数学分析
原理与方法

SHUXUE FENXI
YUANLI YU FANGFA

◎ 胡适耕　张显文　编著

4

科学出版社
www.sciencep.com

数 学 分 析

原理与方法

胡适耕　张显文　编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书概括性地处理了数学分析的基本内容，力图帮助读者克服横亘在数学分析与其他数学课程间的障碍，并适时建立数学分析与其后续课程间的联系，以期使读者获得关于数学分析的作用与地位的正确认识. 书中精选了数量可观的例题，对其中一部分作了详细解答，对余下的也给出了一定提示或答案，以供读者作练习之用.

本书可作为数学分析课程的教材，也可作为正在学习数学分析和准备考研的大学生的参考用书，还可供讲授数学各课程的教师、数学教育家以及广大数学爱好者参考.

图书在版编目（CIP）数据

数学分析：原理与方法/胡适耕，张显文编著.—北京：科学出版社，2008

ISBN 978-7-03-021797-4

Ⅰ.数… Ⅱ.①胡…②张… Ⅲ.数学分析－高等数学－教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 060661 号

责任编辑：张颖兵／责任校对：梅 莹

责任印制：董艳辉／封面设计：苏 波

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

京山德兴印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 5 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2008 年 5 月第一次印刷 印张：27 1/2

印数：1—3 500 字数：539 000

定价：45.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

有这样一门大学数学课程：它的大名你也许在中学时即已有所闻；在名目繁多且不断更新的大学数学课程中，它迄今仍然稳居中心地位；它如此饱含奇思妙想，引人入胜，不断激发着你的创意；你能听到的所有忠告，都毫无例外地建议你在大学阶段应全力以赴学好这门课程，以备终生之用. 当然，你不必费心猜测，立即知道这门课程就是数学分析！

如此重要的课程，数学家们不会不为它提供优秀的教材. 于是，我们有机会读到 Хинчин，Фихтегольц，读到 Courant，Rudin，也读到一些中国学者的佳作. 如果现在我们告诉你：所有这些书都不能令人满意，请用我们的新书吧！那么，这不只是一种误导，实在是一种愚妄. 在已经汗牛充栋的分析教材的书库中，再塞入一本毫无特色的新书，这不是我们的使命.

尽管如此，我们终究已将一本新书推到了你的眼前，只是它并非一本寻常的教材罢了. 我们坚信，倾心于数学的读者，除了尽力钻研所选择的教材之外，会越来越强烈地感到要再读点什么；而指望一本教材能提供你感兴趣的一切，无疑是太苛求了. 任何教材，即使是很优秀的教材，都不同程度地具有如下一些特点：

(A) 内容的概括性只能限定在一个偏低的水平上，以适应初学者的口味. 这就不足以充分展示分析理论的统一性与一般性.

(B) 材料的选择只能限制在一个略嫌窄小的范围内，以符合一个学时有限的课程"量身定做"的要求. 分析学在三百余年发展中所积累的许多优美结果与方法，对于一本要能被人接受的教材来说，不免在割爱之列，这在兴趣特别旺盛而又力有余裕的学生看来，就太可惜了.

(C) 教材的表达形式多半不会是足够现代化的，目前国内流行的一些教材似乎尤其如此. 一个数学工作者如果发现他从文献上读到的东西与分析教程所提供的表述在用语、记号乃至概念上都不一致，其烦恼与不安是可想而知的. 基础教材与现代文献的某种程度的脱节，似乎是很难避免的，但毕竟是一个缺陷，应当在适当的时候得到弥补.

(D) 现行分析教材并不特别鼓励学生在学习时尽可能联系其他相关课程. 就适应于初学者而言，这似乎是可以理解的；但"自封"的作法必定会妨碍对分析内容的透彻理解与对分析知识的融会贯通的运用. 不妨肯定地说，局限在数学分析一门课程内部，并不能达到对数学分析内容的真正理解. 在适当的时候以适当的方式拆除横亘在数学分析与其他课程之间的那堵墙，看来是非常必要的.

