

# 概率论与数理统计



徐玉民 主编 樊剑武 副主编 赵来玉 主审



国防工业出版社

National Defense Industry Press

021/313

2008

21世纪高  
等院校教材系列

# 概率论与数理统计

徐玉民 主 编  
樊剑武 副主编  
赵来玉 主 审

国防工业出版社

·北京·

## 内 容 简 介

本书是参照教育部对本课程的基本要求编写的高等院校(独立学院)教材。

本书理论严谨,内容编排上突出重点,分散难点,概念的叙述力求清晰易懂,并注意与实际问题相结合。

本书主要内容包括：概率论的基本概念，一维随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律及中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验等八章。各章均配有习题，分基本题及提高题，以适应不同层次学生的要求。

本书适用于独立学院学生使用,也可用作为普通高等院校、高职高专学生教学参考,亦可作为教师参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/徐玉民主编. —北京: 国防工业出版社, 2008. 1

21 世纪高等院校规划教材

ISBN 978-7-118-05520-7

I. 概… II. 徐… III. ①概率论 - 高等学校 - 教材②数理统计 - 高等学校 - 教材 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 012610 号

1

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

2

开本 787×960 1/16 印张 13 3/4 字数 285 千字

2008年1月第1版第1次印刷 印数1—5000册 定价24.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422 有售 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

## 前 言

独立学院的诞生,是中国高等教育的新生事物。独立学院的发展,是中国高等教育充满活力的体现。为了更好地探索独立学院应用型本科人才培养的模式,燕山大学里仁学院在“高等数学”适应性教学方式实践的基础上,将适应性教学方式推广到“概率论与数理统计”课程教学,力图为不同学习要求、不同学习基础的学生提供适应其发展需求的教学内容,因材施教,让学生在学习过程中感受成功,享受学习的快乐。

本书主要是为满足独立学院开展“适应性”教学需要编写而成的。编写中力求体现“以应用为目标,以必需、够用为度”和适应不同发展目标、不同学习基础学生学习的需要,在保证系统性、科学性的基础上,注意讲清概念,突出方法教学,注重学生基本运算能力、分析问题能力、解决问题能力的培养,重视理论联系实际,内容通俗易懂,努力体现独立学院“适应性”教学的特点。

在编写本书时,我们力求在概念与理论、方法与技巧、实践与应用三方面做出较为合理的安排。在保留概率论与数理统计基本内容的前提下,以随机变量的常用分布为主线阐述知识。在编写上,遵循从具体到抽象,从特殊到一般的原则。考虑到独立学院学生的学习基础,略去了一些理论推导,力求做到通俗易懂。本书可作为独立学院 48 学时课程的教材使用(其中,概率论为 36 学时,数理统计为 12 学时)。

