2003年上海大学博士学位论文 16

矩阵广义逆理论、计算及其应用的若干问题

作　者：郑　兵
专　业：计算数学
导　师：王国荣

上海大学出版社
· 上海 ·

2003 年上海大学博士学位论文

矩阵广义逆理论、计算及其应用的若干问题

作　者：郑　兵
专　业：计算数学
导　师：王国荣

上海大学出版社
· 上海 ·

Shanghai University Doctoral Dissertation (2003)

Some Topics on Generalized Inverses of Matrices: Theory, Computations and Applications

Candidate: Zheng Bing
Major: Computational Mathematics
Supervisor: Prof. Wang Guo-rong

Shanghai University Press
• Shanghai •

上 海 大 学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任:	曹志浩	教授，复旦大学数学系	200433
委员:	蒋尔雄	教授，上海大学	200444
	郭本瑜	教授，上海师范大学	200234
	魏木生	教授，华东师范大学	200062
	王翼飞	教授，上海大学	200444
导师:	王国荣	教授，上海大学	200444

评阅人名单：

曹志浩	教授，复旦大学	200433
邵嘉裕	教授，同济大学	200092
魏木生	教授，华东师范大学	200062

评议人名单：

陈果良	教授，华东师范大学	200062
孙文瑜	教授，南京师范大学	210024
顾传青	教授，上海大学	200444
魏益民	副教授，复旦大学	200433

答辩委员会对论文的评语

矩阵广义逆是矩阵论、计算数学、统计学等领域中有着重要理论意义和广泛应用价值的一个重要研究方向。因此、本论文选择这一内容作为其研究课题是很有意义的。

本论文给出了Cline分块矩阵几种广义逆的具体表示式，在一定条件下分析研究了一个分块矩阵是某个加边矩阵 g-逆的充要条件，得到了与非奇异加边时类似的一些性质。该文还给出了矩阵外逆的一个秩方程特征,同时明确给出了当一种特殊的外逆是秩方程的解时，该秩方程中其它三个矩阵之间的关系。作为进一步的研究工作,该文利用矩阵的秩等式给出了广义逆反序律成立的一个充分必要条件以及广义逆 的高阶Hermite 插值多项式迭代算法及其误差估计。最后，该文又讨论了控制论中常见的系统转换函数计算问题，得到了二次矩阵多项式依 Laguerre 正交多项式求逆的 Leverrier 型算法以及多变量一次矩阵多项式求逆的 Leverrier 型算法，作为该算法的一个直接结果，还得到了多维 Cayley-Hamilton 定理的一个新证明。

该论文结构合理、条理清楚、内容丰富，一些结果修正了前人所给结论存在的错误，有些结论大大地推广了许多作者的工作，在矩阵广义逆理论及计算研究中取得了一系列有意义的成果。综上所述，表明作者在矩阵论和广义逆理论方面具有扎实的理论基础，掌握了大量的文献知识，能及时掌握相关问题的最新成果并加以推广，具备了独立进行科学研究的能力。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会无记名投票，一致同意通过论文答辩，并建议授予郑兵同学理学博士学位。

答辩委员会主席：曹志浩

2003 年 6 月 4 日

摘 要

由于矩阵广义逆在许多领域中有着广泛的应用，如在微分和积分方程、算子理论、统计学、控制论、Markov 链、最优化等. 因此，自上个世纪中期以来矩阵广义逆就成为一个非常重要的研究领域. 至今，仍然是国际上非常活跃的研究分支之一. 本文就矩阵广义逆理论、计算及其应用的若干问题进行了进一步的研究.

