21世纪高等院校规划教材

概率论与数理统计

徐玉民 主编 樊剑武 副主编 赵来玉 主审

国防工业出版社
National Defense Industry Press

21世纪高等院校规划教材

概率论与数理统计

徐玉民　主　编

樊剑武　副主编

赵来玉　主　审

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书是参照教育部对本课程的基本要求编写的高等院校(独立学院)教材。

本书理论严谨,内容编排上突出重点,分散难点,概念的叙述力求清晰易懂,并注意与实际问题相结合。

本书主要内容包括:概率论的基本概念,一维随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律及中心极限定理,数理统计的基本概念,参数估计,假设检验等八章,各章均配有习题,分基本题及提高题,以适应不同层次学生的要求。

本书适用于独立学院学生使用,也可用作为普通高等院校、高职高专学生教学参考,亦可作为教师参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/徐玉民主编. —北京:国防工业出版社,2008.1

21世纪高等院校规划教材

ISBN 978-7-118-05520-7

Ⅰ. 概… Ⅱ. 徐… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 012610 号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100044)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×960　1/16　**印张** 13¾　**字数** 285 千字

2008年1月第1版第1次印刷　**印数** 1—5000 册　**定价** 24.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422　发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535　发行业务:(010)68472764

前 言

独立学院的诞生，是中国高等教育的新生事物。独立学院的发展，是中国高等教育充满活力的体现。为了更好地探索独立学院应用型本科人才培养的模式，燕山大学里仁学院在“高等数学”适应性教学方式实践的基础上，将适应性教学方式推广到“概率论与数理统计”课程教学，力图为不同学习要求、不同学习基础的学生提供适应其发展需求的教学内容，因材施教，让学生在学习过程中感受成功，享受学习的快乐。

本书主要是为满足独立学院开展“适应性”教学需要编写而成的。编写中力求体现“以应用为目标，以必需、够用为度”和适应不同发展目标、不同学习基础学生学习的需要，在保证系统性、科学性的基础上，注意讲清概念，突出方法教学，注重学生基本运算能力、分析问题能力、解决问题能力的培养，重视理论联系实际，内容通俗易懂，努力体现独立学院“适应性”教学的特点。

在编写本书时，我们力求在概念与理论、方法与技巧、实践与应用三方面做出较为合理的安排。在保留概率论与数理统计基本内容的前提下，以随机变量的常用分布为主线阐述知识。在编写上，遵循从具体到抽象，从特殊到一般的原则。考虑到独立学院学生的学习基础，略去了一些理论推导，力求做到通俗易懂。本书可作为独立学院 48 学时课程的教材使用（其中，概率论为 36 学时，数理统计为 12 学时）。

本书由徐玉民主编，樊剑武副主编，赵来玉主审，赵晓华、贠小青参与了部分习题的演算。在编写过程中得到了唐宗贤及国防工业出版社的大力支持，特此表示感谢。

由于编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，恳请读者和使用教师批评、指正。

编 者

2007 年 11 月于燕山大学里仁学院

目　录

第一章　概率论的基本概念

自然界的现象可以分为两大类：一类是在一定条件下必然要发生的现象，称为必然现象。另一类是在一定条件下可能发生，也可能不发生的现象，称为随机现象。

例如，在地球表面上，在标准大气压下，水到100℃必然沸腾，同性电荷必互相排斥，平面三角形内角之和为180°等都是必然现象的例子。又例如在相同条件下抛一枚硬币，徽花向上这个结果可能发生也可能不发生，在每次抛掷之前无法准确预言其结果。又如某种股票的价格在下一个交易日可能上升也可能下降等都是随机现象。但是人们发现，这种随机现象的一部分，在大量的重复试验或观察下，其结果又明显地呈现出某种规律性。例如大量重复抛硬币时徽花向上出现的次数约占总试验次数的二分之一。这样的规律称为统计规律性。

概率论是一门研究随机现象统计规律性数量关系的数学学科。

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机试验和样本空间

1. 随机试验

随机现象广泛存在于自然界与人类社会之中，为了研究随机现象，我们引入随机试验的概念。具有以下三个特征的试验称为随机试验 E，简称为试验。

(1) 在相同的条件下，试验可以重复地进行；

(2) 试验的结果不止一种，而且事先可以确知试验的所有结果；

(3) 在进行试验前不能确定出现哪一个结果。

例 1.1.1　列举随机试验的例子。

E_1：抛一枚硬币，观察出现正面 H 和反面 T 的情况；

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H 出现的次数；

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H 和反面 T 出现的情况；

E_4：掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_5：记录某电话交换台在一分钟内收到用户的呼唤次数；