本书由徐玉民主编,樊剑武副主编,赵来玉主审,赵晓华、贞小青参与了部分习题的演算。在编写过程中得到了唐宗贤及国防工业出版社的大力支持,特此表示感谢。

由于编者水平有限,错误和不妥之处在所难免,恳请读者和使用教师批评、指正。

编 者

2007 年 11 月于燕山大学里仁学院

# 目 录

102	.....	第十一章 矩	102
103	.....	第十二章 大数定律与中心极限定理	103
104	.....	第十三章 方差分析	104
105	.....	第十四章 回归分析	105
106	.....	第十五章 正态分布	106
107	.....	第十六章 t 分布	107
108	.....	第十七章 F 分布	108
109	.....	第十八章 卡方分布	109
110	.....	第十九章 假设检验	110
111	.....	第二十章 方差分析	111
112	.....	第二十一章 回归分析	112
113	.....	第二十二章 正态分布	113
114	.....	第二十三章 t 分布	114
115	.....	第二十四章 F 分布	115
116	.....	第二十五章 卡方分布	116
117	.....	第二十六章 假设检验	117
118	.....	第二十七章 方差分析	118
119	.....	第二十八章 回归分析	119
120	.....	第二十九章 正态分布	120
121	.....	第三十章 t 分布	121
122	.....	第三十一章 F 分布	122
123	.....	第三十二章 卡方分布	123
124	.....	第三十三章 假设检验	124
125	.....	第三十四章 方差分析	125
126	.....	第三十五章 回归分析	126
127	.....	第三十六章 正态分布	127
128	.....	第三十七章 t 分布	128
129	.....	第三十八章 F 分布	129
130	.....	第三十九章 卡方分布	130
131	.....	第四十章 假设检验	131
132	.....	第四十一章 方差分析	132
133	.....	第四十二章 回归分析	133
134	.....	第四十三章 正态分布	134
135	.....	第四十四章 t 分布	135
136	.....	第四十五章 F 分布	136
137	.....	第四十六章 卡方分布	137
138	.....	第四十七章 假设检验	138
139	.....	第四十八章 方差分析	139
140	.....	第四十九章 回归分析	140
141	.....	第五十章 正态分布	141
142	.....	第五十一章 t 分布	142
143	.....	第五十二章 F 分布	143
144	.....	第五十三章 卡方分布	144
145	.....	第五十四章 假设检验	145
146	.....	第五十五章 方差分析	146
147	.....	第五十六章 回归分析	147
148	.....	第五十七章 正态分布	148
149	.....	第五十八章 t 分布	149
150	.....	第五十九章 F 分布	150
151	.....	第六十章 卡方分布	151
152	.....	第六十一章 假设检验	152
153	.....	第六十二章 方差分析	153
154	.....	第六十三章 回归分析	154
155	.....	第六十四章 正态分布	155
156	.....	第六十五章 t 分布	156
157	.....	第六十六章 F 分布	157
158	.....	第六十七章 卡方分布	158
159	.....	第六十八章 假设检验	159
160	.....	第六十九章 方差分析	160
161	.....	第七十章 回归分析	161
162	.....	第七十一章 正态分布	162
163	.....	第七十二章 t 分布	163
164	.....	第七十三章 F 分布	164
165	.....	第七十四章 卡方分布	165
166	.....	第七十五章 假设检验	166
167	.....	第七十六章 方差分析	167
168	.....	第七十七章 回归分析	168
169	.....	第七十八章 正态分布	169
170	.....	第七十九章 t 分布	170
171	.....	第八十章 F 分布	171
172	.....	第八十一章 卡方分布	172
173	.....	第八十二章 假设检验	173
174	.....	第八十三章 方差分析	174
175	.....	第八十四章 回归分析	175
176	.....	第八十五章 正态分布	176
177	.....	第八十六章 t 分布	177
178	.....	第八十七章 F 分布	178
179	.....	第八十八章 卡方分布	179
180	.....	第八十九章 假设检验	180
181	.....	第九十章 方差分析	181
182	.....	第九十一章 回归分析	182
183	.....	第九十二章 正态分布	183
184	.....	第九十三章 t 分布	184
185	.....	第九十四章 F 分布	185
186	.....	第九十五章 卡方分布	186
187	.....	第九十六章 假设检验	187
188	.....	第九十七章 方差分析	188
189	.....	第九十八章 回归分析	189
190	.....	第九十九章 正态分布	190
191	.....	第一百章 t 分布	191
192	.....	第一百一章 F 分布	192
193	.....	第一百二章 卡方分布	193
194	.....	第一百三章 假设检验	194
195	.....	第一百四章 方差分析	195
196	.....	第一百五章 回归分析	196
197	.....	第一百六章 正态分布	197
198	.....	第一百七章 t 分布	198
199	.....	第一百八章 F 分布	199
200	.....	第一百九章 卡方分布	200
201	.....	第一百二十章 假设检验	201
202	.....	第一百一十一章 方差分析	202
203	.....	第一百一十二章 回归分析	203
204	.....	第一百一十三章 正态分布	204
205	.....	第一百一十四章 t 分布	205
206	.....	第一百一十五章 F 分布	206
207	.....	第一百一十六章 卡方分布	207
208	.....	第一百一十七章 假设检验	208
209	.....	第一百一十八章 方差分析	209
210	.....	第一百一十九章 回归分析	210
211	.....	第一百二十章 正态分布	211
212	.....	第一百二十一章 t 分布	212
213	.....	第一百二十二章 F 分布	213
214	.....	第一百二十三章 卡方分布	214
215	.....	第一百二十四章 假设检验	215
216	.....	第一百二十五章 方差分析	216
217	.....	第一百二十六章 回归分析	217
218	.....	第一百二十七章 正态分布	218
219	.....	第一百二十八章 t 分布	219
220	.....	第一百二十九章 F 分布	220
221	.....	第一百三十章 卡方分布	221
222	.....	第一百三十一章 假设检验	222
223	.....	第一百三十二章 方差分析	223
224	.....	第一百三十三章 回归分析	224
225	.....	第一百三十四章 正态分布	225
226	.....	第一百三十五章 t 分布	226
227	.....	第一百三十六章 F 分布	227
228	.....	第一百三十七章 卡方分布	228
229	.....	第一百三十八章 假设检验	229
230	.....	第一百三十九章 方差分析	230
231	.....	第一百四十章 回归分析	231
232	.....	第一百四十一章 正态分布	232
233	.....	第一百四十二章 t 分布	233
234	.....	第一百四十三章 F 分布	234
235	.....	第一百四十四章 卡方分布	235
236	.....	第一百四十五章 假设检验	236
237	.....	第一百四十六章 方差分析	237
238	.....	第一百四十七章 回归分析	238
239	.....	第一百四十八章 正态分布	239
240	.....	第一百四十九章 t 分布	240
241	.....	第一百五十章 F 分布	241
242	.....	第一百五十一章 卡方分布	242
243	.....	第一百五十二章 假设检验	243
244	.....	第一百五十三章 方差分析	244
245	.....	第一百五十四章 回归分析	245
246	.....	第一百五十五章 正态分布	246
247	.....	第一百五十六章 t 分布	247
248	.....	第一百五十七章 F 分布	248
249	.....	第一百五十八章 卡方分布	249
250	.....	第一百五十九章 假设检验	250
251	.....	第一百六十章 方差分析	251
252	.....	第一百七十章 回归分析	252
253	.....	第一百八十一章 正态分布	253
254	.....	第一百八十二章 t 分布	254
255	.....	第一百八十三章 F 分布	255
256	.....	第一百八十四章 卡方分布	256
257	.....	第一百八十五章 假设检验	257
258	.....	第一百八十六章 方差分析	258
259	.....	第一百八十七章 回归分析	259
260	.....	第一百八十八章 正态分布	260
261	.....	第一百八十九章 t 分布	261
262	.....	第一百九十章 F 分布	262
263	.....	第一百二十章 卡方分布	263
264	.....	第一百二十章 假设检验	264
265	.....	第一百二十章 方差分析	265
266	.....	第一百二十章 回归分析	266
267	.....	第一百二十章 正态分布	267
268	.....	第一百二十章 t 分布	268
269	.....	第一百二十章 F 分布	269
270	.....	第一百二十章 卡方分布	270
271	.....	第一百二十章 假设检验	271
272	.....	第一百二十章 方差分析	272
273	.....	第一百二十章 回归分析	273
274	.....	第一百二十章 正态分布	274
275	.....	第一百二十章 t 分布	275
276	.....	第一百二十章 F 分布	276
277	.....	第一百二十章 卡方分布	277
278	.....	第一百二十章 假设检验	278
279	.....	第一百二十章 方差分析	279
280	.....	第一百二十章 回归分析	280
281	.....	第一百二十章 正态分布	281
282	.....	第一百二十章 t 分布	282
283	.....	第一百二十章 F 分布	283
284	.....	第一百二十章 卡方分布	284
285	.....	第一百二十章 假设检验	285
286	.....	第一百二十章 方差分析	286
287	.....	第一百二十章 回归分析	287
288	.....	第一百二十章 正态分布	288
289	.....	第一百二十章 t 分布	289
290	.....	第一百二十章 F 分布	290
291	.....	第一百二十章 卡方分布	291
292	.....	第一百二十章 假设检验	292
293	.....	第一百二十章 方差分析	293
294	.....	第一百二十章 回归分析	294
295	.....	第一百二十章 正态分布	295
296	.....	第一百二十章 t 分布	296
297	.....	第一百二十章 F 分布	297
298	.....	第一百二十章 卡方分布	298
299	.....	第一百二十章 假设检验	299
300	.....	第一百二十章 方差分析	300
301	.....	第一百二十章 回归分析	301
302	.....	第一百二十章 正态分布	302
303	.....	第一百二十章 t 分布	303
304	.....	第一百二十章 F 分布	304
305	.....	第一百二十章 卡方分布	305
306	.....	第一百二十章 假设检验	306
307	.....	第一百二十章 方差分析	307
308	.....	第一百二十章 回归分析	308
309	.....	第一百二十章 正态分布	309
310	.....	第一百二十章 t 分布	310
311	.....	第一百二十章 F 分布	311
312	.....	第一百二十章 卡方分布	312
313	.....	第一百二十章 假设检验	313
314	.....	第一百二十章 方差分析	314
315	.....	第一百二十章 回归分析	315
316	.....	第一百二十章 正态分布	316
317	.....	第一百二十章 t 分布	317
318	.....	第一百二十章 F 分布	318
319	.....	第一百二十章 卡方分布	319
320	.....	第一百二十章 假设检验	320
321	.....	第一百二十章 方差分析	321
322	.....	第一百二十章 回归分析	322
323	.....	第一百二十章 正态分布	323
324	.....	第一百二十章 t 分布	324
325	.....	第一百二十章 F 分布	325
326	.....	第一百二十章 卡方分布	326
327	.....	第一百二十章 假设检验	327
328	.....	第一百二十章 方差分析	328
329	.....	第一百二十章 回归分析	329
330	.....	第一百二十章 正态分布	330
331	.....	第一百二十章 t 分布	331
332	.....	第一百二十章 F 分布	332
333	.....	第一百二十章 卡方分布	333
334	.....	第一百二十章 假设检验	334
335	.....	第一百二十章 方差分析	335
336	.....	第一百二十章 回归分析	336
337	.....	第一百二十章 正态分布	337
338	.....	第一百二十章 t 分布	338
339	.....	第一百二十章 F 分布	339
340	.....	第一百二十章 卡方分布	340
341	.....	第一百二十章 假设检验	341
342	.....	第一百二十章 方差分析	342
343	.....	第一百二十章 回归分析	343
344	.....	第一百二十章 正态分布	344
345	.....	第一百二十章 t 分布	345
346	.....	第一百二十章 F 分布	346
347	.....	第一百二十章 卡方分布	347
348	.....	第一百二十章 假设检验	348
349	.....	第一百二十章 方差分析	349
350	.....	第一百二十章 回归分析	350
351	.....	第一百二十章 正态分布	351
352	.....	第一百二十章 t 分布	352
353	.....	第一百二十章 F 分布	353
354	.....	第一百二十章 卡方分布	354
355	.....	第一百二十章 假设检验	355
356	.....	第一百二十章 方差分析	356
357	.....	第一百二十章 回归分析	357
358	.....	第一百二十章 正态分布	358
359	.....	第一百二十章 t 分布	359
360	.....	第一百二十章 F 分布	360
361	.....	第一百二十章 卡方分布	361
362	.....	第一百二十章 假设检验	362
363	.....	第一百二十章 方差分析	363
364	.....	第一百二十章 回归分析	364
365	.....	第一百二十章 正态分布	365
366	.....	第一百二十章 t 分布	366
367	.....	第一百二十章 F 分布	367
368	.....	第一百二十章 卡方分布	368
369	.....	第一百二十章 假设检验	369
370	.....	第一百二十章 方差分析	370
371	.....	第一百二十章 回归分析	371
372	.....	第一百二十章 正态分布	372
373	.....	第一百二十章 t 分布	373
374	.....	第一百二十章 F 分布	374
375	.....	第一百二十章 卡方分布	375
376	.....	第一百二十章 假设检验	376
377	.....	第一百二十章 方差分析	377
378	.....	第一百二十章 回归分析	378
379	.....	第一百二十章 正态分布	379
380	.....	第一百二十章 t 分布	380
381	.....	第一百二十章 F 分布	381
382	.....	第一百二十章 卡方分布	382
383	.....	第一百二十章 假设检验	383
384	.....	第一百二十章 方差分析	384
385	.....	第一百二十章 回归分析	385
386	.....	第一百二十章 正态分布	386
387	.....	第一百二十章 t 分布	387
388	.....	第一百二十章 F 分布	388
389	.....	第一百二十章 卡方分布	389
390	.....	第一百二十章 假设检验	390
391	.....	第一百二十章 方差分析	391
392	.....	第一百二十章 回归分析	392
393	.....	第一百二十章 正态分布	393
394	.....	第一百二十章 t 分布	394
395	.....	第一百二十章 F 分布	395
396	.....	第一百二十章 卡方分布	396
397	.....	第一百二十章 假设检验	397
398	.....	第一百二十章 方差分析	398
399	.....	第一百二十章 回归分析	399
400	.....	第一百二十章 正态分布	400
401	.....	第一百二十章 t 分布	401
402	.....	第一百二十章 F 分布	402
403	.....	第一百二十章 卡方分布	403
404	.....	第一百二十章 假设检验	404
405	.....	第一百二十章 方差分析	405
406	.....	第一百二十章 回归分析	406
407	.....	第一百二十章 正态分布	407
408	.....	第一百二十章 t 分布	408
409	.....	第一百二十章 F 分布	409
410	.....	第一百二十章 卡方分布	410
411	.....	第一百二十章 假设检验	411
412	.....	第一百二十章 方差分析	412
413	.....	第一百二十章 回归分析	413
414	.....	第一百二十章 正态分布	414
415	.....	第一百二十章 t 分布	415
416	.....	第一百二十章 F 分布	416
417	.....	第一百二十章 卡方分布	417
418	.....	第一百二十章 假设检验	418
419	.....	第一百二十章 方差分析	419
420	.....	第一百二十章 回归分析	420
421	.....	第一百二十章 正态分布	421
422	.....	第一百二十章 t 分布	422
423	.....	第一百二十章 F 分布	423
424	.....	第一百二十章 卡方分布	424
425	.....	第一百二十章 假设检验	425
426	.....	第一百二十章 方差分析	426

