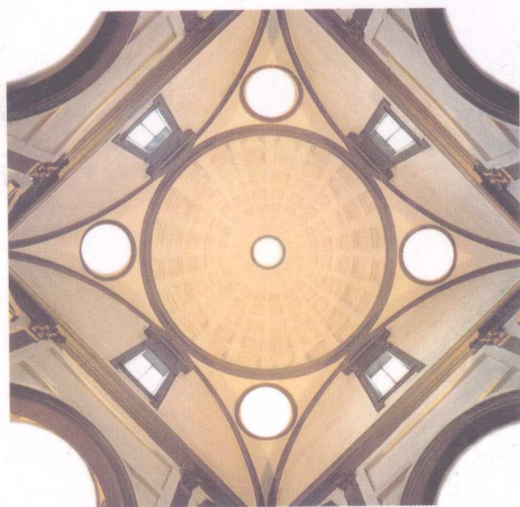




高校教材

Advanced Mathematics

物理、电子、计算机类专业适用



高等数学

上

主编 © 陈世兴 张建成



华东师范大学出版社

高等数学上

物理、电子、计算机类专业适用

主 编 陈世兴 张建成

编写人员(按姓氏笔画排列)

王灿照 苏连塔 张纪平

张建成 陈世兴 程广文



华东师范大学出版社

(地址: 上海市静安区南京西路370号华东师范大学出版集团总部大楼505室 邮编: 200062)

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/陈世兴, 张建成主编. —上海: 华东师范大学出版社, 2008. 3

物理、电子、计算机类专业适用

ISBN 978-7-5617-5914-1

I. 高… II. ①陈…②张… III. 高等数学—高等学校—教材
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 029210 号

高等数学(上)

(物理、电子、计算机类专业适用)

主 编 陈世兴 张建成

项目编辑 朱建宝

文字编辑 李 娜

封面设计 卢晓红

版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社

社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062

客服电话 021-62865537(兼传真)

门市(邮购)电话 021-62869887

门市地址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口

销售业务电话 高教分社 021-62235021 021-62237614(传真)

基教分社 021-62237610 021-62602316(传真)

教辅分社 021-62221434 021-62860410(传真)

综合分社 021-62238336 021-62237612(传真)

北京分社 021-62235097 021-62237614(传真)

010-82275258 010-82275049(传真)

编辑业务电话 021-62572474

网 址 www.ecnupress.com.cn

印 刷 者 华东师范大学印刷厂

开 本 787×1092 16 开

印 张 25.5

字 数 529 千字

版 次 2008 年 4 月第 1 版

印 次 2008 年 4 月第 1 次

印 数 5 100

书 号 ISBN 978-7-5617-5914-1 / N·112

定 价 39.80 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

前言

本教材依据教育部颁发的《高等数学课程教学基本要求》，组织长期在高校教学第一线的教师编写。该教材的目标定位为：适合地方性高校的教学实际，面向物理类、电子信息类和计算机类本科专业。

编写中，我们着眼于物理类、电子信息类和计算机类本科专业对高等数学的需求对内容进行取舍，概念的引入、例题和习题的选用都尽量联系专业知识。我们力求做到：循序渐进，由浅入深；叙述简洁，概念明了；突出重点，分散难点。重要概念和重要理论讲述前，重视知识背景的阐述，旨在使学生增强用数学解决实际问题的意识和准确理解、把握知识。为了使初学的学生易于掌握，我们设置较多的例题；为了帮助学生准确理解概念、掌握方法，我们每章安排有小结。

考虑到学与练紧密结合的重要性，每节安排的习题紧扣重点，并由易到难；考虑到学生考研的需要，每一章我们还安排了复习题。复习题分成两类，一类是综合性的基本题，可用于学生复习；另一类是有一定难度的题目，是为准备考研学生设置的。为了教学的方便和学生自学的需要，书后附有习题的参考答案，并给出了有一定难度的证明题的提示。

