高等学校经典教材配套辅导丛书

通信原理
辅导及习题精解

第五版

胡冰新 刘景夏 吕 俊 编著

新版

★ 知识内容归纳 ★ 重点难点剖析
★ 典型例题精选 ★ 教材习题全解

陕西师范大学出版社
SHAANXI NORMAL UNIVERSITY PRESS

高等学校经典教材配套辅导丛书

通信原理
辅导及习题精解
第五版

胡冰新　刘景夏　吕　俊　编著

陕西师范大学出版社
SHAANXI NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书代号:JF6N0707

图书在版编目(CIP)数据

通信原理辅导及习题精解/胡冰新主编. 一西安:陕西师范大学出版社,2006.8

(高等学校经典教材配套辅导丛书)

ISBN 7-5613-3614-4/T·12

Ⅰ.通… Ⅱ.胡… Ⅲ.通信理论—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 057347 号

本书是与樊昌信主编、国防工业出版社出版的《通信原理》(第五版)一书相配套的辅导用书,涵盖了《通信原理》(第五版)的全部 171 道习题,读者可根据需要选择不同的内容进行学习和参考。书中每一章都明确指出了学习目标,总结了学习要点,对重点内容进行了例题解析,每道习题在解答之前都提供了解题思路,有助于培养读者的推理能力。这些习题涵盖了通信原理的各个基本知识点,许多习题都来源于实际应用,具有较强的针对性。通过对解题过程的学习和锻炼,将会进一步提高读者的科学思维和分析实际问题的能力,增强读者对课程理论的理解和把握,达到拓展思路、举一反三的目标。

本书可作为通信、电子、信息、指挥自动化等专业的本、专科学生的自学辅导教材,也可作为相关专业学生的考研辅导用书。

责任编辑 陈光明 彭 青

装帧设计 王静婧

出版发行 陕西师范大学出版社

社 址 西安市陕西师大 120#(邮政编码:710062)

网 址 http://www.snuph.com

经 销 新华书店

印 刷 南京金阳彩色印刷有限公司

开 本 787×960 1/16

印 张 14.5

字 数 254 千

版 次 2006 年 9 月第 1 版

印 次 2006 年 9 月第 1 次印刷

定 价 17.80 元

开户行:光大银行西安电子城支行 账号:0303080—00304001602

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电 话:(029)85307864 85233753 85251046(传真)

E-mail:if-centre@snuph.com

前言

通信原理主要研究信息的传输、交换及通信网的基本原理、基本概念和基本方法，侧重于信息的传输过程，它主要研究如何建立通信系统的数学模型，详细讲解随机信号分析、信道、模拟调制、数字基带传输、数字调制、模/数转换与传输、最佳接收、纠错编码、伪随机系列、同步和通信网的基础知识。它是通信、计算机、网络和信息等专业的专业课程，其先修课程是电路分析基础、信号与系统、模拟电子线路、数字电路等。通信原理是许多学科专业的研究生考试必考课程，课程地位十分重要。

通信原理课程的一个特点是数学性较强，需要做一定数量的习题，许多知识点只有在做题之后才能理解深刻。为了帮助学生更加系统地掌握通信原理的基本知识和分析方法，熟悉通信原理的解题思路，并抓住重点进行复习和巩固，我们基于樊昌信主编的《通信原理》(第五版)编写了本习题精解。选用该教材的原因，是它比较系统而全面地包括了该课程的经典内容，同时又进行了适度延伸，融入了通信、程控交换等领域的较新的技术内容。对基本理论与实际应用的关系处理得当，剪裁合理。其选用习题内容的详略和难度分布均符合学生的学习规律。

本书由胡冰新主编，刘景夏、吕俊参编。其中胡冰新负责编写了第 1 至 3 章、第 8 至 12 章的习题解答和内容辅导部分，刘景夏负责编写了第 4 至 7 章的内容辅导部分，吕俊负责第 4 至 7 章的习题解答以及全书的内容审校和体例设计。

衷心感谢陕西师范大学出版社南京事业部的任平主任、陈光明老师和全体工作人员，是他们的敬业精神和辛勤工作使本书得以顺利出版。

虽然我们已经做了很多努力，但限于水平，书中难免错漏和不妥之处，恳请读者不吝斧正。

作　者

2006 年 7 月于南京

目　录

第 1 章　绪　论

学习目标

熟练掌握通信系统的组成，熟悉通信系统的模型；掌握通信系统的分类方法以及三种通信方式，理解串行传输和并行传输的概念；重点把握信息的含义，掌握信息量的定义及其单位，了解信息熵的概念；熟悉通信系统的性能指标：有效性、可靠性。