4.2 方差 .....	95
4.3 协方差及相关系数 .....	99
*4.4 矩、协方差矩阵 .....	103
第四章习题.....	105
<b>第五章 大数定律及中心极限定理.....</b>	<b>111</b>
5.1 大数定律 .....	111
5.2 中心极限定理 .....	113
第五章习题.....	116
<b>第六章 数理统计的基本概念.....</b>	<b>119</b>
6.1 总体、个体与样本 .....	119
6.2 统计量与抽样分布 .....	120
第六章习题.....	126
<b>第七章 参数估计.....</b>	<b>128</b>
7.1 参数的点估计 .....	128
7.2 估计量的评选标准 .....	136
7.3 区间估计 .....	138
*7.4 单侧置信限 .....	145
第七章习题.....	146
<b>第八章 假设检验.....</b>	<b>152</b>
8.1 假设检验的基本概念 .....	152
8.2 单个正态总体均值与方差的假设检验 .....	155
8.3 两个正态总体均值差及方差的假设检验 .....	158
8.4 非参数检验的皮尔逊 $\chi^2$ 准则 .....	163
第八章习题.....	166
<b>习题答案.....</b>	<b>172</b>
<b>预备知识.....</b>	<b>191</b>
<b>附录.....</b>	<b>199</b>
<b>参考文献.....</b>	<b>214</b>