本教材共有 12 章，分上、下两册。上册内容有一元微积分、常微分方程、无穷级数；下册有空间解析几何、线性代数、多元微积分。建议教学学时在 220 学时左右。

参加本书编写的有：张纪平（第 1、2、3 章），苏连塔（第 4、5 章），张建成（第 6、7 章），王灿照（第 8、9 章），程广文（第 10、11、12 章）。最后全书由张建成、陈世兴汇总定稿。

由于我们水平有限，书中难免有不足或错误，恳请广大读者批评指正。

编者

2008 年 3 月

前

言

●
●
●

目 录

第1章 函数与极限	1
1.1 函 数	1
1.1.1 实数	1
1.1.2 变量与区间	3
1.1.3 函数	4
习题 1-1	14
1.2 数列的极限	15
1.2.1 数列极限的定义	16
1.2.2 收敛数列的性质	20
习题 1-2	22
1.3 函数的极限	22
1.3.1 函数极限的定义	22
1.3.2 函数极限的性质	30
习题 1-3	31
1.4 极限运算法则	31
习题 1-4	37
1.5 极限存在准则 两个重要极限	37
习题 1-5	43
1.6 无穷小与无穷大	43
1.6.1 无穷小	43
1.6.2 无穷大	44
1.6.3 无穷小阶的比较	46
习题 1-6	48
1.7 函数的连续性与间断点	48
1.7.1 函数的连续性	49
1.7.2 函数的间断点	51
习题 1-7	52

1.8 连续函数的运算、初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质	53
1.8.1 连续函数的和、差、积及商的连续性	53
1.8.2 反函数与复合函数的连续性	54
1.8.3 闭区间上连续函数的基本性质	55
习题 1-8	58
小 结	59
复习题 1	60

第2章 导数与微分

2.1 导数的概念	63
2.1.1 引例	63
2.1.2 导数的定义	64
2.1.3 导数的几何意义和物理意义	66
2.1.4 单侧导数	68
2.1.5 函数可导性与连续性的关系	69
习题 2-1	69
2.2 函数的求导法则	70
2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则	70
2.2.2 复合函数的求导法则	73
2.2.3 反函数的求导法则	75
2.2.4 基本求导法则与公式	76
习题 2-2	77
2.3 高阶导数	78
2.3.1 高阶导数	78
2.3.2 莱布尼茨(Leibniz)公式	80
习题 2-3	81
2.4 隐函数、参数方程所确定函数的导数 极坐标方程 相关变化率	81
2.4.1 隐函数的导数	81
2.4.2 由参数方程所确定的函数的导数 极坐标方程	84
2.4.3 相关变化率	87
习题 2-4	87
2.5 函数的微分	88
2.5.1 微分的概念	88
2.5.2 微分的运算	91
2.5.3 微分的应用	92
习题 2-5	95

小 结	96
复习题 2	97
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	100
3.1 微分中值定理	100
3.1.1 费尔马引理	100
3.1.2 中值定理	101
习题 3-1	105
3.2 洛必塔法则	106
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型不定式	107
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式	108
3.2.3 其他类型的不定式	109
习题 3-2	111
3.3 泰勒公式	111
习题 3-3	117
3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性	118
3.4.1 函数单调性的判别法	118
3.4.2 曲线的凸性与拐点	121
习题 3-4	125
3.5 函数的极值与函数的最大值最小值	125
3.5.1 函数极值的判别法	125
3.5.2 最大值与最小值的求法	128
习题 3-5	131
3.6 函数图象的描绘	132
3.6.1 渐近线	132
3.6.2 函数的图象	135
习题 3-6	137
小 结	137
复习题 3	138
第 4 章 不定积分	141
4.1 不定积分的概念	141
4.1.1 原函数的概念	141
4.1.2 不定积分的概念	142