学习要点

一、通信的基本概念

通信按照传统的理解就是信息的传输与交换；通信原理主要讨论信息的传输、交换及通信网基本原理。

二、通信系统的组成

1. 通信系统模型

基本的点对点通信均是把发送端消息通过某种信道传递到接收端，可由图 1－1 中模型加以概括。

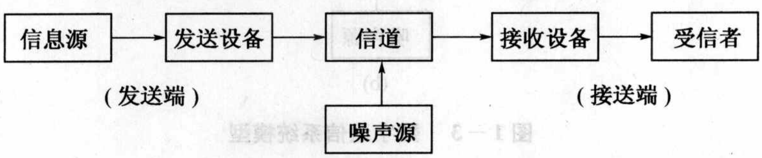


图 1－1　通信系统的简化模型

2. 模拟通信与数字通信系统模型

我们把信道中传输模拟信号的系统称为模拟通信系统，可由图 1－2 中模型加以概括。

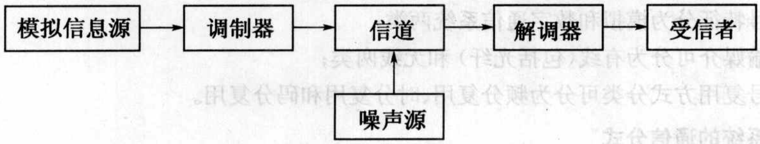


图 1－2　模拟通信系统模型

信道中传输数字信号的系统，称为数字通信系统，并可进一步细分为数字频带通信系统、数字基带通信系统和模拟信号数字化通信系统。

数字通信的基本特征是，它传输的信号是“离散”的。

数字通信的优点包括：

(1) 抗干扰能力强；

(2) 传输差错可以控制，改善了传输质量；

(3) 便于使用现代数字信号处理技术来对数字信息进行处理；

(4) 数字信息易于做加密处理，更加安全；

(5) 数字通信可以综合传递多种消息，功能较强；

数字通信的突出问题包括：

(1) 差错控制编码需要增加系统设备：编码器与解码器；

(2) 在保密通信时，接收端需要进行解密，增加了系统复杂度；

(3) 存在同步问题，实现难度大；

(4) 频带利用率较低。

数字通信系统的模型可由图 1—3 的模型加以概括。

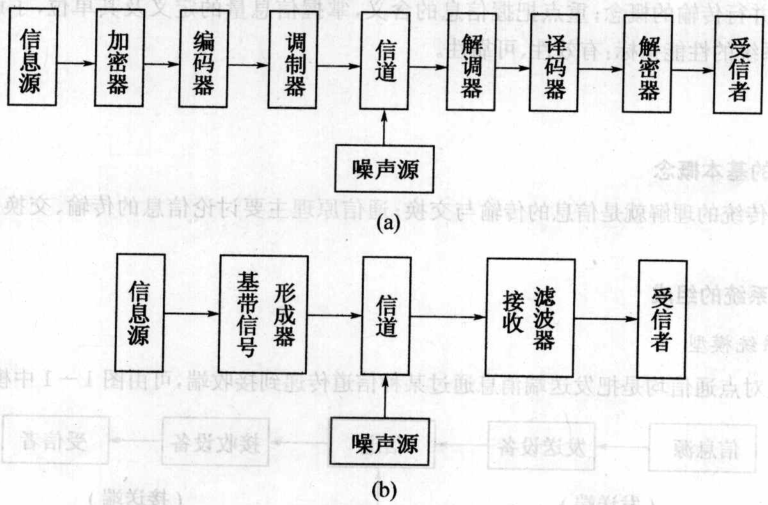


图 1—3　数字通信系统模型

三、通信系统的分类

通信系统有不同的分类方法。包括：

(1) 按消息的物理特征分为电报、电话、数据、图像等通信系统；

(2) 按调制方式分为基带传输和频带(调制) 传输；

(3) 按信号特征分为模拟和数字通信系统两类；

(4) 按传输媒介可分为有线(包括光纤) 和无线两类；

(5) 按信号复用方式分类可分为频分复用、时分复用和码分复用。

四、通信系统的通信分式

按消息传送的方向与时间关系，通信方式可分为单工通信、半双工通信和全双工通信三种。如图 1—4 所示。

在数字通信中，按照数字信号码元排列方法不同，有串行传输与并行传输之分。

所谓串行传输，是将数字信号码元序列按时间顺序一个接一个地在信道中传输的方式；如果将代表信息的数字信号序列分割成两路或两路以上的数字信号序列同时在信道上传输，则称为并行传输。如图 1—5 所示。