毫无疑问，正是以上考虑构成了撰写本书的思想基础. 为决心投身数学的大学生

提供一本能与教材互为补充的书，这一想法我们已酝酿多时了，且不断受到我们在讲授分析课程过程中的直接体验的驱动．就我们的意图而言，如下一些目标无疑在首要考虑之中：以更大的概括性处理分析的基本内容，让你感觉到，经典分析的核心内容比初看起来其实要少得多，而这就有助于你看清分析的整体轮廓；补充若干你将感兴趣的材料，它们或者富有理论上的启发性，或者包含有价值的方法或技巧；在实现表达形式的现代化这一点上，我们力求再进一步，这一步终究是不可避免的．特别要强调的是，本书作了很大努力去沟通数学分析与其他课程的联系．首先，本书绝不回避线性代数语言、记号与结论的运用．将数学专业的两门最重要的基础课隔离开来，实在是没有道理的．数学分析与其后续课程——函数论、微分方程、微分几何以及泛函分析等的紧密联系是众所周知的．在一本分析书中漫无目的地塞入一些本属后续课程的内容，当然是没有意义的；但那些深入思考的学生（尤其是那些多少学过后续课程的学生）必然会关注如下问题：数学分析理论与后续课程中的相关内容（一个典型例子是 Riemann 积分与 Lebesgue 积分）有何本质联系？这样的问题未必能在一本数学分析的书中完全讲清楚，但应当将这样的问题提出来，让其在适当的时候自然地出现于学生的视野之内，则是毫无疑问的．正是在这一点上，本书作了充分的强调．我们认为，这有助于学生获得关于数学分析的作用与地位的正确认识．

让读者有充分的机会感受到数学分析理论之优美与方法之奇妙，无疑是我们的愿望；但我们并不打算让你相信，你所读到的数学分析是完美无缺的．恰恰相反，我们处处提请你注意，你在现阶段所学到的数学分析，在最好的意义上也充满了缺陷，它只是一个已经或有待发展的宏大理论的初等部分，它纵然包含了许多深刻数学思想的萌芽，却远未充分展开，致使其结论与方法处处表现出令人遗憾的局限性，某些部分甚至需要根本的改造．让你充分明白这一点，唯有好处，这将激发你加倍努力去追踪分析学的现代发展．

如本书的副标题“原理与方法”所表明的，对于方法的关注在预定的计划之内．解释方法的主要途径无疑是处理一些具体问题．本书精选了数量可观的例题．不过，仅对其中一部分作了详细解答，而另一部分则供读者作练习之用．对于后者，也给出了一定提示或答案．所有例题都在内容或适用方法上具有一定特色，因而足以激发你的兴趣．例题中的证明题都只陈述结论，而省去“求证”一类的词．

正在学习数学分析的大学生，以及学过数学分析的高年级大学生，特别是那些正在为进入硕士阶段而苦心准备的大学生，都可以利用本书，当然用法上可能各不相同．此外，正在讲授微积分学的教师，将会发现本书有其参考价值．许多大学数学系为高年级学生开设了数学分析第二课程，我们将乐于看到本书被用作教材．本书的许多处理方法不免带有尝试性与探索性，倘能引起关注数学教育的数学家们的注意，因而获得任何著作所必需的批评，我们将备感高兴．