4.1.3	不定积分的几何意义	143
4.1.4	基本积分表	144
4.1.5	不定积分的性质	145
习题 4-1		147
4.2	换元积分法和分部积分法	147
4.2.1	换元积分法	148
4.2.2	分部积分法	154
习题 4-2		158
4.3	一些特殊类型函数的积分法	160
4.3.1	有理函数的积分	160
4.3.2	三角函数有理式的积分	164
4.3.3	简单无理函数的积分	166
习题 4-3		168
4.4	积分表的使用	169
习题 4-4		172
小 结		172
复习题 4		174
第 5 章 定积分		179
5.1	定积分概念	179
5.1.1	定积分问题举例	179
5.1.2	定积分的定义	181
5.1.3	可积性条件	183
5.1.4	定积分的几何意义	185
习题 5-1		187
5.2	定积分的基本性质	187
习题 5-2		192
5.3	微积分基本公式	193
5.3.1	积分上限函数及其导数	193
5.3.2	牛顿-莱布尼茨公式	196
习题 5-3		199
5.4	定积分的计算	200
5.4.1	定积分的换元积分法	200
5.4.2	定积分的分部积分法	203
习题 5-4		206
5.5	定积分的近似计算	207

5.5.1	矩形法	207
5.5.2	梯形法	208
5.5.3	抛物线法	209
习题 5-5		211
5.6	定积分的应用	212
5.6.1	定积分的元素法	212
5.6.2	定积分在几何上的应用	213
5.6.3	定积分在物理上的应用	224
习题 5-6		233
5.7	广义积分	236
5.7.1	积分区间为无限的广义积分	236
5.7.2	无界函数的广义积分	238
5.7.3	广义积分的审敛法	241
5.7.4	Γ -函数与 B -函数	245
习题 5-7		247
小 结		248
复习题 5		251
第 6 章	常微分方程	259
6.1	微分方程的基本概念	259
6.1.1	引例	259
6.1.2	基本概念	261
习题 6-1		262
6.2	一阶微分方程	263
6.2.1	可分离变量方程	263
6.2.2	可化为分离变量的方程	266
6.2.3	一阶线性微分方程	268
习题 6-2		274
6.3	可降阶的二阶微分方程	274
6.3.1	$y'' = f(x)$ 型的微分方程	274
6.3.2	$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	275
6.3.3	$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	276
习题 6-3		279
6.4	二阶线性微分方程	279
6.4.1	二阶线性微分方程解的性质与通解结构	279
6.4.2	二阶常系数齐次线性方程	284

6.4.3 二阶常系数非齐次线性方程	288
习题 6-4	295
6.5 应用举例	295
习题 6-5	301
小 结	301
复习题 6	303
第 7 章 无穷级数	306
7.1 数项级数	306
7.1.1 数项级数的概念	306
7.1.2 收敛级数的简单性质	308
7.1.3 正项级数的收敛判别法	311
7.1.4 任意项级数的收敛判别法	317
7.1.5 绝对收敛级数的性质	320
习题 7-1	323
7.2 幂级数	324
7.2.1 函数项级数的概念	325
7.2.2 幂级数及其收敛性	326
7.2.3 幂级数的性质	330
习题 7-2	332
7.3 函数的幂级数展开式	332
7.3.1 泰勒级数	332
7.3.2 初等函数的幂级数展开式	335
7.3.3 函数的幂级数展开式的应用	340
7.3.4 欧拉公式	345
习题 7-3	346
7.4 傅立叶级数	347
7.4.1 傅立叶系数与傅立叶级数	347
7.4.2 奇、偶函数的傅立叶级数	352
7.4.3 周期为 $2l$ 的函数的傅立叶级数	355
习题 7-4	359
小 结	360
复习题 7	361
习题答案与提示	364
附表 积分表	388
参考文献	398

第1章 函数与极限

17 世纪,因为研究运动的需要,把变量引入了数学,从而促使高等数学的一个重要部分——数学分析的形成和发展.数学分析是以函数为主要研究对象、以极限为基本工具,分析研究变量间的依赖关系,以及通过这些关系所表现出来的重要性质的—门学科.本章将在复习和加深中学里学过的函数概念的基础上,阐明函数的极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

1.1 函 数

数学分析(甚至是整个高等数学)研究的基本对象是函数,函数刻画了变量之间的依赖关系.在本课程中,除特殊说明外,变量都在实数范围内取值.因此,本节教材自然地要按实数、变量、变量之间的关系(即函数关系)这样的顺序来展开.