按通信网络形式分，包括点对点方式，分支方式与交换方式。

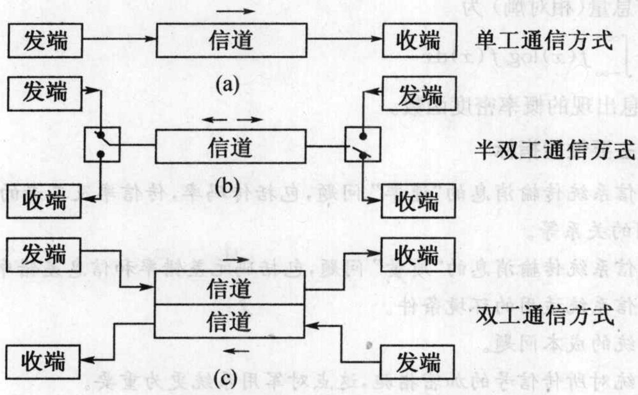
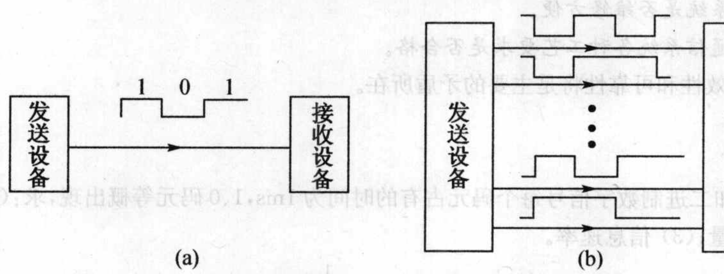


图 1－4　通信方式示意图



（a）串行传输　（b）并行传输

图 1－5　串行和并行方式传输

五、信息及其度量

1. 信息的含义

信息可被理解为消息中包含的有意义的内容。

2. 信息量

消息 x 所含的信息量 I 可定义为

$$I = \log_a \frac{1}{P(x)} = -\log_a P(x) \quad ①$$

其中 $P(x)$ 是消息 x 出现的概率。

信息量的单位包括：比特（对数底 $a = 2$ 时）、奈特（对数底 $a = e$ 时）和哈特莱（对数底为 $a = 10$ 时）。

3. 信息源的熵

设离散信息源是一个由 n 个符号组成的集合，其中各符号出现的概率为

$$\begin{bmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ P(x_1), & P(x_2), & \cdots, & P(x_n) \end{bmatrix}$$

且有 $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$，则平均信息量（又称为信息源的熵）为

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i) \log_2 P(x_i) \text{(bit/ 符号)}$$

连续信息源的平均信息量(相对熵)为

$$H_1(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log_e f(x)\mathrm{d}x \tag{②}$$

式中 $f(x)$ 为连续消息出现的概率密度函数。

六、通信系统的主要性能指标

1. 有效性:指通信系统传输消息的"速率"问题,包括传码率,传信率及二者的互换关系、多进制与二进制传输速率之间的关系等。

2. 可靠性:指通信系统传输消息的"质量"问题,包括码元差错率和信息差错率。

3. 适应性:指通信系统适用的环境条件。

4. 经济性:指系统的成本问题。

5. 保密性:指系统对所传信号的加密措施,这点对军用系统更为重要。

6. 标准性:指系统的接口、结构及协议是否合乎国家、国际标准。

7. 维修性:指系统是否维修方便。

8. 工艺性:指通信系统各种工艺要求是否合格。

其中通信的有效性和可靠性将是主要的矛盾所在。

例题解析

例 1－1　已知二进制数字信号每个码元占有的时间为 1ms,1、0 码元等概出现,求:(1) 码元速率;(2) 每秒钟的信息量;(3) 信息速率。

【解题思路】　对于二进制信号,码元速率　$R_{B2} = \dfrac{1}{T_b}(\mathrm{B})$,

一个码元包含的信息量　$I = \log_2 2 = 1(\mathrm{bit})$

每秒钟的信息量即为信息速率　$R_{b2} = (\log_2 2)\cdot R_{B2} = R_{B2}(\mathrm{b/s})$

【解】　由分析可求得:

(1) 码元速率　$R_{B2} = \dfrac{1}{T_b} = \dfrac{1}{1\mathrm{ms}} = 1000(\mathrm{B})$

(2) 每秒的信息量 = 信息速率 = $R_{B2} = 1000(\mathrm{b/s})$

即对于二进制数字信号,其信息速率和码元速率两者在数值上相等,只是单位不同而已。

例 1－2　已知八进制数字信息的码元速率为 1000B,且各种码元等概出现,求:(1) 每个码元的信息量;(2) 信息速率。

【解题思路】　(1) 对于八进制信号,各码元等概出现时,每个码元含有的信息量为　$I_8 = \log_2 8 = 3(\mathrm{bit})$

(2) 其信息速率　$R_{b8} = (\log_2 8)\cdot R_{B8}$

【解】　由分析可求得

(1) 每个码元的信息量为　$I = 3(\mathrm{bit})$

(2) 信息速率为　$R_{b8} = 3\cdot R_{B8} = 3000(\mathrm{bit/s})$

例 1－3　一个二进制数字通信系统,码元速率为 10000B,连续发送一小时以后,接收端收到的错码为 10 个,求误码率 P_e。

【解题思路】　误码率　$P_e = \lim\limits_{n_B\to\infty} \dfrac{n_{eB}(\text{差错码元数})}{n_B(\text{传输的码元总数})}$

【解】 1小时传输的码元总数为

$$n_B = 10000 \times 3600 = 3.6 \times 10^7$$

则误码率为

$$P_e = \frac{n_{eB}}{n_B} = \frac{10}{3.6 \times 10^7} \approx 2.78 \times 10^{-7}$$

习题精解

题 1－1 设英文字母 E 出现的概率为 0.105，x 出现的概率为 0.002。试求 E 及 x 的信息量。

【解题思路】 利用信息量的定义式求解。(见教材式 1.4－3)

【解】 E 的信息量

$$I = \log_2 \frac{1}{P(E)} = -\log_2 0.105 = 3.25\text{bit}$$

X 的信息量

$$I = \log_2 \frac{1}{P(X)} = -\log_2 0.002 = 8.97\text{bit}$$

题 1－2 某信息源的符号集由 A,B,C,D 和 E 组成，设每一符号独立出现，其出现概率分别为 1/4，1/8，1/8，3/16 和 5/16。试求该信息源符号的平均信息量。

【解题思路】 平均信息量又称为信息源的熵，可利用其定义式求解。(见教材式 1.4－9)

【解】 $H = \frac{1}{4}\log_2\left(1/\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\log_2\left(1/\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8}\log_2\left(1/\frac{1}{8}\right) + \frac{3}{16}\log_2\left(1/\frac{3}{16}\right) + \frac{5}{16}\log_2\left(1/\frac{5}{16}\right)$

$$= \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 \times 2 + \frac{3}{16} \times \log_2 \frac{16}{3} + \frac{5}{16}\log_2 \frac{16}{5}$$

$$= 0.5 + 0.75 + 0.453 + 0.524$$

$$= 2.23\text{bit/ 符号}$$

题 1－3 设有四个消息 A,B,C,D 分别以概率 1/4，1/8，1/8 和 1/2 传送，每一消息的出现是相互独立的。试计算其平均信息量。

【解题思路】 利用熵的定义式求解。

【解】 $H = \frac{1}{4}\log_2 1/\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\log_2 1/\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\log_2 1/\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\log_2 1/\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} = 1.75\text{bit/ 符号}$$

题 1－4 一个由字母 A,B,C,D 组成的字。对于传输的每一个字母用二进制脉冲编码，00 代替 A，01 代替 B，10 代替 C，11 代替 D，每个脉冲宽度为 5ms。

(1) 不同的字母是等可能出现时，试计算传输的平均信息速率；

(2) 若每个字母出现的可能性分别为

$$P_A = \frac{1}{5},\quad P_B = \frac{1}{4},\quad P_C = \frac{1}{4},\quad P_D = \frac{3}{10}$$

试计算传输的平均信息速率。

【解题思路】 平均信息速率(bit/s) = 平均信息量(bit/ 符号) × 符号传输速率(符号 /s)。

【解】 (1) 不同字母等概出现时，平均信息量为

$$H = \log_2 1/\frac{1}{4} = \log_2 4 = 2(\text{bit/ 符号})$$

由题可知系统为四进制，一个符号用两个二进制脉冲表示，因此符号传输速率为

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{5\text{ms}}=100(\text{符号}/\text{s})$$

