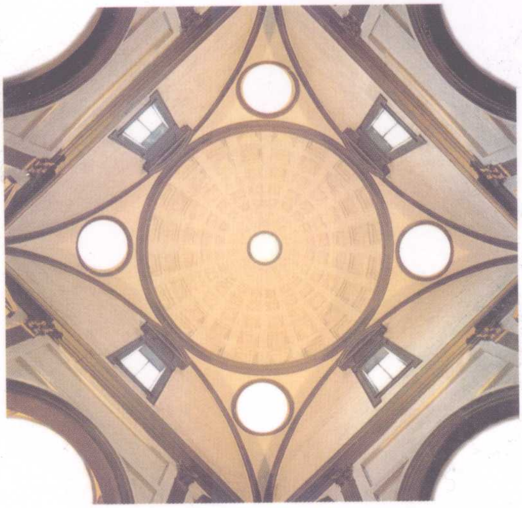
高校教材

Advanced Mathematics

物理、电子、计算机类专业适用



高等数学

上

主编◎陈世兴　张建成

华东师范大学出版社

高等数学 上

物理、电子、计算机类专业适用

主　　编　陈世兴　张建成

编写人员（按姓氏笔画排列）

王灿照　苏连塔　张纪平

张建成　陈世兴　程广文

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/陈世兴,张建成主编. —上海:华东师范大学出版社,2008.3

物理、电子、计算机类专业适用

ISBN 978-7-5617-5914-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①陈…②张… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 029210 号

高等数学(上)

(物理、电子、计算机类专业适用)

主　　编　陈世兴　张建成
项目编辑　朱建宝
文字编辑　李　娜
封面设计　卢晓红
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
销售业务电话　高教分社 021-62235021　021-62237614(传真)
基教分社 021-62237610　021-62602316(传真)
教辅分社 021-62221434　021-62860410(传真)
综合分社 021-62238336　021-62237612(传真)
北京分社 021-62235097　021-62237614(传真)
010-82275258　010-82275049(传真)
编辑业务电话　021-62572474
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　华东师范大学印刷厂
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　25.5
字　　数　529 千字
版　　次　2008 年 4 月第 1 版
印　　次　2008 年 4 月第 1 次
印　　数　5 100
书　　号　ISBN 978-7-5617-5914-1/N·112
定　　价　39.80 元

出 版 人　朱杰人

前言

本教材依据教育部颁发的《高等数学课程教学基本要求》,组织长期在高校教学第一线的教师编写.该教材的目标定位为:适合地方性高校的教学实际,面向物理类、电子信息类和计算机类本科专业.

编写中,我们着眼于物理类、电子信息类和计算机类本科专业对高等数学的需求对内容进行取舍,概念的引入、例题和习题的选用都尽量联系专业知识.我们力求做到:循序渐进,由浅入深;叙述简洁,概念明了;突出重点,分散难点.重要概念和重要理论讲述前,重视知识背景的阐述,旨在使学生增强用数学解决实际问题的意识和准确理解、把握知识.为了使初学的学生易于掌握,我们设置较多的例题;为了帮助学生准确理解概念、掌握方法,我们每章安排有小结.

考虑到学与练紧密结合的重要性,每节安排的习题紧扣重点,并由易到难;考虑到学生考研的需要,每一章我们还安排了复习题.复习题分成两类,一类是综合性的基本题,可用于学生复习;另一类是有一定难度的题目,是为准备考研学生设置的.为了教学的方便和学生自学的需要,书后附有习题的参考答案,并给出了有一定难度的证明题的提示.

本教材共有 12 章,分上、下两册.上册内容有一元微积分、常微分方程、无穷级数;下册有空间解析几何、线性代数、多元微积分.建议教学时数在 220 学时左右.

参加本书编写的有:张纪平(第 1、2、3 章),苏连塔(第 4、5 章),张建成(第 6、7 章),王灿照(第 8、9 章),程广文(第 10、11、12 章).最后全书由张建成、陈世兴汇总定稿.

由于我们水平有限,书中难免有不足或错误,恳请广大读者批评指正.