卦事本基以本由胡育。某本卦由是有个亥式容，果卦本基的维两个一卷的3卦反卦面  
之试验，同空本卦以本合象的本卦卦全，(合卖的负卦为本卦个一由明)

# 第一章 概率论的基本概念

自然界的现像可以分为两大类：一类是在一定条件下必然要发生的现象，称为必然现象。另一类是在一定条件下可能发生，也可能不发生的现象，称为随机现象。

例如，在地球表面上，在标准大气压下，水到 $100^{\circ}\text{C}$  必然沸腾，同性电荷必互相排斥，平面三角形内角之和为 $180^{\circ}$  等都是必然现象的例子。又例如在相同条件下抛一枚硬币，徽花向上这个结果可能发生也可能不发生，在每次抛掷之前无法准确预言其结果。又如某种股票的价格在下一个交易日可能上升也可能下降等都是随机现象。但是人们发现，这种随机现象的一部分，在大量的重复试验或观察下，其结果又明显地呈现出某种规律性。例如大量重复抛硬币时徽花向上出现的次数约占总试验次数的二分之一。这样的规律称为统计规律性。

概率论是一门研究随机现象统计规律性数量关系的数学学科。

## 1.1 随机事件及其运算

### 1.1.1 随机试验和样本空间

#### 1. 随机试验

随机现象广泛存在于自然界与人类社会之中，为了研究随机现象，我们引入随机试验的概念。具有以下三个特征的试验称为随机试验  $E$ ，简称为试验。

- (1) 在相同的条件下，试验可以重复地进行；
- (2) 试验的结果不止一种，而且事先可以确知试验的所有结果；
- (3) 在进行试验前不能确定出现哪一个结果。

**例 1.1.1** 列举随机试验的例子。

$E_1$ ：抛一枚硬币，观察出现正面  $H$  和反面  $T$  的情况；

$E_2$ ：将一枚硬币抛掷三次，观察正面  $H$  出现的次数；

$E_3$ ：将一枚硬币抛掷三次，观察正面  $H$  和反面  $T$  出现的情况；

$E_4$ ：掷一颗骰子，观察出现的点数；

$E_5$ ：记录某电话交换台在一分钟内收到用户的呼唤次数；

$E_6$ ：在一批产品中任取  $m$  件，记录次品所占的比例；

$E_7$ ：从一批灯泡中任取一个，测试其寿命。

以上 7 个试验均具有随机试验的三个特点。

## 2. 样本空间

随机试验  $E$  的每一个可能的基本结果, 称为这个试验的样本点, 有时也称为基本事件(即由一个样本点组成的集合), 全体样本点的集合称为样本空间, 记为  $S$ 。