首先，我们利用极小化方法给出了 Cline 分块矩阵一个 $\{1,4\}-$ 逆的递推表示公式. 对 Cline 分块矩阵的加权 Moore-Penrose 逆、$\{1,3M\}-$ 逆、$\{1,4N\}-$ 逆也给出了类似的结果. 所有这些公式都可用一个统一的形式表示. 在第四、五章中，我们详细研究了加边矩阵的广义逆问题以及矩阵广义逆所满足的秩方程特征. 在一定的秩可加性条件和 $\psi(\boldsymbol{B})=\psi(\boldsymbol{A})$ 条件下分别研究了一个分块矩阵是已知加边矩阵 g- 逆的充分必要条件，结果显示，在 $\psi(\boldsymbol{B})=\psi(\boldsymbol{A})$ 条件下通过长方或奇异加边矩阵也可得到与非奇异加边矩阵时相同的一些性质. 作为矩阵奇异值分解和方块矩阵的核心 - 幂零分解的应用，明确给出了当一种广义逆是秩方程的解时其它三个矩阵之间的关系. 从而推广了许多作者的工作.

其次，在第六、七章中，我们分别讨论了矩阵广义逆 $\boldsymbol{A}_{T,S}^{(2)}$ 的反序律问题和 Hermite 插值多项式逼近问题. 利用秩等式给出

了 $A_{T,S}^{(2)}$ 的反序律成立的充分必要条件. 建立了基于高阶 Hermite 插值多项式的迭代公式，并给出了相应的误差估计式. 数值结果同样表明了迭代公式是收敛的. 在第八、九章中我们研究了矩阵多项式求逆的 Leverrier 型算法. 建立了单变量二次矩阵多项式基于 Laguerre 正交多项式求逆的 Leverrier 型算法以及多变量一次矩阵多项式求逆的 Leverrier 型算法. 数值结果表明这些算法是可行有效的. 作为算法的一个直接结果，我们还给出了多维 Cayley-Hamilton 定理的一个新证明.

最后，我们在第十章中研究了非线性规划中与信赖域问题有关的优化值函数性质. 作为矩阵广义逆的一个应用，首先建立了优化值函数定义域的边界函数，其次在不同情况下分析了优化值函数的一些解析性质.

关键词： Cline 分块矩阵, Moore-Penrose 逆, 加权广义逆, 加边矩阵, Drazin 逆, 群逆, 秩方程, 反序律, 迭代法, 误差估计, Leverrier 算法, Cayley-Hamilton 定理, 优化值函数, 信赖域, 最优解

Abstract

As the generalized inverses of a matrix have wide applications in many areas such as differential and integral equations, operator theory, statistics, optimal theory, control theory, Markov chains and etc., it has become one of the important studying fields in the world since the middle of the last century. The main purpose of this work is to investigate some problems concerning the theory of generalized inverses, matrix computation and some applications, which include the generalized inverses of Cline partitioned matrix and bordering matrices, characteristics of generalized inverses by an rank equation, the reverse order law of the generalized inverse $A^{(2)}_{T,S}$, the Hermite interpolation polynomial approximations of $A^{(2)}_{T,S}$, Leverrier-like Algorithm of multidimensional linear system and etc.. These works can be briefly described as follows:

1. We present an recursive representation of $\{1,4\}-$ inverse of Cline matrix. Similar results are also given for the weighted Moore-Penrose inverse, $\{1,3M\}-$, $\{1,4N\}-$ inverse. All of these results can be represented by an unify form.

2. Many authors have considered nonsingular borderings

$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & X \end{pmatrix}$ of B and investigated the properties of submatrices of A^{-1}. Under specific conditions on the bordering, one can recover any g-inverse of B as a submatrix of A^{-1}. We consider borderings A of B, where A might be singular, or even rectangular. If A is $m \times n$ and if B is an $r \times s$ submatrix of A, we study the consequences of the equality $m + n - \text{rank}(A) = r + s - \text{rank}(B)$ with reference to the g-inverses of A. It is shown that under this condition many properties enjoyed by nonsingular borderings have analogs for singular (or rectangular) borderings as well. We also consider g-inverses of the bordered matrix when certain rank additivity conditions are satisfied. It is shown that any g-inverse of B can be realized as a submatrix of a suitable g-inverse of A, under certain conditions.