故有平均信息速率为 $2\times100=200(\text{bit/s})$。

(2) 同上，先得平均信息量为

$$H=\frac{1}{5}\log_2\left(1/\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\log_2\left(1/\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\log_2\left(1/\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{10}\log_2\left(1/\frac{3}{10}\right)$$

$$=0.464+\frac{1}{4}\times2\times2+0.521=1.985(\text{bit}/\text{符号})$$

故有平均信息速率为

$$1.985\times100=198.5(\text{bit/s})$$

题 1—5　国际莫尔斯电码用点和划的序列发送英文字母，划用持续 3 单位的电流脉冲表示，点用持续 1 个单位的电流脉冲表示；且划出现的概率是点出现概率的 1/3：

(1) 计算点和划的信息量；

(2) 计算点和划的平均信息量。

【解题思路】　利用信息量和熵的定义式求解。(见教材式 1.4—3 和 1.4—9)

【解】　(1) 由题意可知，划出现的概率 $P_1=\frac{1}{4}$，故划的信息量

$$I_1=\log_2(1/P_1)=\log_2 4=2(\text{bit})$$

点出现的概率 $P_2=\frac{3}{4}$，故点的信息量

$$I_2=\log_2(1/P_2)=\log_2\frac{4}{3}=0.415(\text{bit})$$

(2) 平均信息量

$$H=P_1\log_2(1/P_1)+P_2\log_2(1/P_2)$$

$$=\frac{1}{4}\times2+\frac{3}{4}\times0.415=0.811(\text{bit}/\text{符号})$$

题 1—6　设一信息源的输出由 128 个不同符号组成。其中 16 个出现的概率为 1/32，其余 112 个出现概率为 1/224。信息源每秒发出 1000 个符号，且每个符号彼此独立。试计算该信息源的平均信息速率。

【解题思路】　平均信息速率 = 平均信息量 × 符号传输速率。

【解】　由题意可知平均信息量

$$H=16\times\frac{1}{32}\log_2\left(1/\frac{1}{32}\right)+112\times\frac{1}{224}\log_2\left(1/\frac{1}{224}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log_2 32+\frac{1}{2}\log_2 224$$

$$=2.5+3.904=6.404(\text{bit}/\text{符号})$$

又知信源每秒发出 1000 个符号，故可得平均信息速率为

$$H\times1000=6.404\times10^3(\text{bit/s})$$

题 1—7　对于二电平数字信号，每秒钟传输 300 个码元，问此传码率 R_B 等于多少？若该数字信号 0 和 1 出现是独立等概的，那么传信率 R_b 等于多少？

【解题思路】　在数字信号独立等概出现时，传码率 R_B 与传信率 R_b 满足关系式

$$R_b=R_B\log_2 N(\text{bit/s})$$

【解】　在传送二进制码元时，$N=2, R_B=1200\text{B}$，故

系统的传信率为　$R_b=1200\times\log_2 2=1200\text{bit/s}$

在传送十六进制码元时，$N=16, R_B=2400\text{B}$，故

系统的传信率为　$R_b=2400\times\log_2 16=9600\text{bit/s}$

题1－8　若题1－2中信息源以1000B速率传送信息，则传送1小时的信息量为多少?传送1小时可能达到的最大信息量为多少?

【解题思路】　平均信息速率＝平均信息量×码元速率，其中平均信息量的最大值发生在每一符号等概率出现时。

【解】　由题1－2可知，平均信息量

$$H=2.23(\text{bit/符号})$$

又由题可知码元速率为

$$R_B=1000(\text{B})$$

故有平均信息速率为

$$R_b=H\times R_B=2.23\times10^3(\text{bit/s})$$

传送1小时的信息量为

$$I=3600\times2.23\times10^3=8.028\times10^6(\text{bit})$$

要达到最大信息量，必然要每个符号等概率出现，此时平均信息量

$$H=\log_2 5=2.32(\text{bit/符号})$$

同上可得传送1小时的最大信息量为

$$I=3600\times2.32\times10^3=8.352\times10^6(\text{bit})$$

题1－9　如果二进独立等概信号，码元宽度为0.5ms，求R_B和R_b；有四进制信号，码元宽度为0.5ms，求传码率R_B和独立等概时的传信率R_b。

【解题思路】　二进制下独立等概信号满足式$R_B=R_b$。

四进制下独立等概信号满足式$R_b=R_{B4}\log_2 4=2R_{B4}$。

【解】　二进制下独立等概信号有：

$$R_B=\frac{1}{0.5\text{ms}}=2000(\text{B})$$

$$R_b=2000(\text{bit/s})$$

四进制下独立等概信号有：

$$R_{B4}=\frac{1}{0.5\text{ms}}=2000(\text{B})$$

$$R_b=2R_{B4}=2\times2000=4000(\text{bit/s})$$

第2章　随机信号分析

学习目标

熟悉随机过程的定义，掌握随机过程的统计特性描述方法，即其概率分布或数字特征，会计算常见随机过程的数学期望、方差和相关函数；熟练掌握平稳随机过程的定义、相关函数和功率谱密度计算过程；重点掌握高斯过程和窄带随机过程的概率分布、数字特征及其特点，会计算正弦波加窄带高斯过程的包络及概率分布，能够进行随机过程通过线性系统的统计分析。