作　者

2008 年 1 月

记号与约定

A^c—— 集 A 之补

A°—— 集 A 之内部；$\overline{A}$—— 集 A 之闭包

B_n—— Bernoulli 数

$B_r(a)$—— 以 a 为心 r 为半径的开球；$\overline{B}_r(a)$—— 闭球

$B(p,q)$——β 函数

$\mathbf{C}$——复数域

$C(D)$——D 上实连续函数之全体

$C^m(D)$——D 上 C^m 函数之全体

χ_A—— 集 A 之特征函数

D—— 通常记区域

det——行列式

diam A—— 集 A 之直径

div——散度

$\mathrm{d}s$—— 弧微分

$\mathrm{d}\sigma$—— 面积元

$\mathrm{d}S$—— 曲面面积元

$\mathrm{d}v$—— 体积元

Δx——x 之增量

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$

δ_{ij}—— Kronecker 符号

∂A—— 集 A 的边界

exp——指数

$\hat{f}(n)$——f 的 Fourier 系数

$\hat{f}(\xi)$——f 的 Fourier 变换

$\Gamma(p)$——Γ 函数

I—— 单位映射，积分；$\boldsymbol{I}$——单位矩阵

Im——虚部

i——虚数单位

inf A—— 集 A 之下确界

J—— 区间,Jacobi 矩阵

$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$—— 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值

$\mathbf{N}$——自然数集

$\boldsymbol{n}$——单位法向量

n—— 通常记自然数或非负整数

$\mathbf{Q}$——有理数域

$\mathbf{R}$——实数域;$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\mathbf{R}^n$—— n 维 Euclid 空间

$\mathbf{R}_+ = [0,\infty)$;$\mathbf{R}_+^n = (\mathbf{R}_+)^n$

$\mathbf{R}^{m\times n}$——$m\times n$ 阶实矩阵之全体

Re——实部

$R_n(x)$—— 第 n 余项

$\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ 或 (x,y);$r = |\boldsymbol{r}|$

S—— 和,曲面面积

S_n—— 部分和

sgn——符号函数

sup A—— 集 A 之上确界

Σ—— 曲面

σ—— 面积

tr $\boldsymbol{A}$—— 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹

$\boldsymbol{\tau}$——单位切向量

$U = N(x)$——U 是 x 的一邻域

$U = N^*(x)$——U 是 x 的一去心邻域

V—— 通常记 3 维区域

$v(D)$——D 的体积

$\mathbf{Z}$——整数集

$\mathbf{Z}_+$——非负整数集

$\mathbf{Z}_+^n = (\mathbf{Z}_+)^n$

$\sim$——等价于

$\approx$——近似于

$\equiv$——恒等于

$\triangleq$——定义为

$\|f\| = \sup\limits_{x\in X}|f(x)|$,$X$ 依上下文判定

$\square$——定理(或命题)证完

几 点 说 明

1. 引证　§1.1 表示第 1 节中第 1 小节；§1(1)表示§1 中式(1)；1.1.1 表示§1.1 中第 1 项(定义、定理等)；1.1.1(i)表示 1.1.1 之第(i)款；1.1.1,1°表示例 1.1.1 中例 1°. 引用"1.1.1 定义"时写作"定义 1.1.1"，定理、命题等仿此. 若式(1)由(1a)，(1b)等组成，则提到式(1)时指式(1a)，(1b)等中某一个或任一个

2. 指标　通常用 n 或 i 表自然数或整数指标. 不致误解时，记号 $\sum$，$\prod$，$\bigcup$，$\bigcap$ 下的指标予以省略. 和式 $\sum a_i$ 依情况可写成

$$\sum_{i=1}^{n} a_i,\ \sum\nolimits_1^n a_i,\ \sum_i a_i,\ \sum\nolimits_i a_i \text{ 等；}$$

$\prod a_i$，$\bigcup A_i$ 等仿此. 给定 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 与 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^n$，自动地认定 $\boldsymbol{x} = (x_i) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{f} = (f_i) = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$

3. 逻辑符号　$\forall$：全称号(对所有). $\exists$：存在号(至少存在一个). $A \Rightarrow B$：A 推出 B. $A \Leftrightarrow B$：A 等价于 B

4. 不等号　$A \leqslant B \Leftrightarrow \forall a \in A, \forall b \in B$，有 $a \leqslant b$，$A < B$ 仿此；$A \leqslant b \Leftrightarrow \forall a \in A$，有 $a \leqslant b$，$A < b$ 仿此. $f \leqslant g$ 表示在函数 f 与 g 的公共定义域中有 $f(x) \leqslant g(x)$；$f < g$ 仿此. $a \vee b = \max\{a, b\}$，$a \wedge b = \min\{a, b\}$，$a^+ = a \vee 0$，$a^- = (-a)^+$.