1.1.1 实数

1.1.1.1 实数概述

实数分为有理数和无理数两大类.有理数包括正、负整数,零和正、负分数.每一个有理数都可用分数形式 $\frac{p}{q}$ (其中 q 是正整数, p 是整数,且 p 、 q 互质)表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示.由于有限十进小数可写成以 0 或以 9 为循环节的无限十进循环小数,因此可以说,任一有理数都能表示为无限十进循环小数.另外,我们把每一个无限十进不循环小数(如 $\sqrt{2}$, π 等)称为无理数.于是,任一实数都可用无限十进小数形式来表示.

现举实数的两个重要性质:

(1) 有理数的稠密性.给两个有理数 a 、 b ($a < b$),则在 a 、 b 之间至少还可以找到一个有理数.例如 a 、 b 的算术平均数 $c = \frac{a+b}{2}$ 就是 a 、 b 之间的一个有理数.同样,在 a 、 c 之间也至少可再找到一个有理数.依此类推,可知 a 、 b 之间可以找到无穷多个有理数.所谓有理数的稠密性是指:不论有理数 a 、 b 相差多么小,在 a 、 b 之

间总可以找到无穷多个有理数.

我们还可以论证,无理数和实数也具有稠密性.

(2) 实数的连续性. 我们在中学数学中知道,引进数轴以后,实数与数轴上的点之间存在着——对应关系,即任一实数都对应数轴上唯一的一点;反之,数轴上的每一点总是代表一个实数. 可见,实数充满数轴,而没有“空隙”,这就叫做实数的连续性. 有理数虽然稠密,但并不具有连续性. 例如, $\sqrt{2}$ 、 π 这些无理数就是有理数中的“空隙”. 任意两个有理数之间都有无穷多个这种“空隙”.

实数的连续性是实数的一个根本的性质,它是数学分析的理论基础.

1.1.1.2 绝对值

一个实数 a 的绝对值,记为 $|a|$,定义如下:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

实数 a 的绝对值 $|a|$ 表示点 a 与原点间的距离. 例如, $|a| = 4$ 表示点 a 到原点的距离等于 4,如点 a 在原点之右,即 $a > 0$,由定义知 $a = 4$;如点 a 在原点之左,即 $a < 0$,则 $a = -4$. 也就是说,在数轴上距离原点为 4 的点有两个: $a = 4$, $a = -4$. 同样, $|a - 1| = 2$ 表示点 a 到点 1 的距离等于 2,由绝对值的定义知,这样的点有两个: $a = 3$, $a = -1$.

根据绝对值定义,可知

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

因此,当 $|a| \leq b (b > 0)$ 时,又可以把它表示成

$$-b \leq a \leq b.$$

绝对值还有如下一些性质:

$$1^\circ |a \cdot b| = |a| \cdot |b|; \quad 2^\circ \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0);$$

$$3^\circ |a + b| \leq |a| + |b|; \quad 4^\circ |a - b| \geq |a| - |b|.$$

性质 1° 、 2° 成立,极其明显. 下面来证明性质 3° 和 4° .

证 3° 因为 $-|a| \leq a \leq |a|$, $-|b| \leq b \leq |b|$, 将两式逐项相加,得

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|),$$

故

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

证 4° 设 $c = a - b$, 则 $a = b + c$, 根据性质 3° 可知

故

$$|a-b| \geq |a| - |b|.$$

1.1.2 变量与区间

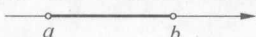
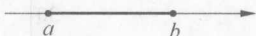
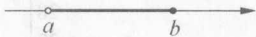
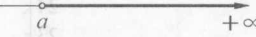
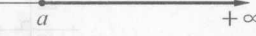
所谓**变量**,是指在某个过程中可取不同数值的那些量. **常量**则是指在一个过程中保持数值不变的量. 通常用字母 $x, y, z, \dots$ 表示变量, 用字母 $a, b, c, \dots$ 表示常量.