E_6：在一批产品中任取 m 件，记录次品所占的比例；

E_7：从一批灯泡中任取一个，测试其寿命。

以上7个试验均具有随机试验的三个特点。

2. 样本空间

随机试验 E 的每一个可能的基本结果,称为这个试验的样本点,有时也称为基本事件(即由一个样本点组成的集合),全体样本点的集合称为样本空间,记为 S。

随机试验的目的决定了样本空间。

例 1.1.2 写出例 1.1.1 中随机试验所对应的样本空间 S_i。

$S_1 = \{H,T\}$;

$S_2 = \{0,1,2,3\}$;

$S_3 = \{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$;

$S_4 = \{1,2,3,4,5,6\}$,样本空间含有六个样本点;

$S_5 = \{0,1,2,3,\cdots\}$,样本空间含有可数个样本点;

$S_6 = \left\{\frac{0}{m},\frac{1}{m},\cdots,\frac{m}{m}\right\}$;

$S_7 = \{t \mid t \geqslant 0\}$,$t$ 表示灯泡寿命,样本空间含有不可数无穷多个样本点。

3. 随机事件

在随机试验中,把一次试验中可能出现也可能不出现,而在重复独立试验中具有某种统计规律性的事情称为随机事件(简称事件)。事件是概率论研究的直接对象。

自然界中的事件可分为如下三种:必然事件,不可能事件,随机事件。

如果在每次试验的结果中,某事件一定发生,则称这个事件为必然事件。如"上抛一石子的下落"就是必然事件。

如果在每次试验的结果中,某事件一定不发生,则这个事件叫做不可能事件,如"掷一颗骰子得 7 点"就是不可能事件。

虽然必然事件与不可能事件都是确定性的现象,但为了研究问题的方便,我们需要把它们看成特殊的随机事件。

今后常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示随机事件,用 S 及 $\varnothing$ 分别表示必然事件与不可能事件。

因为随机试验 E 的所有可能结果组成的集合是 E 的样本空间 S,我们又可称 E 的样本空间的子集为 E 的随机事件。

例如,E_4:抛一颗骰子,观察出现的点数。

$$S_4 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

设 A 为掷骰子得偶数点,它是一个随机事件。则

$$A = \{2,4,6\}$$

它是由三个基本事件组成的。我们看到,当骰子出现 2 点、4 点、6 点之一时,都表明事件 A 发生。显然 A 是 S_4 的子集。

如果事件 A 发生,则 A 所含的某一样本点必发生。若 A 所含的某一样本点发生,则说明

事件 A 发生。

今后在研究某一随机试验时，搞清楚样本空间是由哪些样本点组成的，以及所讨论的事件是由哪些样本点组成的，是非常重要的。

1.1.2 随机事件间的关系及运算

事件间的关系与集合间的关系很相似。关于集合运算的某些性质完全适用于事件。

(1) 包含关系：如果事件 A 发生，则事件 B 一定发生，称事件 B 包含事件 A。记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$。

(2) 相等关系：当且仅当 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，称 A 与 B 相等，记为 $A = B$(即 A 与 B 同时发生和不发生)。

(3) 事件的并："事件 A 与事件 B 至少有一个发生" 的事件称此事件为 A 与 B 的并事件(或和事件) 记为 $A \cup B$。同样"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生" 的事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并或和，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，也可推广到 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$。

(4) 事件的交："事件 A 与 B 同时发生" 的事件，称 A 与 B 的交或积，记为 $A \cap B$ 或 AB，它可以推广到 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$。

(5) 事件的差："A 发生而 B 不发生" 的事件，称为 A 与 B 的差事件，记为 $A - B$ 或 $A\overline{B}$。

(6) 互不相容事件：若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容，或 A 与 B 互斥。

(7) 对立事件：若事件 A 与 B 满足：

$$A \cup B = S, \quad A \cap B = \varnothing$$

则称 A 与 B 互为对立事件，或互逆事件、互余事件。事件 A 的对立事件，记为 $B = \overline{A}$。

事件的上述关系，可以用"文氏图"(图 1.1.1) 来直观地表达，图中的正方形表示样本空间 S。

事件间的运算同集合相似，有如下运算规律：

(1) 交换律 $\quad A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律 $\quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(3) 分配律 $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