5. 极限　$\lim\limits_n x_n$ 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$；$\overline{\lim} f(x)$ 与 $\underline{\lim} f(x)$ 分别记上极限与下极限；$f(a^+) = \lim\limits_{a<x\to a} f(x)$，$f(a^-) = \lim\limits_{a>x\to a} f(x)$；$x_n \nearrow a$ 表示 x_n 单调增加且以 a 为极限，$x_n \searrow a$ 仿此；$f_n \rightrightarrows f$ 表示 f_n 一致收敛于 f

6. 导数　可微函数 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m): D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 的导数依情况可记为以下诸形式之一：

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}},\ \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

当 $n = 1$ 时，$\boldsymbol{f}'(x)$ 可写成 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(x)/\mathrm{d}x$ 或 $\boldsymbol{f}'_x$

7. const　当 const 出现在式子中时，它表示某个常数，其具体数值不必或不能明确写出

8. 其他记号　$n!$ 表示 n 的阶乘，约定 $0! = 1$；

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n, \quad (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1),$$

约定 $0!! = 1 = (-1)!!$；$\dbinom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ $(0 \leqslant n \leqslant m)$.

目　　录

第1章 引　　论

数学分析的主体内容——微积分学,远在300多年以前就大体形成了.然而,微积分学的先驱者——主要是Newton与Leibniz——并不是用你今天在数学分析中所看到的方式表述微积分.他们的方法尽管实用上有效,但从严格的逻辑要求来看并无依据.大约200年之后,Cauchy,Riemann等人才为微积分学补建了逻辑基础,其主要步骤就是将微分与积分定义为特定形式的极限运算.为使极限理论具有一个坚实的基础,又必须使极限运算赖以施行的实数系的构建完全符合严格的逻辑要求,这一点由Dedekind等人建立的实数理论做到了.这样一来,在进入微积分学之前,你必须经历一个冗长而烦琐的准备阶段,这一部分通常称为**分析引论**.引论内容抽象、概念繁杂而具体结果较少,因而缺少吸引力,致使通常的教材尽可能作简化处理.本章也不打算将引论作得详尽无遗;但对于构成分析逻辑基础的基本要素,绝对必须有一个清晰的交代,这不仅为学习数学分析所必需,而且也是逐步适应现代数学理论的构造模式的必经之路.

§1 集　　合

关于集合的最简单的概念与用语,你可能在中学就已熟悉了.今天,集合概念已如此广泛地渗透到现代数学的几乎所有部门,专攻数学的大学生要想避开集论,是不可能的.不过,作为开始,你只要了解一点集论的常识就够了.本节的材料就限于这种常识水平,其中不包含任何深奥的结果,只是对今后常用的一些集论用语与记号作概括介绍而已.即使是这些简单材料,也并不要求你在一开始就完全熟悉它.随着本书内容的逐步展开,它们将自然地融入你所掌握的知识体系中.

§1.1 集及其运算

集(或称集合)的直观意义似乎极其浅显,但实际上它是难以严格定义的基本数学概念之一,此处仅给出一个朴素的描述.具有一定性质的对象之全体构成集,其中的对象就称为该集的元(或元素).例如,"可被2整除的整数"之全体就是"偶数集",每个偶数都是该集的元.通常以大写字母(如A,B,X,Y等)表示集,以小写字母(如a,b,x,y等)表示集的元.若a是集A的元,则说a属于A,记作$a\in A$;而以$a\notin A$表示a不属于A.不含任何元的集称为**空集**,记作$\varnothing$.仅含一个元a的集记作$\{a\}$,称为**单元素集**,注意$\{a\}\neq a$!约定以专用字母表示一些最常用的集,例