随机试验的目的决定了样本空间。

**例 1.1.2** 写出例 1.1.1 中随机试验所对应的样本空间  $S_i$ 。

$$S_1 = \{H, T\};$$

$$S_2 = \{0, 1, 2, 3\};$$

$$S_3 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\};$$

$$S_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \text{样本空间含有六个样本点};$$

$$S_5 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \text{样本空间含有可数个样本点};$$

$$S_6 = \left\{\frac{0}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m}{m}\right\};$$

$$S_7 = \{t \mid t \geq 0\}, t \text{ 表示灯泡寿命, 样本空间含有不可数无穷多个样本点}.$$

## 3. 随机事件

在随机试验中, 把一次试验中可能出现也可能不出现, 而在重复独立试验中具有某种统计规律性的事情称为随机事件(简称事件)。事件是概率论研究的直接对象。

自然界中的事件可分为如下三种: 必然事件, 不可能事件, 随机事件。

如果在每次试验的结果中, 某事件一定发生, 则称这个事件为必然事件。如“上抛一石子的下落”就是必然事件。

如果在每次试验的结果中, 某事件一定不发生, 则称这个事件为不可能事件, 如“掷一颗骰子得 7 点”就是不可能事件。

虽然必然事件与不可能事件都是确定性的现象, 但为了研究问题的方便, 我们需要把它们看成特殊的随机事件。

今后常用大写字母  $A, B, C, \dots$  表示随机事件, 用  $S$  及  $\emptyset$  分别表示必然事件与不可能事件。

因为随机试验  $E$  的所有可能结果组成的集合是  $E$  的样本空间  $S$ , 我们又可称  $E$  的样本空间的子集为  $E$  的随机事件。

例如,  $E_4$ : 抛一颗骰子, 观察出现的点数。

$$S_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

设  $A$  为掷骰子得偶数点, 它是一个随机事件。则

$$A = \{2, 4, 6\}$$

它是由三个基本事件组成的。我们看到, 当骰子出现 2 点、4 点、6 点之一时, 都表明事件  $A$  发生。显然  $A$  是  $S_4$  的子集。

如果事件  $A$  发生, 则  $A$  所含的某一样本点必发生。若  $A$  所含的某一样本点发生, 则说明

事件  $A$  发生。

今后在研究某一随机试验时,搞清楚样本空间是由哪些样本点组成的,以及所讨论的事件是由哪些样本点组成的,是非常重要的。

### 1.1.2 随机事件间的关系及运算

事件间的关系与集合间的关系很相似。关于集合运算的某些性质完全适用于事件。

(1) 包含关系:如果事件  $A$  发生,则事件  $B$  一定发生,称事件  $B$  包含事件  $A$ 。记作  $A \subset B$  或  $B \supset A$ 。

(2) 相等关系:当且仅当  $A \subset B$  且  $B \subset A$ ,称  $A$  与  $B$  相等,记为  $A = B$ (即  $A$  与  $B$  同时发生和不发生)。

(3) 事件的并:“事件  $A$  与事件  $B$  至少有一个发生”的事件称此事件为  $A$  与  $B$  的并事件(或和事件)记为  $A \cup B$ 。同样“事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  中至少有一个发生”的事件称为  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的并或和,记为  $\bigcup_{i=1}^n A_i$ ,也可推广到  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 。

(4) 事件的交:“事件  $A$  与  $B$  同时发生”的事件,称  $A$  与  $B$  的交或积,记为  $A \cap B$  或  $AB$ ,它可以推广到  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  或  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 。

(5) 事件的差:“ $A$  发生而  $B$  不发生”的事件,称为  $A$  与  $B$  的差事件,记为  $A - B$  或  $\bar{AB}$ 。

(6) 互不相容事件:若事件  $A$  与  $B$  不能同时发生,即  $A \cap B = \emptyset$ ,则称事件  $A$  与  $B$  互不相容,或  $A$  与  $B$  互斥。

(7) 对立事件:若事件  $A$  与  $B$  满足:

$$A \cup B = S, \quad A \cap B = \emptyset$$

则称  $A$  与  $B$  互为对立事件,或互逆事件、互余事件。事件  $A$  的对立事件,记为  $B = \bar{A}$ 。

事件的上述关系,可以用“文氏图”(图 1.1.1)来直观地表达,图中的正方形表示样本空间  $S$ 。

事件间的运算同集合相似,有如下运算规律:

(1) 交换律  $A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) 分配律  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

(4) 德·莫根定理

$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}, \quad \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$

一般有  $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$ ,  $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$ , 即“长杠变短,开口变方向”。

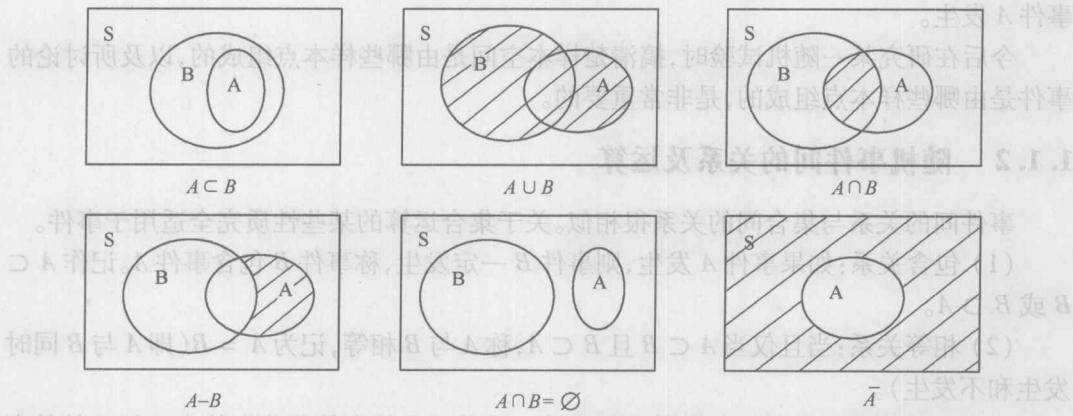


图 1.1.1

**例 1.1.3** 设  $A, B, C$  为事件, 试用  $A, B, C$  的运算关系表示下列各事件:

(1) 仅  $A$  发生;