(4) 德 · 莫根定理

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}, \quad \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

一般有 $\quad \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，即"长杠变短，开口变方向"。

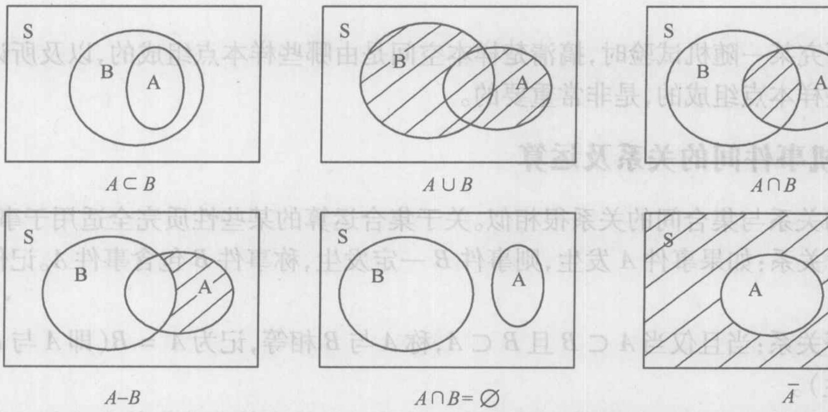

图 1.1.1

例 1.1.3 设 A,B,C 为事件,试用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件:

(1) 仅 A 发生;

(2) A,B,C 都发生;

(3) A,B,C 都不发生;

(4) A,B,C 至少一个发生;

(5) A,B,C 恰有一个发生;

(6) A 不发生,而 B,C 至少一个发生;

(7) A,B,C 中不多于一个发生;

(8) A,B,C 中至少两个发生;

(9) A,B,C 中不多于两个发生;

(10) A,B,C 中恰有两个发生。

解: (1) $A\bar{B}\bar{C}$(或 $A-B-C$)

(2) ABC

(3) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(4) $A \cup B \cup C$

(5) $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$

(6) $\bar{A} \cup (B \cup C)$

(7) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$ (或 $\overline{AB \cup BC \cup AC}$)

(8) $AB \cup BC \cup AC$ (或 $AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC$)

(9) $\overline{ABC}$(或由德·莫根定理: $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$,或同 A,B,C 不都发生)

(10) $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$

熟练掌握一些事件的运算关系来表示事件,对以后计算概率大有帮助,是必须重视的知识点。

1.2 频率与概率

1.2.1 概率的统计定义

除必然事件和不可能事件外,一个事件在一次试验中可能发生,也可能不发生。为了描述这个事件发生的可能性的大小,我们引入频率的概念,它描述了事件发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生可能性大小的数,即概率。

频率的定义:在相同的条件下,将一随机试验进行 n 次重复试验,事件 A 发生的次数为 n_A 称为事件 A 的频数,$f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率。

事件 A 的频率不是一个固定数。由于事件在每次试验中可能发生也可能不发生,因而在 n 次试验中事件 A 发生的频率也就随着试验的结果不同而具有波动性。

例如,在相同条件下重复地对同一小麦种子做发芽试验,得到如下统计表 1.2.1。

表 1.2.1

抽取粒数 n	5	10	50	100	300	600
发芽粒数 n_A	5	9	44	91	272	542
发芽频率 $f_n(A)$	1	0.9	0.88	0.91	0.907	0.903

由表可见,在取出的种子中发芽数是随机的。但随抽查粒数的增多发芽的频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性,逐渐稳定于 0.9。

再如,历史上一些著名的抛硬币试验见表 1.2.2。

表 1.2.2

试验者	抛币次数 n	出现正面次数 n_A	频率 $f_n(A)$
蒲丰	4040	2048	0.5069
法摩根	4092	2048	0.5005
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

由上表可见:随 n 增大,频率 $f_n(H)$ 在 0.5 附近摆动且逐渐稳定于 0.5,这种"频率稳定性"即通常所说的统计规律性。

频率能反映一个事件发生的频繁程度,从而能刻画事件出现的可能性的大小。频率具有以下性质。

(1) 非负性:$0 \leq f_n(A) \leq 1$

(2) 规范性:$f_n(s) = 1$

(3) 可加性:若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件,则有

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

这三条性质已为大量实践所证明。

当试验次数较大时，频率又围绕某个常数摆动，显然，这个常数可以作为事件发生可能性大小的数值表示。

定义 1.2.1　概率的统计定义　在 n 次重复独立试验中，事件 A 发生的频率具有稳定性，即它在某一数 p 附近波动，且当 n 越大时，波动幅度越小，则定义频率的稳定值 p 为事件 A 发生的概率，记 $P(A) = p$。