编　者

2008 年 3 月

目录

第1章 函数与极限

17 世纪，因为研究运动的需要，把变量引入了数学，从而促使高等数学的一个重要部分——数学分析的形成和发展. 数学分析是以函数为主要研究对象、以极限为基本工具，分析研究变量间的依赖关系，以及通过这些关系所表现出来的重要性质的一门学科. 本章将在复习和加深中学里学过的函数概念的基础上，阐明函数的极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

1.1 函　　数

数学分析（甚至是整个高等数学）研究的基本对象是函数，函数刻画了变量之间的依赖关系. 在本课程中，除特殊说明外，变量都在实数范围内取值. 因此，本节教材自然地要按实数、变量、变量之间的关系（即函数关系）这样的顺序来展开.

1.1.1 实数

1.1.1.1 实数概述

实数分为有理数和无理数两大类. **有理数**包括正、负整数，零和正、负分数. 每一个有理数都可用分数形式 $\frac{p}{q}$（其中 q 是正整数，p 是整数，且 p、q 互质）表示，也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示. 由于有限十进小数可写成以 0 或以 9 为循环节的无限十进循环小数，因此可以说，任一有理数都能表示为无限十进循环小数. 另外，我们把每一个无限十进不循环小数（如 $\sqrt{2}$，π 等）称为**无理数**. 于是，任一实数都可用无限十进小数形式来表示.

现举实数的两个重要性质：

（1）有理数的稠密性. 给两个有理数 a、$b(a<b)$，则在 a、b 之间至少还可以找到一个有理数. 例如 a、b 的算术平均数 $c=\frac{a+b}{2}$ 就是 a、b 之间的一个有理数. 同样，在 a、c 之间也至少可再找到一个有理数. 依此类推，可知 a、b 之间可以找到无穷多个有理数. 所谓**有理数的稠密性**是指：不论有理数 a、b 相差多么小，在 a、b 之

间总可以找到无穷多个有理数.

我们还可以论证,无理数和实数也具有稠密性.

(2) 实数的连续性. 我们在中学数学中知道,引进数轴以后,实数与数轴上的点之间存在着一一对应关系,即任一实数都对应数轴上唯一的一点;反之,数轴上的每一点总是代表一个实数. 可见,实数充满数轴,而没有"空隙",这就叫做实数的连续性. 有理数虽然稠密,但并不具有连续性. 例如,$\sqrt{2}$、π 这些无理数就是有理数中的"空隙". 任意两个有理数之间都有无穷多个这种"空隙".

实数的连续性是实数的一个根本的性质,它是数学分析的理论基础.

1.1.1.2 绝对值

一个实数 a 的绝对值,记为 $|a|$,定义如下:

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

实数 a 的绝对值 $|a|$ 表示点 a 与原点间的距离. 例如,$|a|=4$ 表示点 a 到原点的距离等于 4,如点 a 在原点之右,即 $a>0$,由定义知 $a=4$;如点 a 在原点之左,即 $a<0$,则 $a=-4$. 也就是说,在数轴上距离原点为 4 的点有两个:$a=4$, $a=-4$. 同样,$|a-1|=2$ 表示点 a 到点 1 的距离等于 2,由绝对值的定义知,这样的点有两个:$a=3$, $a=-1$.

根据绝对值定义,可知

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|.$$

因此,当 $|a|\leqslant b(b>0)$ 时,又可以把它表示成

$$-b\leqslant a\leqslant b.$$

绝对值还有如下一些性质:

1° $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$;　　2° $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$;

3° $|a+b|\leqslant|a|+|b|$;　　4° $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

性质 1°、2° 成立,极其明显. 下面来证明性质 3° 和 4°.

证 3° 因为 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$,$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$,将两式逐项相加,得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant(|a|+|b|),$$

故

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

证 4° 设 $c=a-b$,则 $a=b+c$,根据性质 3° 可知

$$|a|=|b+c|\leqslant|b|+|c|=|b|+|a-b|,$$

故

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

1.1.2　变量与区间

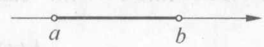
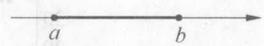
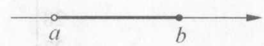
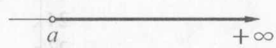
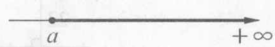
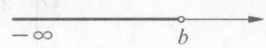
所谓变量，是指在某个过程中可取不同数值的那些量. 常量则是指在一个过程中保持数值不变的量. 通常用字母 x, y, z, … 表示变量，用字母 a, b, c, … 表示常量.