学习要点

一、随机过程的一般表述

通信过程中的随机信号和噪声均可归纳为依赖于时间参数 t 的随机过程，其数学定义如下：

设随机试验 E 的可能结果为 $\xi(t)$，试验的样本空间 S 为 $\{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_i(t), \cdots\}$，$i$ 为正整数，$x_i(t)$ 为第 i 个样本函数，每次试验之后，$\xi(t)$ 取空间 S 中的某一样本函数，于是称此 $\xi(t)$ 为随机函数，当 t 代表时间量时，称此 $\xi(t)$ 为随机过程。

随机过程的统计特性可以用分布函数或概率密度函数去描述，称

$$F_1(x_1,t_1) = P\{\xi(t_1) \leqslant x_1\} \qquad ①$$

为随机过程 $\xi(t)$ 的一维分布函数。n 维的情况可类似给出。

如果存在

$$\frac{\partial F_1(x_1,t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1,t_1), \qquad ②$$

则称 $f_1(x_1,t_1)$ 为 $\xi(t)$ 的一维概率密度函数。n 维的情况可类似给出。

随机过程 $\xi(t)$ 的数学期望（统计平均值、均值）定义为：

$$E[\xi(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x,t)\mathrm{d}x, \qquad ③$$

记为 $E[\xi(t_1)] = a(t)$。

随机过程的方差定义为：

$$D[\xi(t_1)] = E\{\xi(t_1) - E[\xi(t_1)]\}^2 \qquad ④$$

也常记为 $\sigma^2(t)$。

相关函数 $R(t_1,t_2)$ 定义为

$$R(t_1,t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \qquad ⑤$$

其中 $f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$ 为二维概率密度函数。

二、平稳随机过程

所谓平稳随机过程，即指它的任何 n 维分布函数或概率密度与时间起点无关。它的一维分布与 t 无关，二维分布只与时间间隔 τ 有关。即

$R(t_1, t_1+\tau) = R(\tau)$

在通信系统中所遇到的信号及噪声，大多数均可视为平稳的随机过程。

平稳随机过程具有“各态历经性”，即假设 $X(t)$ 是平稳随机过程，并令

$$\begin{cases} \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t)\mathrm{d}t = \overline{a} \\ \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t = \overline{R(\tau)} \end{cases} \quad ⑥$$

则平稳随机过程往往有下列式子成立：

$$\begin{cases} a = \overline{a} \\ R(\tau) = \overline{R(\tau)} \end{cases} \quad ⑦$$

三、平稳随机过程的相关函数与功率谱密度

1. 相关函数

设 $\xi(t)$ 为实平稳随机过程，则它的自相关函数性质包括

(1) $R(0) = E[\xi^2(t)] = S$ 为 $\xi(t)$ 的平均功率。 ⑧

(2) $R(\tau) = R(-\tau)$。 ⑨

(3) $|R(\tau)| \leqslant R(0)$。 ⑩

(4) $R(\infty) = E^2[\xi(t)]$ 为 $\xi(t)$ 的直流功率。 ⑪

(5) $R(0) - R(\infty) = \sigma^2$ 为 $\xi(t)$ 的交流功率。 ⑫

2. 频谱特性

设 $\xi(t)$ 的功率谱密度为 $P_\xi(\omega)$，则有

$$P_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \quad ⑬$$

即 $\xi(t)$ 的自相关函数与其功率谱密度之间互为傅里叶变换关系。

四、几种重要的随机过程

1. 高斯过程（正态随机过程）

高斯过程 $\xi(t)$ 是指它的任意 n 维（$n = 1, 2, \cdots$）概率密度函数由下式表示

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n |\boldsymbol{B}|^{1/2}} \times \exp\left[\frac{-1}{2|\boldsymbol{B}|}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|\boldsymbol{B}|_{jk}\left(\frac{x_j - a_j}{\sigma_j}\right)\left(\frac{x_k - a_k}{\sigma_k}\right)\right] \quad ⑭$$