利用概率的统计定义求事件的概率，需要进行大量的试验，这有时是很困难的，甚至是不可能的。

1.2.2　概率的公理化定义

为了概率论的发展，必须要建立它的理论体系。又由频率的非负性、规范性及可加性性质得到启示，衍生了概率的公理化定义。

定义 1.2.2　概率的公理化定义　设 E 是一个随机试验，S 为它的样本空间，以 E 中所有随机事件组成的集合为定义域，对于任一随机事件 A，规定一个实数 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足下列三个公理：

(1) $P(A) \geqslant 0$　（非负性）

(2) $P(S) = 1$　（规范性）

(3) 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 互不相容，那么 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$（可加性）

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

由概率的公理化定义可以推出概率的一些重要性质：

性质 1　$P(\varnothing) = 0$。

证明：记 $A_n = \varnothing, (n = 1,2,3,\cdots)$，则 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 两两互不相容，且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$，由定义 1.2.2(3) 知 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$，所以 $P(\varnothing) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing)$，再由概率的非负性 $P(\varnothing) \geqslant 0$ 知 $P(\varnothing) = 0$。

性质 2　概率的有限可加性　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$。

证明：令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$，应用概率的可列可加性及性质 1 知

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots) =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

性质 3　设 A, B 是两个事件，若 $A \subset B$，则有 $P(B - A) = P(B) - P(A)$，

$P(B) \geqslant P(A)$。

证明:因 $A \subset B$,所以 $B = A \cup (B - A)$,$A(B - A) = \varnothing$,由性质 2 知

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \quad P(B - A) = P(B) - P(A)$$

再由概率的非负性 $P(B - A) \geqslant 0$,所以 $P(B) \geqslant P(A)$。

性质 4 对于任何一个事件,$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$。

证明:因为 $A \subseteq S$,所以 $0 \leqslant P(A) \leqslant P(S) = 1$。

性质 5 逆事件的概率 对任一事件 A,$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$。

证明:因为 $A \cup \bar{A} = S$,$A \cap \bar{A} = \varnothing$,所以 $P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$,即 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,也即

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \tag{1.2.2}$$

性质 6 概率的加法公式 对任意的事件 A 和 B,有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$。

证明:因为 $A \cup B = A \cup (B - AB)$,且 $A(B - AB) = \varnothing$,$AB \subset B$,所以

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.2.3}$$

式(1.2.3)可以推广到多个事件。

如对三个事件:$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

一般地,对 n 个事件:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

1.3 古典概型与几何概型

1.3.1 古典概型

若一个随机试验具有如下两个特点:

(1) 试验的样本空间仅有有限个基本事件;

(2) 每个基本事件发生的可能性都相等。

则称此试验为古典概型随机试验,又称等可能概型。

等可能概型在概率论发展初期曾是概率论的主要研究对象,所以又称其为古典概型。17 世纪赌博盛行,如何计算赢率成了不少数学家的课题,逐渐形成了概率的古典定义。它具有非负性、规范性、互不相容事件的可加性,也给概率的公理化定义提供了依据。

如掷一颗骰子,观察其点数的试验,其样本空间 $S = \{1,2,3,4,5,6\}$,具有 6 个基本事

件，且每个基本事件发生的可能性是相等的。故这是一个古典概型的试验。

一般地，设试验 E 的样本空间 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，它共有 n 个样本点，且每个样本点 $\{e_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 发生的可能性相等，即 $P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})$。因为

$$S=\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\}\quad P(S)=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\})$$

所以

$$nP(\{e_i\})=1,\quad P(\{e_i\})=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

若事件 A 包含 k 个基本事件，$A=\{e_{n_1},e_{n_2},\cdots,e_{n_k}\}$，则

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{中包含基本事件数}}{S\text{中基本事件总数}}$$

定义 1.3.1　概率的古典定义　在古典概型随机试验中，随机事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{中包含基本事件数}\,k}{S\text{中基本事件总数}\,n}$$