必须指出, 一个量究竟是常量还是变量, 往往与具体问题有关. 同一个量, 在某个过程中可以认为是常量, 而在另一个过程中可能是变量. 例如, 重力加速度通常都认为是常量, 其实也是变化的, 只不过变化得很小就是了. 当我们计算地球卫星的轨道时, 地心引力的变化就不很小, 不能把它看作常量. 这时, 重力加速度就应看成是变量了.

一个变量允许取值的范围, 称为变量的**变域**. 变量的变域是一个集合. 关于集合的初步知识, 读者在中学数学中已经学过了, 本书不再重述.

实数全体组成的集合称为**实数集**, 记作 $\mathbf{R}$. 本书所说的“数集”都是指实数集 $\mathbf{R}$ 的子集. 区间是实数集的特殊子集. 现将各种区间的定义、名称、符号及图象列表如表 1-1 (a 与 b 是两个实数, 且 $a < b$):

表 1-1

定 义	名 称	符 号	图 象
$\{x \mid a < x < b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x \mid a < x \leq b\}$	半开区间	$(a, b]$	
$\{x \mid a \leq x < b\}$	半开区间	$[a, b)$	
$\{x \mid a < x\}$	无限区间	$(a, +\infty)$	
$\{x \mid a \leq x\}$	无限区间	$[a, +\infty)$	
$\{x \mid x < b\}$	无限区间	$(-\infty, b)$	
$\{x \mid x \leq b\}$	无限区间	$(-\infty, b]$	

区间 $(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}$, 即实数集.

开区间 $(a - \delta, a + \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$, 这里 δ 是某个正数, 称为点 a 的

δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$. δ 称为邻域 $U(a, \delta)$ 的半径,点 a 称为邻域 $U(a, \delta)$ 的中心.若不指明点 a 的邻域半径时,统称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.

在点 a 的邻域 $U(a, \delta)$ 内去掉点 a ,即: $\{x | 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 去心邻域,记作 $\dot{U}(a, \delta)$. 不指明点 a 的去心邻域的半径时,记作 $\dot{U}(a)$.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形,例如

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in [c, d]\},$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域,这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a, b]$ 和闭区间 $[c, d]$.

1.1.3 函数

1.1.3.1 函数概念

先考察几个例子.

例 1-1-1 自由落体的路程 s 与时间 t 由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (1-1)$$

联系着, t 的值确定了, s 的值就随之确定. 设落体着地的时刻为 T ,则当 t 取0到 T 之间任何值时,由(1-1)就计算得 s 为0到 $\frac{1}{2}gT^2$ 之间的某一值.

例 1-1-2 在气象观察站的百叶箱内,气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上,如图 1-1 所示的曲线. 根据这个图形,我们就能知道这一天内时间 t 从 O 点到24点气温 T 的变化情形.

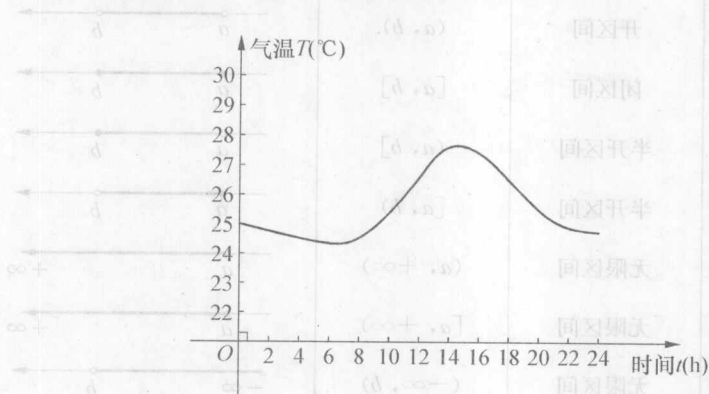


图 1-1

例 1-1-3 在标准大气压下,水的温度 T 与体积 V 互相联系着,实测如表 1-2.