如 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 分别记自然数集、整数集、有理数集、实数集与复数集. 表示较简单的集可用枚举法，例如“10 以内的奇数之集”$=\{1,3,5,7,9\}$；$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 更一般的方法是，将一个集 A 表为

$$A=\{x: x\in X \text{ 且 } x \text{ 满足 } P\} \text{ 或 } A=\{x\in X: x \text{ 满足 } P\},$$

这意味着“A 由 X 中所有满足 P 的元 x 组成”，其中 X 是某个已知的集，P 是某个与 X 中的元有关的命题或条件. 例如，偶数集 A 可表为

$$A=\{n: n\in \mathbf{Z} \text{ 且 } 2 \text{ 整除 } n\} \text{ 或 } A=\{n\in\mathbf{Z}: 2 \text{ 整除 } n\}.$$

若集 A 的元都是集 B 的元，则说 A 含于 B 或 B 包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，且称 A 为 B 的子集；用 $A\not\subset B$ 表示 A 不含于 B. 例如，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z},\mathbf{Z}\not\subset\mathbf{N}$. 约定空集是任何集的子集. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则说集 A 与 B 相等，写作 $A=B$，若 $A\subset B\neq A$，则称 A 为 B 的真子集，或说 B 真包含 A. A 的子集之全体记作 2^A，称它为 A 的**幂集**. 注意 $A,\varnothing\in 2^A$；$2^{\varnothing}=\{\varnothing\}\neq\varnothing$. 若 $A=\{a,b\}$，则幂集

$$2^A=\{\{a,b\},\{a\},\{b\},\varnothing\}$$

恰含 2^2 个元. 一般地，若 A 含 n 个元，则 2^A 恰有 2^n 个元，这一事实无疑启示了 2^A 这一记号.

同时运用多个集时不免要用到集族概念. 简单地说，任何一组(有限或无限个)集构成一个集族. 通常用形如 $\{A_i: i\in I\}$ (或简写作 $\{A_i\}$)的记号表示集族，其中 A_i 是集族中的集，I 称为**指标集**，并不要求 A_i 彼此互异，即 $i\neq j(i,j\in I)$ 时可能 $A_i=A_j$. 形如 $\{A_n: n\in\mathbf{N}\}$ 的集族称为**集列**，常将其简写作 $\{A_n\}$. 若 $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $A_n\subset A_{n+1}$ (或 $A_n\supset A_{n+1}$)，则称 $\{A_n\}$ 为升列(或降列). 降列也称为**集套**.

下面假定所涉及的集都含于某个足够大的集 X (称 X 为**全集**).

用给定的集构成新集的主要方法是集运算，集运算有如下几种. 任给 $A,B\subset X$，令

$$A^c=\{x\in X: x\notin A\}, \tag{1}$$

$$\begin{cases} A\cup B=\{x\in X: x\in A \text{ 或 } x\in B\}, & (2a)\\ A\cap B=\{x\in X: x\in A \text{ 且 } x\in B\}, & (2b)\end{cases}$$

三者分别称为 A (在 X 中)的补、A 与 B 的并、A 与 B 的交. 一般地，任给集 A_i $(1\leqslant i\leqslant n)$，令

$$\begin{cases} \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\{x: x \text{ 属于某个 } A_i(1\leqslant i\leqslant n)\}, & (3a)\\ \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i=\{x: x \text{ 属于所有 } A_i(1\leqslant i\leqslant n)\}, & (3b)\end{cases}$$

二者分别称为集 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的并与交. 并 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 也写作

$$\cup_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcup_i A_i \quad \text{或} \quad A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n;$$

交的记号仿此. 更一般的并 $\bigcup_{i\in I}A_i$ 与交 $\bigcap_{i\in I}A_i$ 可类似地定义,不必详述. 此外,对任给 $A,B\subset X$,约定 $A\backslash B=A\cap B^c$,称 $A\backslash B$ 为 A 减去 B 的**差集**. 有些著作将 $A\backslash B$ 写作 $A-B$,本书不用后一写法.