(2)  $A, B, C$  都发生;

(3)  $A, B, C$  都不发生;

(4)  $A, B, C$  至少一个发生;

(5)  $A, B, C$  恰有一个发生;

(6)  $A$  不发生, 而  $B, C$  至少一个发生;

(7)  $A, B, C$  中不多于一个发生;

(8)  $A, B, C$  中至少两个发生;

(9)  $A, B, C$  中不多于两个发生;

(10)  $A, B, C$  中恰有两个发生。

解: (1)  $A \bar{B} \bar{C}$  (或  $A - B - C$ )

(2)  $ABC$

(3)  $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$

(4)  $A \cup B \cup C$

(5)  $A \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} \bar{B} C \cup A \bar{B} C$

(6)  $\bar{A} \cup (B \cup C)$

(7)  $\bar{A} \bar{B} \bar{C} \cup A \bar{B} C \cup \bar{A} B C \cup A B C$  (或  $AB \cup BC \cup AC$ )

(8)  $AB \cup BC \cup AC$  (或  $ABC \cup A\bar{B}C \cup A\bar{B}C \cup A\bar{B}C$ )

(9)  $\overline{ABC}$  (或由德·莫根定理:  $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ , 或同  $A, B, C$  不都发生)

(10)  $ABC \cup A\bar{B}C \cup A\bar{B}C$

熟练掌握一些事件的运算关系来表示事件, 对以后计算概率大有帮助, 是必须重视的知识点。

$$(A_1) \lambda + \cdots + (A_k) \lambda + (\bar{A}) \lambda = (A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup \bar{A}) \lambda$$

## 1.2 频率与概率

### 1.2.1 概率的统计定义

除必然事件和不可能事件外,一个事件在一次试验中可能发生,也可能不发生。为了描述这个事件发生的可能性的大小,我们引入频率的概念,它描述了事件发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生可能性大小的数,即概率。

频率的定义:在相同的条件下,将一随机试验进行  $n$  次重复试验,事件  $A$  发生的次数为  $n_A$ ,称为事件  $A$  的频数,  $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$  为事件  $A$  发生的频率。

事件  $A$  的频率不是一个固定数。由于事件在每次试验中可能发生也可能不发生,因而在  $n$  次试验中事件  $A$  发生的频率也就随着试验的结果不同而具有波动性。

例如,在相同条件下重复地对同一种小麦种子做发芽试验,得到如下统计表 1.2.1。

表 1.2.1

抽取粒数 $n$	5	10	50	100	300	600
发芽粒数 $n_A$	5	9	44	91	272	542
发芽频率 $f_n(A)$	1	0.9	0.88	0.91	0.907	0.903

由表可见,在取出的种子中发芽数是随机的。但随抽查粒数的增多发芽的频率  $f_n(A)$  呈现出稳定性,逐渐稳定于 0.9。

再如,历史上一些著名的抛硬币试验见表 1.2.2。

表 1.2.2

试验者	抛币次数 $n$	出现正面次数 $n_A$	频率 $f_n(A)$
蒲丰	4040	2048	0.5069
法摩根	4092	2048	0.5005
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

由上表可见:随  $n$  增大,频率  $f_n(H)$  在 0.5 附近摆动且逐渐稳定于 0.5,这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性。

频率能反映一个事件发生的频繁程度,从而能刻画事件出现的可能性的大小。频率具有以下性质。

(1) 非负性:  $0 \leq f_n(A) \leq 1$

(2) 规范性:  $f_n(s) = 1$

(3) 可加性:若  $A_1, A_2, \dots, A_k$  是两两互不相容的事件,则有

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k)$$

这三条性质已为大量实践所证明。

当试验次数较大时,频率又围绕某个常数摆动,显然,这个常数可以作为事件发生可能性大小的数值表示。

**定义 1.2.1 概率的统计定义** 在  $n$  次重复独立试验中,事件  $A$  发生的频率具有稳定性,即它在某一数  $p$  附近波动,且当  $n$  越大时,波动幅度越小,则定义频率的稳定值  $p$  为事件  $A$  发生的概率,记  $P(A) = p$ 。

利用概率的统计定义求事件的概率,需要进行大量的试验,这有时是很困难的,甚至是不可能的。

## 1.2.2 概率的公理化定义

为了概率论的发展,必须要建立它的理论体系。又由频率的非负性、规范性及可加性性质得到启示,衍生了概率的公理化定义。

**定义 1.2.2 概率的公理化定义** 设  $E$  是一个随机试验,  $S$  为它的样本空间,以  $E$  中所有随机事件组成的集合为定义域,对于任一随机事件  $A$ ,规定一个实数  $P(A)$ ,如果  $P(A)$  满足下列三个公理:

(1) $P(A) \geq 0$ (非负性)	20	10	2	遵循规则
(2) $P(S) = 1$ (规范性)	88.0	9.0	1	(b) 遵循规则

(3) 如果事件  $A_1, A_2, \dots, A_k$  互不相容,那么  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$  (可加性)  
则称  $P(A)$  为事件  $A$  的概率。

由概率的公理化定义可以推出概率的一些重要性质:

**性质 1**  $P(\emptyset) = 0$ 。

**证明:** 记  $A_n = \emptyset$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 则  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  两两互不相容, 且  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ ,  
由定义 1.2.2(3) 知  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ , 所以  $P(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$ , 再由概率的非负性  
 $P(\emptyset) \geq 0$  知  $P(\emptyset) = 0$ 。

**性质 2 概率的有限可加性** 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  两两互不相容, 则  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ 。