3. If A is a nonsingular matrix of order n and if $B = C = I_n$, then the inverse of A is the unique matrix X such that

$$\text{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} = \text{rank}(A).$$

In this work, we generalize this fact to any matrix A of dimension $m \times n$ over the complex field to obtain analogous results for outer inverses of A. The converse problem is also considered in the sense that B and C are characterized when A^d, $A^\sharp$, $A^{(1,2)}$, $A^{(1,2,3)}$ and $A^{(1,2,4)}$ are solutions to this equation, respectively. This contributes to certain recent results in the literature, including that obtained by Jürgen Groß[71].

4. By using the rank identity of matrices, the necessary and sufficient condition is given for the reverse order law of the generalized inverse $\boldsymbol{A}_{T,S}^{(2)}$ of matrix product $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n$ to hold.

5. Based on two special Hermite interpolation polynomials, we established two iterative methods for computing the outer inverse $\boldsymbol{A}_{T,S}^{(2)}$ of a matrix $\boldsymbol{A}$ and the corresponding error estimates were also given. An example was shown to illustrate our theory.

6. An algorithm for simultaneous computation of the adjoint matrix $\boldsymbol{G}(s)$ and determinant $d(s)$ of the matrix polynomial $s^2\boldsymbol{J} - s\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2$ is presented, where $\boldsymbol{J}$ is a singular matrix. Both $\boldsymbol{G}(s)$ and $d(s)$ are expressed relative to a basis of Laguerre orthogonal polynomials. This algorithm is a new extension of Leverrier-Fadeev algorithm.

7. A Leverrier-like algorithm is presented which allows the computation of the transfer function of a linear regular system from its m-D state-space description, without inverting a multivariable polynomial matrix. This algorithm is an extension of the classic Leverrier's algorithm for 1-D system and it reduces the computational cost. m-D Cayley-Hamilton theorem is also shown by the algorithm.

8. We studied the properties of the optimal value function for a trust-region problem with two constraints. In this problem, a quadratic function is minimized over an intersection of two quadratic constraints. The optimal value function considered is obtained by changing the sizes of the two quadratic constraints. The value of the optimal value function and its first-order partial derivatives are explicitly calculated in all possible scenarios.

Keywords: Cline partitioned inverse, Moore-Penrose inverse, weighted generalized inverse, bordering matrices, Drazin inverse, group inverse, rank equation, reverse order law, iterative method, error estimate, Leverrier algorithm, Cayley-Hamilton theorem, optimal value function, trust region, optimal solution

目　录

第一章 前 言

1.1 研究动机

广义逆的概念最早是由 I.Fredholm[1] 提出的. 他给出了积分算子广义逆的定义，并称为“伪逆”. 1920 年，E.H.Moore[2] 首先提出了矩阵广义逆的概念，他利用投影矩阵定义了唯一的 Moore 广义逆. 1933 年, E.H.Moore 的学生 Y.Y.Tseng[3−5] 又将 Moore 广义逆推广到了 Hilbert 空间，提出了 Hilbert 空间线性算子的广义逆的概念. 然而，矩阵广义逆真正得到迅速的发展，并在各个领域获得卓有成效的应用是在 1955 年英国学者 R.Penrose[6] 证明了矩阵的 Moore 广义逆是满足以下四个矩阵方程

$$(1)\ \boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A},\qquad (2)\ \boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{X},$$

$$(3)\ (\boldsymbol{AX})^*=\boldsymbol{AX},\quad (4)\ (\boldsymbol{XA})^*=\boldsymbol{XA}.$$

的唯一矩阵之后. 因此，通常称条件 (1)～(4) 为 Moore-Penrose 条件. 近五十年来，广义逆矩阵的理论和应用得到了迅速发展. 特别是 C.R.Rao 和 S.K.Mitra[7−9] 等人在五、六十年代研究统计学的同时，发现广义逆不仅在统计学中有着广泛的应用，而且广义逆理论本身还有许多问题需要进一步的研究与完善. 至此，许多学者才