其中 $a_k = E[\xi(t_k)]$，$\sigma_k^2 = E[\xi(t_k) - a_k]^2$；$|\boldsymbol{B}|$ 为归一化协方差矩阵的行列式；$|\boldsymbol{B}|_{jk}$ 为行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 中某一元素 b_{jk} 的代数余因子。

高斯过程若是宽平稳的，则必是严平稳的。如果高斯过程中的随机变量之间互不相关，则它们也是统计独立的。

对于一维分布，称如下的正态分布为标准化的，即

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad ⑮$$

误差函数定义式为

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z \quad ⑯$$

补误差函数

$$\operatorname{erfc}(x)=1-\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z \tag{17}$$

误差函数与正态分布函数关系密切,可查表求得。

2. 窄带随机过程

(1) 定义

窄带随机过程可用下式表示

$$\xi(t)=a_\xi(t)\cos[\omega_c t+\varphi_\xi(t)]\qquad a_\xi(t)\geqslant 0 \tag{18}$$

其中 $a_\xi(t)$、$\varphi_\xi(t)$ 是窄带随机过程 $\xi(t)$ 的包络函数及随机相位函数;ω_c 是正弦波的中心角频率,且 $a_\xi(t)$、$\varphi_\xi(t)$ 变化比载波 $\cos\omega_c t$ 的变化要缓慢得多。

(2) 图形表示

随机过程的频谱限制在某一中心频率 f_c 附近很窄的频带上,且 $f_c\gg 0$。

波形满足 $\Delta f\ll f_c$。如图 2－1 所示。

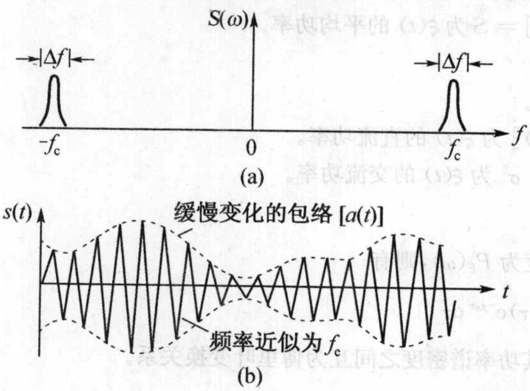


图 2－1　窄带波形的频谱及示意波形

(3) 同相分量与正交分量

窄带过程可以表示成同相分量与正交分量的形式:

$$\xi(t)=\xi_c(t)\cos\omega_c t-\xi_s(t)\sin\omega_c t \tag{19}$$

其中 $\xi_c(t)=a_\xi(t)\cos\varphi_\xi(t)$ 为同相分量;$\xi_s(t)=a_\xi(t)\sin\varphi_\xi(t)$ 为正交分量。

(4) 统计特性的性质

一个均值为零的窄带平稳高斯过程,它的同相分量 $\xi_c(t)$ 和正交分量 $\xi_s(t)$ 同样是平稳高斯过程,而且均值都为零,方差也相同。

一个均值为零、方差为 σ_ξ^2 的平稳高斯窄带过程,其包络 $a_\xi(t)$ 的一维分布是瑞利分布,而其相位 $\varphi_\xi(t)$ 的一维分布是均匀分布,就一维分布而言,a_ξ 与 φ_ξ 是统计独立的。

3. 正弦波加窄带高斯过程

混合信号形式为

$$\begin{aligned}r(t)&=A\cos(\omega_c t+\theta)+n(t)=A\cos(\omega_c t+\theta)+[x(t)\cos\omega_c t-y(t)\sin\omega_c t]\\&=[A\cos\theta+x(t)]\cos\omega_c t-[A\sin\theta+y(t)]\sin\omega_c t\end{aligned} \tag{20}$$

令 $z_c(t)=A\cos\theta+x(t)$,$z_s(t)=A\sin\theta+y(t)$,则包络随机变量为

$$z = \sqrt{z_c^2 + z_s^2}, z \geqslant 0$$

服从概率分布

$$f(z) = \frac{z}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2 + A^2)\right] I_0\left(\frac{A_z}{\sigma^2}\right) \qquad z \geqslant 0 \tag{㉑}$$

相位随机变量为

$$\varphi = \arctan\frac{z_s}{z_c}, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

服从概率分布

$$f(\varphi) = \int_0^{2\pi} f(\varphi, \theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} f(\varphi \mid \theta) f(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{㉒}$$