**证明:** 令  $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ , 应用概率的可列可加性及性质 1 知

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

**性质 3** 设  $A, B$  是两个事件, 若  $A \subset B$ , 则有  $P(B - A) = P(B) - P(A)$ ,

$P(B) \geq P(A)$ 。

**证明:**因  $A \subset B$ , 所以  $B = A \cup (B - A)$ ,  $A(B - A) = \emptyset$ , 由性质 2 知道, 且有  
 $P(B) = P(A) + P(B - A)$ ,  $P(B - A) = P(B) - P(A)$ 。

再由概率的非负性  $P(B - A) \geq 0$ , 所以  $P(B) \geq P(A)$ 。

**性质 4** 对于任何一个事件,  $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

**证明:**因为  $A \subseteq S$ , 所以  $0 \leq P(A) \leq P(S) = 1$ 。

**性质 5 逆事件的概率** 对任一事件  $A$ ,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 。

**证明:**因为  $A \cup \bar{A} = S$ ,  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ , 所以  $P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$ , 即  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ,  
也即

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad (1.2.2)$$

**性质 6 概率的加法公式** 对任意的事件  $A$  和  $B$ , 有  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 。

**证明:**因为  $A \cup B = A \cup (B - AB)$ , 且  $A(B - AB) = \emptyset$ ,  $AB \subset B$ , 所以

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1.2.3)$$

式(1.2.3)可以推广到多个事件。

如对三个事件:  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

一般地, 对  $n$  个事件:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots + \\ &\quad (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \end{aligned}$$

### 1.3 古典概型与几何概型

#### 1.3.1 古典概型

若一个随机试验具有如下两个特点:

(1) 试验的样本空间仅有有限个基本事件;

(2) 每个基本事件发生的可能性都相等。

则称此试验为古典概型随机试验, 又称等可能概型。

等可能概型在概率论发展初期曾是概率论的主要研究对象, 所以又称其为古典概型。17 世纪赌博盛行, 如何计算赢率成了不少数学家的课题, 逐渐形成了概率的古典定义。它具有非负性、规范性、互不相容事件的可加性, 也给概率的公理化定义提供了依据。

如掷一颗骰子, 观察其点数的试验, 其样本空间  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 具有 6 个基本事

件,且每个基本事件发生的可能性是相等的。故这是一个古典概型的试验。

一般地,设试验  $E$  的样本空间  $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , 它共有  $n$  个样本点,且每个样本点  $\{e_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 发生的可能性相等,即  $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \dots = P(\{e_n\})$ 。因为

$$S = \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_n\}, \quad P(S) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_n\})$$

所以

$$nP(\{e_i\}) = 1, \quad P(\{e_i\}) = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

若事件  $A$  包含  $k$  个基本事件,  $A = \{e_{n_1}, e_{n_2}, \dots, e_{n_k}\}$ , 则

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 中包含基本事件数}}{S \text{ 中基本事件总数}}$$

**定义 1.3.1 概率的古典定义** 在古典概型随机试验中, 随机事件  $A$  发生的概率定义为

$$P(A) = \frac{A \text{ 中包含基本事件数 } k}{S \text{ 中基本事件总数 } n}$$

**例 1.3.1** 一口袋内装有 8 只球, 其中 5 只红球, 3 只白球, 从口袋内任意取球两次, 每次随机地取一只, 考虑两种取球方式:

(a) 第一次取一只球, 观察颜色后放回袋中, 将袋中球混合均匀后再任取一球, 这种取球方式称为放回抽样。

(b) 第一次取球后不放回, 第二次从剩余的球中再任取一球, 这种方式称为不放回抽样。

分别就以上两种取球方式计算:

(1) 取到两只球都是红球的概率;

(2) 取到的两只球颜色不同的概率。

解:(a) 放回抽样的情形如下:

$E$ : 从(3+5)的球袋中有放回地任意取球两次, 每次随机地取一只, 观察其颜色。设  $A$  为取到的两只球都是红球,  $B$  为取到的两只球颜色不同。

样本空间  $S$  含有  $n = C_8^1 \times C_8^1 = 8 \times 8 = 64$  个基本事件。则  $A$  含有  $k = C_5^1 \times C_5^1 = 25$  个基本事件。显然样本空间仅有有限个样本点, 且每个基本事件发生的可能性相等, 所以是古典概型问题。故

$$P(A) = \frac{5 \times 5}{8 \times 8} = \frac{25}{64}$$

对于事件  $B$ , 要求两次取出的球颜色不同可以分为第一次取红球, 第二次取白球, 和第一次取白球, 第二次取红球, 由乘法原理和加法原理可知;  $B$  含有  $k = C_5^1 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_5^1$  个基本事件, 故

二三、考取两个一等。人  $P(B) = \frac{5 \times 3 + 3 \times 5}{8 \times 8} = \frac{15}{32}$  的概率是  $\frac{15}{32}$  (1)  
舍去的事件是  $\dots$  人个三等。考取两个二等。人个一等。

(b) 不放回抽样的情形如下：

$$P(A) = \frac{C_5^1 \times C_4^1}{8 \times 7} = \frac{5}{14}, \quad P(B) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_5^1}{8 \times 7} = \frac{15}{28}$$

计算古典概型时：  
①首先要弄清随机试验是什么？即判断有限性和等可能性是否满足。  
②样本空间是怎样构成的。要求出总体的基本事件的个数  $n$ ，所讨论的事件  $A$  包含的基本事件的个数  $k$ ，然后利用公式  $P(A) = \frac{k}{n}$ ，计算出  $P(A)$ 。