集运算与代数运算有某些可类比之处. 例如,像同数的加法与乘法一样,并与交运算也满足交换律与结合律,且理由更为明显. 不过,集运算也遵循一些颇具特色的规则,最常用者如下:

$$\Big(\bigcup_i A_i\Big)^c=\bigcap_i A_i^c,\Big(\bigcap_i A_i\Big)^c=\bigcup_i A_i^c;\quad\text{(对偶律)}\tag{4}$$

$$\begin{cases}A\cap\Big(\bigcup_i B_i\Big)=\bigcup_i(A\cap B_i),\\ A\cup\Big(\bigcap_i B_i\Big)=\bigcap_i(A\cup B_i);\end{cases}\quad\text{(分配律)}\tag{5}$$

$$\begin{cases}A^{cc}=A,A\cup A^c=X,A\cap A^c=\varnothing,\\ A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset B^c\Leftrightarrow B\subset A^c;\end{cases}\tag{6}$$

$$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B.\tag{7}$$

以上考虑的集运算有一共同点:参与运算的集及运算的结果,都是同一全集 X 的子集. 下面定义的"积运算"却与此不同.

1.1.1 定义　设 $X_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是给定的非空集. 一切有序元素组

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (x_i\in X_i,1\leqslant i\leqslant n)$$

构成一集 X,称它为 $X_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的**积集**,记作

$$X=\prod_{i=1}^n X_i\text{ 或 }X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n.$$

若 $X_i=Y(1\leqslant i\leqslant n)$,则将 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 写作 Y^n,并称它为集 Y 的 n 重积.

积集的常见例子是

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant b\};\qquad\text{(闭矩形)}$$

$$\mathbf{Q}^n=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n):r_i\in\mathbf{Q}(1\leqslant i\leqslant n)\};\qquad(n\text{ 维有理点集})$$

$$\mathbf{Z}_+^n=\{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n):\alpha_i\text{ 是非负整数}(1\leqslant i\leqslant n)\};$$

$$\prod_{i=1}^n[a_i,b_i]=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):a_i\leqslant x_i\leqslant b_i(1\leqslant i\leqslant n)\}.\quad(n\text{ 维方体})$$

§1.2　映射

从初等数学你已熟悉什么叫函数了. 简言之,函数就是因变量与自变量之间的对应关系. 这一理解为函数概念的拓展提供了广阔的空间. 下面的定义初看起来有点抽象,它在逻辑上倒是很简单的.

1.2.1 定义　设 X 与 Y 是两个非空集. 若对每个 $x\in X$,有唯一的 $y\in Y$ 与之对应,则称此对应关系为**函数**或**映射**,记为某个字母,如 f,将对应于 x 的 y 写作

$f(x)$ [①]，称它为函数 f 在 x 的值，称 f 为从 X 到 Y 的函数或映射，写作 $f: X \to Y$ 或

$$f: X \to Y, \quad x \to f(x). \tag{8}$$

称 X 为 f 的**定义域**，称 Y 的子集(它可能但不必是 Y 本身) $\{f(x): x \in X\}$ 为 f 的**值域**.

如上所定义的函数，首先包括了你所熟知的初等函数，如多项式、三角函数、指数函数、根式函数等. 例如，取 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$，则依标准形式(8)可将 $f(x)$ 写成

$$f: [-1,1] \to [0,\infty), \quad x \to \sqrt{1-x^2};$$

也可写作稍不同的形式

$$f: [-1,1] \to [0,1], \quad x \to \sqrt{1-x^2},$$

此时$[0,1]$恰为函数 f 的值域. 一般来说，在给定一个函数时，应同时指明其定义域；但指明其值域则未必容易，亦非总是必要的.

