \hat{y}_1) & \cos(x_n, \hat{z}_1) \\ \cos(y_n, \hat{x}_1) & \cos(y_n, \hat{y}_1) & \cos(y_n, \hat{z}_1) \\ \cos(z_n, \hat{x}_1) & \cos(z_n, \hat{y}_1) & \cos(z_n, \hat{z}_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \end{pmatrix} \quad (1-1-19)$$

简记为

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{L}_{n1} \mathbf{u}_1 \quad (1-1-20)$$

矢量坐标变换系数矩阵 $\mathbf{L}_{n1}$, 相当于点的坐标变换矩阵系数 $\mathbf{M}_{n1}$ 去掉了其中的第四行和第四列。分析矩阵 $\mathbf{L}_{n1}$ 的元素可以发现, 其每行元素是坐标系 S_n 的一个坐标轴矢量在坐标系 S_1 中的方向余弦, 其每列元素是坐标系 S_1 的一个坐标轴矢量在坐标系 S_n 中的方向余弦。矢量的方向余弦的平方和等于 1, 所以矩阵 $\mathbf{L}_{n1}$ 每行(列)元素的平方和等于 1。即

$$\left. \begin{aligned} \cos^2(x_n, \hat{x}_1) + \cos^2(x_n, \hat{y}_1) + \cos^2(x_n, \hat{z}_1) &= 1 \\ \cos^2(y_n, \hat{x}_1) + \cos^2(y_n, \hat{y}_1) + \cos^2(y_n, \hat{z}_1) &= 1 \\ \cos^2(z_n, \hat{x}_1) + \cos^2(z_n, \hat{y}_1) + \cos^2(z_n, \hat{z}_1) &= 1 \\ \cos^2(x_n, \hat{x}_1) + \cos^2(y_n, \hat{x}_1) + \cos^2(z_n, \hat{x}_1) &= 1 \\ \cos^2(x_n, \hat{y}_1) + \cos^2(y_n, \hat{y}_1) + \cos^2(z_n, \hat{y}_1) &= 1 \\ \cos^2(x_n, \hat{z}_1) + \cos^2(y_n, \hat{z}_1) + \cos^2(z_n, \hat{z}_1) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-21)$$

上式表明,在矩阵 L_{n1} 的 9 个元素中,只有 3 个是独立的。根据矩阵 L_{n1} 每行(列)元素的平方和等于 1 这一规则,可以检验所写矩阵元素是否正确。

例题 1 如图 1-1-4 所示,坐标系 S_2 相对已知坐标系 S_1 沿 x_1, y_1, z_1 平移距离 a, b, c 至 O_2 后,又绕 z_2 轴旋转 ϕ 角,求坐标系 S_2 的表示式。

解 本题并不复杂,可以采用解析几何方法分步求解。为了熟悉矩阵方法,我们利用矩阵求解。根据式(1-1-16),有

$$r_2 = M_{21} r_1 \quad (1-1-22)$$

引进中间坐标系 S_p , 根据式(1-1-19),系数矩阵 M_{21} 为

$$M_{21} = M_{2p} M_{p1}$$

坐标变换规则可简单叙述为:以待求系坐标轴为准,转轴则求与已知系各坐标轴夹角余弦,移轴则求已知系原点坐标。据此有

$$M_{p1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{2p} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-1-23)$$

根据“行乘列”的矩阵乘法法则,系数矩阵 M_{21} 为

$$\begin{aligned} M_{21} &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & -a\cos\phi + b\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & -a\sin\phi \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-1-24)$$

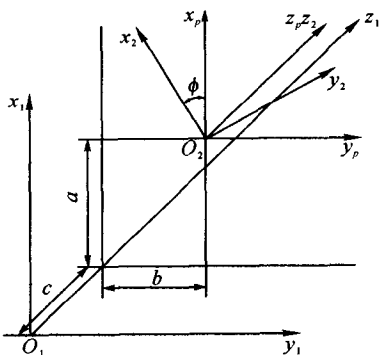


图 1-1-4

按式(1-1-15),坐标变换矩阵表示形式为

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & -a\cos\phi + b\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & -a\sin\phi - b\cos\phi \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (1-1-25)$$

做矩阵乘法,得到和式(1-1-11)一样的坐标变换公式为

$$x_2 = x_1 \cos\phi - y_1 \sin\phi - (a\cos\phi - b\sin\phi) \quad (1-1-26)$$

$$y_2 = x_1 \sin\phi + y_1 \cos\phi - (a\sin\phi + b\cos\phi)$$

$$z_2 = z_1 - c$$

注意 $t_2 = t_1 = 1$ 。

1.1.3 对称的坐标变换矩阵

如图 1-1-5 所示, $S(O-x, y, z)$ 及 $S_p(O_p-x_p, y_p, z_p)$ 是两个在空间固定的坐标系, z 轴与齿轮 1 的回转轴重合, z_p 轴与齿轮 2 的回转轴重合, 两轴线之间的夹角为 Σ , x 轴与 x_p 轴重合, 分别指向对方的坐标原点, 它们的方向就是两轴线的最短距离方向。