必须指出，一个量究竟是常量还是变量，往往与具体问题有关. 同一个量，在某个过程中可以认为是常量，而在另一个过程中可能是变量. 例如，重力加速度通常都认为是常量，其实也是变化的，只不过变化得很小就是了. 当我们计算地球卫星的轨道时，地心引力的变化就不很小，不能把它看作常量. 这时，重力加速度就应看成是变量了.

一个变量允许取值的范围，称为变量的变域. 变量的变域是一个集合. 关于集合的初步知识，读者在中学数学中已经学过了，本书不再重述.

实数全体组成的集合称为实数集，记作 **R**. 本书所说的"数集"都是指实数集 **R** 的子集. 区间是实数集的特殊子集. 现将各种区间的定义、名称、符号及图象列表如表 1-1(a 与 b 是两个实数. 且 $a<b$)：

表 1-1

定　义	名　称	符　号	图　象
$\{x\mid a<x<b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	半开区间	$(a, b]$	
$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	半开区间	$[a, b)$	
$\{x\mid a<x\}$	无限区间	$(a, +\infty)$	
$\{x\mid a\leqslant x\}$	无限区间	$[a, +\infty)$	
$\{x\mid x<b\}$	无限区间	$(-\infty, b)$	
$\{x\mid x\leqslant b\}$	无限区间	$(-\infty, b]$	

区间 $(-\infty, +\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$，即实数集.

开区间 $(a-\delta, a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$，这里 δ 是某个正数，称为点 a 的

δ **邻域**，记作 $U(a,\ \delta)$. δ 称为邻域 $U(a,\ \delta)$ 的半径，点 a 称为邻域 $U(a,\ \delta)$ 的中心. 若不指明点 a 的邻域半径时，统称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

在点 a 的邻域 $U(a,\ \delta)$ 内去掉点 a，即：$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ **去心邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\ \delta)$. 不指明点 a 的去心邻域的半径时，记作 $\mathring{U}(a)$.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形，例如

$$[a,\ b]\times[c,\ d]=\{(x,\ y)\mid x\in[a,\ b],\ y\in[c,\ d]\},$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域，这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a,\ b]$ 和闭区间 $[c,\ d]$.

1.1.3　函数

1.1.3.1　函数概念

先考察几个例子.

例 1-1-1　自由落体的路程 s 与时间 t 由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{1-1}$$

联系着，t 的值确定了，s 的值就随之确定. 设落体着地的时刻为 T，则当 t 取 0 到 T 之间任何值时，由(1-1)就计算得 s 为 0 到 $\frac{1}{2}gT^2$ 之间的某一值.

例 1-1-2　在气象观察站的百叶箱内，气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上，如图 1-1 所示的曲线. 根据这个图形，我们就能知道这一天内时间 t 从 O 点到 24 点气温 T 的变化情形.

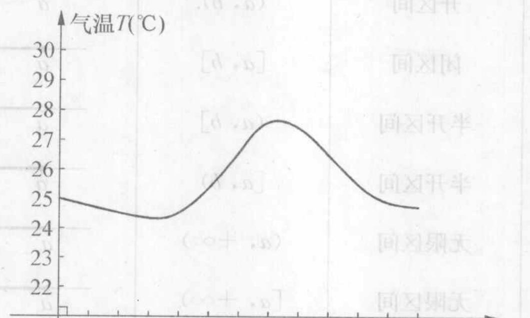


图 1-1

例 1-1-3　在标准大气压下，水的温度 T 与体积 V 互相联系着，实测如表1-2.