必须强调，无论在理论上还是在实际应用上，函数都远远超出狭隘的初等函数的范围之外. 虽然目前还不能举出太多的例子，随着知识的积累，你将熟悉越来越多的形式各异的函数. 下面的几个例子有助于你获得函数多样性的初步印象.

1.2.2 例 **1° 符号函数**(或 Kronecker 函数) $\operatorname{sgn} x$ 定义为

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & (x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases} \tag{9}$$

涉及符号函数时经常要用到的一个等式是 $x \cdot \operatorname{sgn} x = |x|$.

2° 取整函数 $E(x)$. 任给实数 x，必有唯一的整数 n，使得 $n \leqslant x < n+1$，就定义 $E(x) = n$，称它为 x 的整数部分，也记作 $[x]$. 例如，$[\pi] = 3$，$[-2 \cdot 1] = -3$. 注意，至少暂时还不能给 $E(x)$ 一个合适的表达式.

3° 特征函数. 任给非空集 X 与 $A \subset X$，定义

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \in A^c). \end{cases} \tag{10}$$

称 χ_A 为集 A 在 X 中的特征函数. 特征函数至多取两个值:0,1，似乎简单得不值一提，但在数学中却极有用处.

4° Dirichlet 函数，即有理数集 $\mathbf{Q}$ 在实数集中的特征函数：

$$D(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ 为有理数}), \\ 0 & (x \text{ 为无理数}). \end{cases} \tag{11}$$

从初等数学的观点看来，如此怪异的函数简直令人匪夷所思，但 $D(x)$ 不仅定义清

---

① $f(x)$ 的其他写法有 fx，f_x 等；当 $x = n \in \mathbf{Z}$ 时，记号 f_n 尤为常用.

晰合理，而且用作说明问题的例子不乏用处.

5° 序列. 设 X 是一非空集. 任给函数 $x: \mathbf{N} \to X$，约定 $x_n = x(n)(n \in \mathbf{N})$，则 x 的值可排列成如下无限序列：

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots, \tag{12}$$

通常简写作 $\{x_n\}$ ①，并称它为 X 中的一个序列. 反之，任给一个形如(12)的序列，其中 $x_n \in X(n \in \mathbf{N})$，则它唯一地确定一个函数 $x: \mathbf{N} \to X, x(n) = x_n$. 因此，给定一个从 $\mathbf{N}$ 到 X 的函数，恰与给定 X 中的一个序列相当.

现在回到一般的函数 $f: X \to Y$. 必须强调，称 f 为函数或映射(亦可能用其他名称)，仅是一种用语上的约定，并不关乎概念的本质. 习惯上，当 f 取值为数量(实数或复数)时，称 f 为函数，而在一般情况下则称 f 为映射或算子. 其实这种区分也不是绝对的. 给定映射 $f: X \to Y$，称积集 $X \times Y$ 的子集

$$G(f) \triangleq \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

为 f 的**图形**. 这一规定与是否能实际作图无关，即使看来并不复杂的 f(例如函数(11))，也未必能实际画出 $G(f)$. 若 $f(x) = f(y)(x, y \in X) \Rightarrow x = y$，则称 f 为**单射**；若 f 以 Y 为值域，则称 f 为**满射**；若 f 既是单射又是满射，则称 f 为**双射**. 若 f 是双射，则它实现 X 与 Y 的元之间的一一对应，因而唯一地决定一个反向的映射

$$f^{-1}: Y \to X, \quad f(x) \to x,$$

称 f^{-1} 为 f 的逆映射或反函数；f 与 f^{-1} 的定义域、值域恰好互换，即 f 的定义域恰为 f^{-1} 的值域，f 的值域则为 f^{-1} 的定义域.