表 1-2

温度($^{\circ}\text{C}$)	0	2	4	6	8	10	12	14
体积(cm^3)	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

上述三个实例,实际意义完全不同.但是,从数学角度看,却有共同的特征:都有两个数集和一个对应法则,并且,其中一个数集中的任意数,按照对应法则,都对应着实数集 $\mathbf{R}$ 中的唯一的数.于是,我们把这些共同特性概括起来,就有如下的函数概念.

定义 1.1 D 是给定的一个数集, f 是一个确定的对应法则,如果对于 D 中每一个数 x ,通过 f ,都有 $\mathbf{R}$ 中一个唯一的数 y 与之对应,则称 f 是确定在数集 D 上的一个函数,记作

$$f: D \rightarrow \mathbf{R},$$

其中, D 称为函数的定义域,如果 D 中的数 x 根据法则 f 对应 y ,那么记 $y = f(x)$,称为 f 在数 x 的函数值,全体函数值集合

$$D_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\} \subseteq \mathbf{R}$$

称为函数 f 的值域.

在这里要注意:

(1) 在定义域中, x 是 D 中的任意一数,因此它是一个变量, y 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数,也是一个变量,只不过它是随 x 的给定而确定的,所以,我们称 x 为自变量, y 为因变量.

(2) 由上述定义可知,决定一个函数必须知道定义域 D ,对应法则 f 和函数值所在的集合 B . 函数值是由 $x \in D$ 通过 f 而唯一确定的实数,通常把 B 取为全体实数 $(-\infty, +\infty)$. 于是定义域 D 和对应法则 f 就成为确定函数的两个要素. 从而记号:

$$y = f(x), x \in D$$

也就表达了一个函数. 如果一个函数的对应法则是用数学式子来表达的,其定义域就是使这一式子有意义的自变量所取值的全体,这时定义域 D 也可以省略不写. 因此,表示一个函数,最主要的就是对应法则 f . 今后在不至于引起混淆的情形下,一般可不提 D ,简单地说“函数 $y = f(x)$ ”或“函数 $f(x)$ ”. 在中学里,我们也称“ y 是 x 的函数”,其含义是指自变量 x 和因变量 y 之间存在一种确定的对应法则,而不能理解为“ y 是函数”. 因为离开了 x 和 f ,孤立地讲函数 y 是没有意义的.

(3) 一个函数,在其定义域的不同部分也可以用不同的式子表示,如

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0, +\infty), \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ -x + 1, & x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

这种形式的函数,称为分段函数,在数学分析中时常见到.其对应法则是:若自变量的值在 $(0, +\infty)$ 内,则其函数值为 $f(x) = x^2$;若 $x = 0$,则有 $f(0) = \frac{1}{2}$;若 x 在 $(-\infty, 0)$ 内取值,则其函数值为 $f(x) = -x + 1$.又如,绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ 其定义域为 $D = \mathbf{R}$,值域为 $f(D) = [0, +\infty)$.

(4) 有些函数不能用我们在中学里已经知道的三种方法(公式法,如例 1-1-1;图象法,如例 1-1-2;列表法,如例 1-1-3)来表示,只能给予描述,如定义在 $[0, 1]$ 上的狄利克雷(Dirichlet)函数:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$$

和定义在 $[0, 1]$ 上的黎曼(Riemann)函数:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} (p, q \in \mathbf{Z}^+, p, q \text{ 互质}), \\ 0, & x = 0, 1 \text{ 及 } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$$

等等.

1.1.3.2 函数的图象和简单性质

设 $y = f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的一个函数.在平面上取定直角坐标系后,对每个 $x \in [a, b]$ 都可确定平面上一点 $P(x, y) = P(x, f(x))$.当 x 取遍 $[a, b]$ 上所有值时,点 $P(x, y)$ 便构成平面上的一个图形,这个图形称为函数 $y = f(x)$ 的图象.通常函数的图象是一条曲线(图1-2).