例 1.3.1　一口袋内装有 8 只球，其中 5 只红球，3 只白球，从口袋内任意取球两次，每次随机地取一只，考虑两种取球方式：

(a) 第一次取一只球，观察颜色后放回袋中，将袋中球混合均匀后再任取一球，这种取球方式称为放回抽样。

(b) 第一次取球后不放回，第二次从剩余的球中再任取一球，这种方式称为不放回抽样。

分别就以上两种取球方式计算：

(1) 取到两只球都是红球的概率；

(2) 取到的两只球颜色不同的概率。

解：(a) 放回抽样的情形如下：

E：从 $(3+5)$ 的球袋中有放回地任意取球两次，每次随机地取一只，观察其颜色。设 A 为取到的两只球都是红球，B 为取到的两只球颜色不同。

样本空间 S 含有 $n=C_8^1\times C_8^1=8\times 8=64$ 个基本事件。则 A 含有 $k=C_5^1\times C_5^1=25$ 个基本事件。显然样本空间仅有有限个样本点，且每个基本事件发生的可能性相等，所以是古典概型问题。故

$$P(A)=\frac{5\times 5}{8\times 8}=\frac{25}{64}$$

对于事件 B，要求两次取出的球颜色不同可以分为第一次取红球，第二次取白球，和第一次取白球，第二次取红球，由乘法原理和加法原理可知：B 含有 $k=C_5^1\times C_3^1+C_3^1\times C_5^1$ 个基本事件，故

$$P(B)=\frac{5\times 3+3\times 5}{8\times 8}=\frac{15}{32}$$

(b) 不放回抽样的情形如下：

$$P(A)=\frac{C_5^1\times C_4^1}{8\times 7}=\frac{5}{14},\ P(B)=\frac{C_5^1\times C_3^1+C_3^1\times C_5^1}{8\times 7}=\frac{15}{28}$$

计算古典概型时：

① 首先要弄清随机试验是什么？即判断有限性和等可能性是否满足。

② 样本空间是怎样构成的。要求出总体的基本事件的个数 n，所讨论的事件 A 包含的基本事件的个数 k，然后利用公式 $P(A)=\dfrac{k}{n}$，计算出 $P(A)$。

例 1.3.2 袋中有 a 个红球，b 个白球，从中任意地连续一个一个地摸出 $k+1$ 个球（$k+1\leqslant a+b$），每次摸出的球不放回袋中，试求最后一次摸到红球的概率。

解：E：从 $a+b$ 个球中不放回地一个一个任意地连续摸出 $k+1$ 个球进行排列（与顺序有关），则 S 有 P_{a+b}^{k+1} 个基本事件。设 A 为从摸出的 $k+1$ 个球的排列中最后一个是红球。

第一步：从 a 个红球中任取一个红球，排列在最后的位置上有 P_a^1 种取法。

第二步：从剩下的 $a+b-1$ 个球中随机取 k 个任意排列在前面 k 个位置上的方法有 A_{a+b-1}^k 种，由乘法原理知，A 含有 $P_a^1\times P_{a+b-1}^k$ 个基本事件。所以

$$P(A)=\frac{P_k^1\times P_{a+b-1}^k}{P_{a+b}^{k+1}}=\frac{a\times\dfrac{(a+b-1)!}{(a+b-1-k)!}}{\dfrac{(a+b)!}{(a+b-k-1)!}}=\frac{a}{a+b}$$

所求事件 A 的概率与 k 无关，即每次摸到红球的概率是一样的。这是抽签问题的模型，即抽签时各人机会均等，不必争先恐后。

例 1.3.3 设有 n 个人，每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的一个房间去住（$n\leqslant N$），求下列事件的概率：

(1) 指定的 n 间房各有一人；

(2) 恰有 n 间房各有一人；

(3) 某指定房中恰有 m 个人（$m\leqslant n$）。

解：E：将 n 个人等可能地分配到 N 间房中去。

因为每一个人分到 N 间房中都有 N 种分法，由于没有限制每间房住多少人，所以 S：含有 N^n 个基本事件。

设 A 为指定的 n 间房各有一人住，B 为恰有 n 间房各有一人住，C 为某指定的房中恰有 m 个人住。

（1）将 n 个人分到指定的 n 间房中去，使每间房各有一人。第一个人有 n 种分法，第二个人有 $n-1$ 种分法，第三个人有 $n-2$ 种分法……，最后一间给第 n 个人。所以事件 A 含有 $n!$ 个基本事件。所以

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

（2）n 个人分配到 n 间房，且每间房仅有一人，故有 $n!$ 种分法，而 n 间房未指定，所以可以从 N 间房中任意选 n 间房，故有 C_N^n 种方法。所以 B 事件含有 $C_N^n\cdot n!$ 个基本事件，所以