表 1-2

温度(℃)	0	2	4	6	8	10	12	14
体积(cm^3)	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

上述三个实例，实际意义完全不同. 但是，从数学角度看，却有共同的特征：都有两个数集和一个对应法则，并且，其中一个数集中的任意数，按照对应法则，都对应着实数集 **R** 中的唯一的数. 于是，我们把这些共同特性概括起来，就有如下的函数概念.

定义 1.1 D 是给定的一个数集，f 是一个确定的对应法则，如果对于 D 中每一个数 x，通过 f，都有 **R** 中一个唯一的数 y 与之对应，则称 f 是确定在数集 D 上的一个**函数**，记作

$$f: D \to \mathbf{R},$$

其中，D 称为函数的**定义域**，如果 D 中的数 x 根据法则 f 对应 y，那么记 $y = f(x)$，称为 f 在数 x 的函数值，全体函数值集合

$$D_f = f(D) = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\} \subseteq \mathbf{R}$$

称为函数 f 的**值域**.

在这里要注意：

(1) 在定义域中，x 是 D 中的任意一数，因此它是一个变量，y 是 **R** 中的一个数，也是一个变量，只不过它是随 x 的给定而确定的，所以，我们称 x 为**自变量**，y 为**因变量**.

(2) 由上述定义可知，决定一个函数必须知道定义域 D，对应法则 f 和函数值所在的集合 B. 函数值是由 $x \in D$ 通过 f 而唯一确定的实数，通常把 B 取为全体实数 $(-\infty, +\infty)$. 于是定义域 D 和对应法则 f 就成为确定函数的两个要素. 从而记号：

$$y = f(x),\ x \in D$$

也就表达了一个函数. 如果一个函数的对应法则是用数学式子来表达的，其定义域就是使这一式子有意义的自变量所取值的全体，这时定义域 D 也可以省略不写. 因此，表示一个函数，最主要的就是对应法则 f. 今后在不至于引起混淆的情形下，一般可不提 D，简单地说“函数 $y = f(x)$”或“函数 $f(x)$”. 在中学里，我们也称“y 是 x 的函数”，其含义是指自变量 x 和因变量 y 之间存在一种确定的对应法则，而不能理解为“y 是函数”. 因为离开了 x 和 f，孤立地讲函数 y 是没有意义的.

(3) 一个函数，在其定义域的不同部分也可以用不同的式子表示，如

$$f(x) = \begin{cases} x^2,\ x \in (0, +\infty), \\ \dfrac{1}{2},\ x = 0, \\ -x+1,\ x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

这种形式的函数，称为**分段函数**，在数学分析中时常见到. 其对应法则是：若自变量的值在$(0, +\infty)$内，则其函数值为 $f(x)=x^2$；若 $x=0$，则有 $f(0)=\frac{1}{2}$；若 x 在$(-\infty, 0)$内取值，则其函数值为 $f(x)=-x+1$. 又如，绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0,\end{cases}$ 其定义域为 $D=\mathbf{R}$，值域为 $f(D)=[0, +\infty)$.

(4) 有些函数不能用我们在中学里已经知道的三种方法（公式法，如例 1-1-1；图象法，如例 1-1-2；列表法，如例 1-1-3）来表示，只能给予描述，如定义在$[0, 1]$上的**狄利克雷（Dirichlet）函数**：

$$D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\ 0, x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$$

和定义在$[0, 1]$上的**黎曼（Riemann）函数**：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, x=\dfrac{p}{q}(p, q\in\mathbf{Z}^+, p、q\text{互质}),\\ 0, x=0, 1\text{ 及 }x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$$

等等.

1.1.3.2　函数的图象和简单性质

设 $y=f(x)$ 是定义在$[a, b]$上的一个函数. 在平面上取定直角坐标系后，对每个 $x\in[a, b]$都可确定平面上一点 $P(x, y)=P(x, f(x))$. 当 x 取遍$[a, b]$上所有值时，点 $P(x, y)$便构成平面上的一个图形，这个图形称为函数 $y=f(x)$ 的图象. 通常函数的图象是一条曲线（图1-2）.