图象具有直观性的特点,一旦画出了函数的图象,就对该函数的变化方式及发展趋势一目了然,这样,我们有可能运用几何方法来研究运动和变化过程.

根据函数的特性来讨论它的图形的几何特性,是作函数图形的必不可少的步骤.这里介绍今后经常接触到的几种函数.

(1) 有界函数.设 $f(x)$ 是定义在数集 D 上的函数,若存在某常数 M ,使得对于一切 $x \in D$ 有

$$f(x) \leq M \quad (\text{或 } f(x) \geq M),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有上(或下)界,数 M 为它的一个上(或下)界.易知,若 M 为 $f(x)$ 在 D 上的一个上(或下)界,则任何大(或小)于 M 的数也是 $f(x)$ 在 D 上的一个上

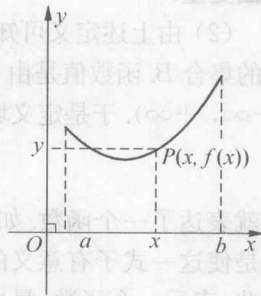


图 1-2

(或下)界.

若函数在 D 上既有上界,又有下界,则称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数. 因此,若 $f(x)$ 为 D 上有界函数,则必存在某正数 M ,使得对一切 $x \in D$,恒有

$$|f(x)| \leq M.$$

如果这样的数 M 不存在,则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

有界函数图象的特点是它完全落在平行于 x 轴的两直线 $y = M$ 和 $y = -M$ 之间.

例如, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ 在整个数轴上是有界的,因为对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$,恒有 $|\sin x| \leq 1$ 和 $|\cos x| \leq 1$.

函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上既无上界又无下界, $g(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上仅有下界而无上界.

(2) 单调函数. 若 D 上的函数 $y = f(x)$, 对于任意的 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (或 } f(x_1) \geq f(x_2) \text{)},$$

则称函数 $y = f(x)$ 是 D 上的单调递增(或单调递减)函数. 如果把符号“ $\leq$ ”(或“ $\geq$ ”)改成“ $<$ ”(或“ $>$ ”)不等式还成立,则称 $f(x)$ 为严格单调递增(或严格单调递减)函数. (严格)单调递增函数和(严格)单调递减函数统称为(严格)单调函数. 单调递增函数的图形随 x 的增大而保持上升的趋势,单调递减函数的图形随 x 的增大而保持下降的趋势.

例如,取整函数 $f(x) = [x]$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,如 $f(3.5) = [3.5] = 3$, $f(-6.3) = -7$) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是递增函数(但不是严格递增的). 因为对于 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 当 $x_1 < x_2$ 时有 $[x_1] \leq [x_2]$, 其图象如图 1-3 所示.

又如函数, $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是单调递减的,在 $(0, +\infty)$ 上是单调递增的,但在整个定义域上不是单调的.

(3) 奇函数与偶函数. 设函数 $y = f(x)$,

$x \in D$, 其中 D 为对称于原点的数集,即当 $x \in D$ 时,有 $-x \in D$.

1° 若对任何 $x \in D$ 均有, $f(-x) = -f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为奇函数.

2° 若对任何 $x \in D$, 均有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为偶函数.

偶函数的图象是对称于 y 轴的, 因为 $f(-x) = f(x)$, 所以若 $P(x, f(x))$ 是图形上的一点, 则和它对称于 y 轴的点 $P'(-x, f(-x)) = P'(-x, f(x))$ 也在图形上. 同理可知, 奇函数的图形是对称于坐标原点的.

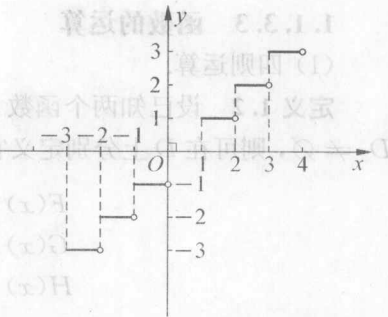


图 1-3