上式形式比较复杂，没有简洁的结果。

式 ㉑ 描述的分布被称为广义瑞利分布，也称莱斯密度函数。

图 2－2 给出了几个特定的 $A^2/2\sigma^2$ 下的 $f(z)$ 曲线及 $f(\varphi \mid \theta)$ 曲线。

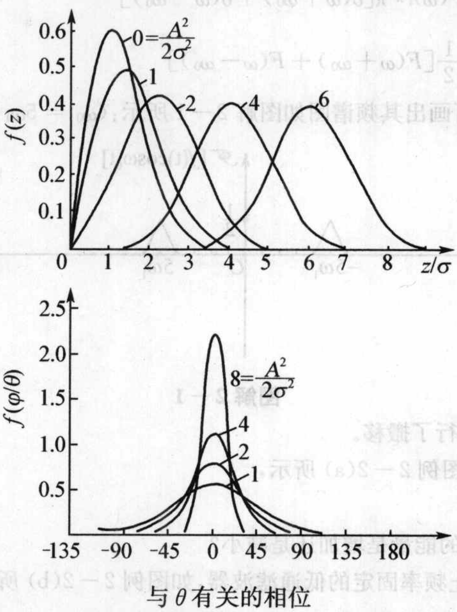


图 2－2　正弦波加高斯窄带过程的包络和相位分布

4. 随机过程通过线性系统（冲激响应为 $h(t)$）

只要线性系统的输入有界且系统物理可实现，则当输入是随机过程 $\xi_i(t)$ 时，便有输出随机过程 $\xi_0(t)$，且有

$$\xi_0(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)\xi_i(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{㉓}$$

假设输入 $\xi_i(t)$ 是平稳随机过程，则有

(1) $E[\xi_0(t)] = \mu_i \cdot \int_0^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = \mu_i \cdot H(0)$　（与 t 无关）　㉔

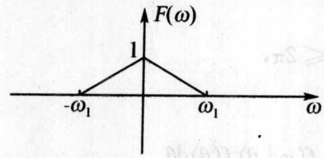
(2) $R_0(t_1, t_1+\tau) = R_0(\tau)$ 与时间起点 t_1 无关。

(3) $P_{\xi_0}(\omega) = |H(\omega)|^2 P_{\xi_i}(\omega)$

(4) 高斯过程经线性变换后的过程仍为高斯的。

例题解析

例 2－1　已知 $f(t)$ 的频谱函数如图例 2－1 所示，画出 $f(t)\cos\omega_0 t$ 的频谱函数图，设 $\omega_0=5\omega_1$。



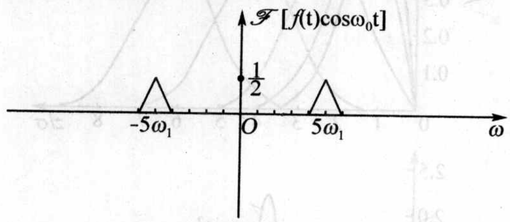
图例 2－1

【解题思路】　由傅氏变换的运算特性可知　$f_1(t)f_2(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{2\pi[F_1(\omega)*F_2(\omega)]}$，

则本题中　$f(t)\cos\omega_0 t\leftrightarrow\dfrac{1}{2\pi}F(\omega)*\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

$$=\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$$

【解】　根据以上分析，可画出其频谱图如图解 2－1 所示：($\omega_0=5\omega_1$)。



图解 2－1

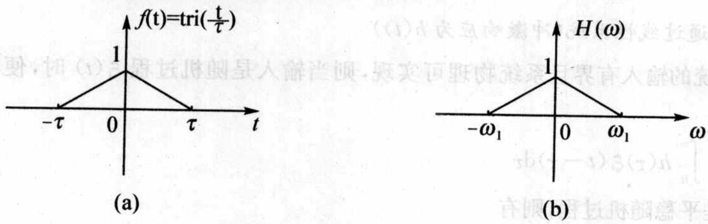
此即相当于对 $f(t)$ 的频谱进行了搬移。

例 2－2　已知 $f(t)$ 如图例 2－2(a) 所示，

(1) 求 $F(\omega)$；

(2) 当 τ 增加时，此信号的能量是增加还是减小？

(3) 此信号通过一个截止频率固定的低通滤波器，如图例 2－2(b) 所示，滤波器输出端的能量随 τ 的增加，它是增加还是减小？



图例 2－2

【解题思路】　(1) 由观察可知，$f(t)$ 可以由两个门函数 $g_\tau(t)$ 卷积得到，即 $f(t)=\dfrac{1}{\tau}\times$