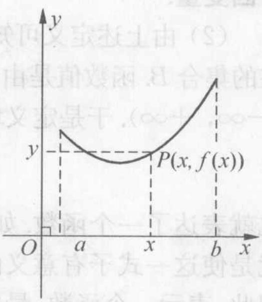


图 1-2

图象具有直观性的特点，一旦画出了函数的图象，就对该函数的变化方式及发展趋势一目了然，这样，我们有可能运用几何方法来研究运动和变化过程.

根据函数的特性来讨论它的图形的几何特性，是作函数图形的必不可少的步骤. 这里介绍今后经常接触到的几种函数.

(1) 有界函数. 设 $f(x)$是定义在数集 D 上的函数，若存在某常数 M，使得对于一切 $x\in D$ 有

$$f(x)\leqslant M\quad(\text{或 }f(x)\geqslant M),$$

则称 $f(x)$在 D 上有**上（或下）界**，数 M 为它的一个**上（或下）界**. 易知，若 M 为$f(x)$在 D 上的一个上（或下）界，则任何大（或小）于 M 的数也是 $f(x)$在 D 上的一个上

(或下)界.

若函数在 D 上既有上界,又有下界,则称 $f(x)$ 为 D 上的**有界函数**. 因此,若 $f(x)$ 为 D 上有界函数,则必存在某正数 M,使得对一切 $x \in D$,恒有

$$|f(x)| \leqslant M.$$

如果这样的数 M 不存在,则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

有界函数图象的特点是它完全落在平行于 x 轴的两直线 $y = M$ 和 $y = -M$ 之间.

例如, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ 在整个数轴上是有界的,因为对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$,恒有 $|\sin x| \leqslant 1$ 和 $|\cos x| \leqslant 1$.

函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上既无上界又无下界, $g(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上仅有下界而无上界.

(2) 单调函数. 若 D 上的函数 $y = f(x)$,对于任意的 $x_1, x_2 \in D$,当 $x_1 < x_2$ 时,都有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)(\text{或 } f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $y = f(x)$ 是 D 上的**单调递增**(**或单调递减**)**函数**. 如果把符号"$\leqslant$"(或"$\geqslant$")改成"$<$"(或"$>$")不等式还成立,则称 $f(x)$ 为**严格单调递增**(**或严格单调递减**)**函数**. (**严格**)**单调递增函数**和(**严格**)**单调递减函数统称为**(**严格**)**单调函数**. 单调递增函数的图形随 x 的增大而保持上升的趋势,单调递减函数的图形随 x 的增大而保持下降的趋势.

例如,**取整函数** $f(x) = [x]$($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,如 $f(3.5) = [3.5] = 3$, $f(-6.3) = -7$)在 $(-\infty, +\infty)$ 上是递增函数(但不是严格递增的). 因为对于 x_1、$x_2 \in (-\infty, +\infty)$,当 $x_1 < x_2$ 时有 $[x_1] \leqslant [x_2]$,其图象如图 1-3 所示.

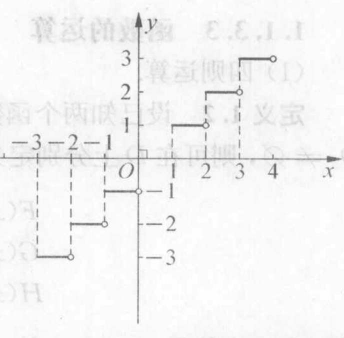


图 1-3

又如函数, $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是单调递减的,在 $(0, +\infty)$ 上是单调递增的,但在整个定义域上不是单调的.

(3) 奇函数与偶函数. 设函数 $y = f(x)$, $x \in D$,其中 D 为对称于原点的数集,即当 $x \in D$ 时,有 $-x \in D$.

1°若对任何 $x \in D$ 均有, $f(-x) = -f(x)$,则称 $y = f(x)$ 为**奇函数**.

2°若对任何 $x \in D$,均有 $f(-x) = f(x)$,则称 $y = f(x)$ 为**偶函数**.

偶函数的图象是对称于 y 轴的,因为 $f(-x) = f(x)$,所以若 $P(x, f(x))$ 是图形上的一点,则和它对称于 y 轴的点 $P'(-x, f(-x)) = P'(-x, f(x))$ 也在图形上. 同理可知,奇函数的图形是对称于坐标原点的.