给定映射 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to Z$，可唯一地决定一个映射

$$X \to Z, \quad x \to g(f(x)),$$

称它为 g 与 f 的复合映射或复合函数，记作 $g \circ f$ 或 gf. 称映射

$$X \to X, \quad x \to x$$

为 X 上的**单位映射**，记作 1_X 或 I. 若 $\varnothing \neq A \subset X$，则称映射

$$A \to Y, \quad x \to f(x)$$

为映射 $f: X \to Y$ 在 A 上的限制，记作 $f \mid A$. 若 f 是某个映射 g 的限制，则称 g 为 f 的扩张. 例如，设

$$f(x) = x(x \in [0, \infty)), \quad g(x) = |x| \ (|x| < \infty),$$

则显然 g 是 f 的一个扩张，f 是 g 在 $[0, \infty)$ 上的限制.

给定映射 $f: X \to Y, A \subset X, B \subset Y$，约定

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}. \tag{13}$$

称 $f(A)$ 为 A 在映射 f 下的像，称 $f^{-1}(B)$ 为 B 关于 f 的原像. 任给 $y \in Y$，约定

---

① 应强调序列 $\{x_n\}$ 的诸项不必互异，因而不应将 $\{x_n\}$ 等同于一个集合，尽管有时也使用 $\{x_n\} \subset X$ 这类记号.

$f^{-1}(y)=f^{-1}(\{y\})$；显然 $f^{-1}(y)\neq\varnothing\Leftrightarrow y$ 属于 f 的值域.

§1.3 可数集

已介绍的集论知识比较浅显，都未超出常识所能领悟的范围. 至于集论更进一步的内容，则只能在今后的课程中去学习了. 集论的深奥部分主要涉及无限集，其中的概念与结论都难以仅凭常识来理解. 无限集并不少见，数学分析就主要与无限集（如自然数集、有理数集、实数集等）打交道；但数学分析主要用到这些无限集的特殊性质，并不涉及这些集的深入的集论结论. 不过，“可数性”这一概念还是有某种需要，而且它并不十分复杂，现在就可以介绍.

自然数集 $\mathbf{N}$ 的一个明显特征是，它的元素可毫无遗漏地排列成一个序列：

$$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

实际上，并非只有自然数集有此性质，一些看来比自然数集“大得多”的集亦可写成序列，例如整数集就是如此：

$$\mathbf{Z}=\{0,1,-1,\cdots,n,-n,\cdots\}.$$

凡可表成序列的集，运用起来有许多方便. 因此，有必要用一个概念将这种集与其他的集区分开来.

1.3.1 定义 若一个集 A 的元素可排列成一个序列，则称 A 为无限可数集；无限可数集与有限集（包括空集）合称为**可数集**. 可数集以外的集称为**不可数集**.

若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 互异，则 $A\to\mathbf{N}$，$a_i\to i$ 是一单射. 若

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\},\tag{14}$$

且 a_n 互异，则 $A\to\mathbf{N}$，$a_n\to n$ 是一个双射，因此，可将 A 为可数集界定为存在从 A 到自然数集的单射，只有空集是唯一例外. 若集 A 可表为(14)，但不要求 a_n 互异，则顺次除去重复的元之后，仍得到一个（有限或无限）序列，其中的元彼此互异，因而 A 是可数集. 这就可将（非空）可数集界定为可表为一个序列的集.

直接用以上刻画来判定可数集，对稍复杂的集就难以施行. 因此需要一些更有效的方法，下面的定理即可起这种作用.

1.3.2 定理 (i) 可数集的子集是可数集.

(ii) 若存在从 A 到 B 的双射，则 A 是可数集$\Leftrightarrow B$ 是可数集.

(iii) 可数个可数集之并是可数集.

(iv) 有限个可数集之积集是可数集.

注 若 A 是可数集，则说“A 有可数个元”；若以集为元的集族是可数的，就说该集族有可数个集.

证 结论(i)与(ii)是明显的.

(iii) 不妨只证无限可数个无限可数集之并是可数集，其他情况是类似的. 设

$$A_n=\{a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nk},\cdots\}\ (n=1,2,\cdots),$$