坐标系 $S_1(O_1-x_1, y_1, z_1)$ 与齿轮 1 固联, 坐标系 $S_2(O_2-x_2, y_2, z_2)$ 与齿轮 2 固联, 在起始位置时, 它们分别与 S 及 S_p 重合。齿轮 1 以匀角速度绕 z 轴转动, 并以速度 v_0^1 沿 z 轴匀速移动。齿轮 2 以匀角速度 $\omega^{(2)}$ 绕 z_p 轴转动, 并以速度 v_0^2 沿 z_p 轴匀速移动。从起始位置经过一段时间后, $OO_1 = l_1$, $O_p O_2 = l_2$, 齿轮 1 绕 z 转过 φ_1 角, 齿轮 2 绕 z_p 轴转动 φ_2 角, 坐标变换矩阵为:

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{10} \mathbf{M}_{op} \mathbf{M}_{p2} \quad (1-1-27)$$

$$\mathbf{M}_{10} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-1-28)$$

$$\mathbf{M}_{op} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -\cos\Sigma & -\sin\Sigma & 0 \\ 0 & -\sin\Sigma & \cos\Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{po} \quad (1-1-29)$$

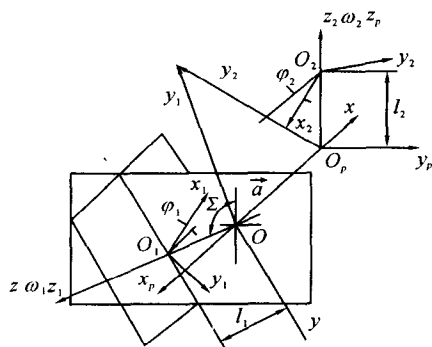


图 1-1-5

$$\mathbf{M}_{p2} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-1-30)$$

$$\mathbf{M}_{1p} = \mathbf{M}_{10} \mathbf{M}_{op} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \cos\Sigma & \sin\Sigma \sin\varphi_1 & a \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \cos\Sigma & -\cos\varphi_1 \sin\Sigma & -a \sin\varphi_1 \\ 0 & -\sin\Sigma & \cos\Sigma & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-1-31)$$

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{1p} \mathbf{M}_{2p} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\Sigma & -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Sigma & -\sin\varphi_1 \sin\Sigma & -l_2 \sin\varphi_2 \sin\Sigma + a \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\Sigma & -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Sigma & -\cos\varphi_1 \sin\Sigma & -l_2 \cos\varphi_1 \sin\Sigma - a \sin\varphi_1 \\ -\sin\Sigma \sin\varphi_2 & -\sin\Sigma \cos\varphi_2 & \cos\Sigma & l_1 \cos\Sigma - l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-1-32)$$

不难验证,在上式矩阵中,只要将下标 1 换成 2,下标 2 换成 1,就成为矩阵 $\mathbf{M}_{21}$ 。

1.1.4 对称坐标系下的啮合方程式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^{(1)} &= \omega_1 \mathbf{k} & \mathbf{v}_{01} &= v_{01} \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega}^{(2)} &= \omega_2 \mathbf{k}_p & \mathbf{v}_{02} &= v_{02} \mathbf{k}_p = v_{02} (-\sin\Sigma \mathbf{j} + \cos\Sigma \mathbf{k}) \\ \mathbf{v}^{(12)} &= \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \mathbf{r}^{(2)} + \mathbf{v}_{01} - \mathbf{v}_{02} \\ \mathbf{r}^{(2)} &= \mathbf{r}^{(1)} + \mathbf{a} & \mathbf{a} &= -a \mathbf{i} \end{aligned} \quad (1-1-33)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ x & y & z \end{bmatrix} = \omega_1 (-iy + jx)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \mathbf{r}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -\sin\Sigma & \cos\Sigma \\ x & y & z \end{bmatrix} \omega_2$$

$$= \omega_2 [\mathbf{i}(-z \sin\Sigma - y \cos\Sigma) + \mathbf{j}(x - a) \cos\Sigma + \mathbf{k}(x - a) \sin\Sigma]$$

以上诸式代入式(1-1-33),经整理得:

$$v_x^{(12)} = -\omega_1 y + \omega_2 (z \sin\Sigma + y \cos\Sigma)$$

$$v_y^{(12)} = \omega_1 x - (x - a) \cos\Sigma \omega_2 + v_{02} \sin\Sigma$$

$$v_z^{(12)} = -(x - a) \sin\Sigma \omega_2 + v_{01} - \cos\Sigma v_{02}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{(12)} = 0 \quad \text{啮合条件式}$$

$$\begin{aligned} n_x [-\omega_1 y + \omega_2 (z \sin\Sigma + y \cos\Sigma)] + n_p [\omega_1 x - (x - a) \cos\Sigma \omega_2 + v_{02} \sin\Sigma] \\ + n_z [-(x - a) \sin\Sigma \omega_2 + v_{01} - v_{02} \cos\Sigma] \end{aligned}$$