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$$

（3）从 n 个人中任选 m 个人分配到指定的某一房间中去，有 C_n^m 种选法。再把剩下的 $n-m$ 个人分配到 $N-1$ 个房间去的分法有 $(N-1)^{n-m}$ 种，所以 C 事件含有 $C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}$ 个基本事件。所以

$$P(C)=\frac{C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}$$

例 1.3.4 从 6 双不同的鞋子中任取 4 只，求：

（1）其中恰有一双配对的概率；

（2）至少有两只鞋子配成一双的概率。

解：（1）6 双鞋子共有 12 只，任取 4 只，总的取法 $C_{12}^4=495$ 种。为做到恰有一双配对，先从 6 双鞋中取出一双，其两只全取出。再从剩下 5 双鞋中取出两双，其每双中取出一只，故恰有一双的取法有 $C_6^1\cdot C_5^2\cdot C_2^1\cdot C_2^1=240$ 种。所求概率

$$p=\frac{240}{495}=\frac{16}{33}$$

（2）设 B 为取出的 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双，则 $\overline{B}$ 为取出的 4 只鞋子中没有成双的鞋子。$\overline{B}$ 包含的基本事件数为 $C_6^4\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1=240$ 种，则

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{240}{495}=1-\frac{16}{33}=\frac{17}{33}$$

含义：先取 4 双，再从每双中任取一只。

此题亦可以这样做：取出的 4 只鞋子中至少有两只配成一双的取法，可以分成恰有一双和恰有两双两种不相容的情形，恰有一双有 $C_6^1\cdot C_5^2\cdot C_2^1\cdot C_2^1$ 种（含义：6 双鞋中任取一双，再以其余 5 双中任取 2 双，而这两双中又各取一只）；恰有两双有 $C_6^2=15$ 种（含义：取两双中的 4 只）。由加法原理知

$$P(B)=\frac{C_6^1\cdot C_5^2\cdot C_2^1\cdot C_2^1+C_6^2}{C_{12}^4}=\frac{17}{33}$$

例 1.3.5 设有 r 个人,假定每人的生日在一年的 365 天中任一天的概率相等,求:

(1) 这 r 个人生日各不相同的概率;

(2) 至少有两个人的生日在同一天的概率。

解:(1) 设 A 为 r 个人的生日各不相同,考察 r 个人的生日是一年中的哪一天(将 r 个人的生日分配到365 天中去),所以样本空间含有 365^r 个基本事件,而 A 为 r 个人的生日各不相同,A 有基本事件数 A_{365}^r,所以

$$P(A)=\frac{A_{365}^r}{365^r}=\frac{365\cdot 364\cdots\cdots(365-r+1)}{365^r}=\frac{365!}{365^r\cdot(365-r)!}$$

(2) 设 B 为 r 个人中至少有两个人的生日相同,则

$$P(B)=P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{365!}{365^r\cdot(365-r)!}$$

经计算可得如下结果:

r	20	23	30	40	50	64	100
$p(B)$	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.9999997

可见,在有 64 人的班级里"至少有两人的生日在同一天"的概率几乎是 1。

例 1.3.3 ~ 例 1.3.5 这类问题在概率论中称为分房问题,人与房子都有其特性。在处理实际问题时,要分清什么是"人",什么是"房",一般不可颠倒。常遇到的分房问题有,r 个人生日问题,配对问题,球在盒中分布问题(将球看成人)。这类问题在现代统计物理学中有重要的应用。

例 1.3.6 从 1 ~ 100 的整数中随机地取一个数,试求取到的整数能被 5 或 9 整除的概率。

解:E:从 1,2,3,$\cdots$,100 中任取一数,则样本空间含有 100 个基本事件。设 A 为取到的数能被 5 整除,B 为取到的数能被 9 整除。

所求概率为 $P(A\cup B)$,在 1 ~ 100 中能被 5 整除的数有 $\left[\frac{100}{5}\right]=20$ 个,即 A 含有 20 个基本事件。

在 1 ~ 100 中能被 9 整除的数有 $\left[\frac{100}{9}\right]=11$ 个,即 B 含有 11 个基本事件。

在 1 ~ 100 中能被 5 整除,又能被 9 整除的数,就是能被 45 整除的数的个数为 $\left[\frac{100}{45}\right]=2$,即 AB 含有两个基本事件。