**例 1.3.2** 袋中有  $a$  个红球， $b$  个白球，从中任意地连续一个一个地摸出  $k+1$  个球 ( $k+1 \leq a+b$ )，每次摸出的球不放回袋中，试求最后一次摸到红球的概率。

解：从  $a+b$  个球中不放回地一个一个任意地连续摸出  $k+1$  个球进行排列（与顺序有关），则  $S$  有  $P_{a+b}^{k+1}$  个基本事件。设  $A$  为从摸出的  $k+1$  个球的排列中最后一个球是红球。

第一步：从  $a$  个红球中任取一个红球，排列在最后的位置上有  $P_a^1$  种取法。

第二步：从剩下的  $a+b-1$  个球中随机取  $k$  个任意排列在前面  $k$  个位置上的方法有  $A_{a+b-1}^k$  种，由乘法原理知， $A$  含有  $P_a^1 \times P_{a+b-1}^k$  个基本事件。所以

$$P(A) = \frac{P_a^1 \times P_{a+b-1}^k}{P_{a+b}^{k+1}} = \frac{a \times \frac{(a+b-1)!}{(a+b-1-k)!}}{\frac{(a+b)!}{(a+b-k-1)!}} = \frac{a}{a+b}$$

所求事件  $A$  的概率与  $k$  无关，即每次摸到红球的概率是一样的。这是抽签问题的模型，即抽签时各人机会均等，不必争先恐后。

**例 1.3.3** 设有  $n$  个人，每个人都等可能地被分配到  $N$  个房间中的一个房间去住 ( $n \leq N$ )，求下列事件的概率：

- (1) 指定的  $n$  间房各有一人；
- (2) 恰有  $n$  间房各有一人；
- (3) 某指定房中恰有  $m$  个人 ( $m \leq n$ )。

解：将  $n$  个人等可能地分配到  $N$  间房中去。  
因为每一个人分到  $N$  间房中都有  $N$  种分法，由于没有限制每间房住多少人，所以  $S$ ：含有  $N^n$  个基本事件。

设  $A$  为指定的  $n$  间房各有一人住， $B$  为恰有  $n$  间房各有一人住， $C$  为某指定的房中恰有  $m$  个人住。

(1) 将  $n$  个人分到指定的  $n$  间房中去, 使每间房各有一人。第一个人有  $n$  种分法, 第二个人有  $n - 1$  种分法, 第三个人有  $n - 2$  种分法 ……, 最后一间给第  $n$  个人。所以事件  $A$  含有  $n!$  个基本事件。所以

$$P(A) = \frac{n!}{N^n} = \frac{C_1^n \times C_2^n \times \dots \times C_n^n}{N^n} = \frac{12 \times 11 \times \dots \times 3 \times 2}{38 \times 37 \times \dots \times 30 \times 29}$$

(2)  $n$  个人分配到  $n$  间房, 且每间房仅有一人, 故有  $n!$  种分法, 而  $n$  间房未指定, 所以可以从  $N$  间房中任意选  $n$  间房, 故有  $C_N^n$  种方法。所以  $B$  事件含有  $C_N^n \cdot n!$  个基本事件, 所以

$$P(B) = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}$$

(3) 从  $n$  个人中任选  $m$  个人分配到指定的某一房间中去, 有  $C_n^m$  种选法。再把剩下的  $n - m$  个人分配到  $N - 1$  个房间去的分法有  $(N - 1)^{n-m}$  种, 所以  $C$  事件含有  $C_n^m \cdot (N - 1)^{n-m}$  个基本事件。所以

$$P(C) = \frac{C_n^m \cdot (N - 1)^{n-m}}{N^n}$$

**例 1.3.4** 从 6 双不同的鞋子中任取 4 只, 求:

- (1) 其中恰有一双配对的概率;
- (2) 至少有两只鞋子配成一双的概率。

解:(1) 6 双鞋子共有 12 只, 任取 4 只, 总的取法  $C_{12}^4 = 495$  种。为做到恰有一双配对, 先从 6 双鞋中取出一双, 其两只全取出。再从剩下 5 双鞋中取出两双, 其每双中取出一只, 故恰有一双的取法有  $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 = 240$  种。所求概率

$$p = \frac{240}{495} = \frac{16}{33}$$

(2) 设  $B$  为取出的 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双, 则  $\bar{B}$  为取出的 4 只鞋子中没有成双的鞋子。 $\bar{B}$  包含的基本事件数为  $C_6^4 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 = 240$  种, 则

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{240}{495} = 1 - \frac{16}{33} = \frac{17}{33}$$

含义: 先取 4 双, 再从每双中任取一只。此题亦可以这样做: 取出的 4 只鞋子中至少有两只配成一双的取法, 可以分成恰有一双和恰有两双两种不相容的情形, 恰有一双有  $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1$  种(含义: 6 双鞋中任取一双, 再以其余 5 双中任取 2 双, 而这两双中又各取一只); 恰有两双有  $C_6^2 = 15$  种(含义: 取两双中的 4 只)。由加法原理知

$$P(B) = \frac{C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 + C_6^2}{C_{12}^4} = \frac{17}{33}$$

**例 1.3.5** 设有  $r$  个人, 假定每人的生日在一年的 365 天中任一天的概率相等, 求:

- (1) 这  $r$  个人生日各不相同的概率;
- (2) 至少有两个人的生日在同一天的概率。

**解:** (1) 设  $A$  为  $r$  个人的生日各不相同, 考察  $r$  个人的生日是一年中的哪一天(将  $r$  个人的生日分配到 365 天中去), 所以样本空间含有  $365^r$  个基本事件, 而  $A$  为  $r$  个人的生日各不相同,  $A$  有基本事件数  $A_{365}^r$ , 所以

$$P(A) = \frac{A_{365}^r}{365^r} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - r + 1)}{365^r} = \frac{365!}{365^r \cdot (365 - r)!}$$

- (2) 设  $B$  为  $r$  个人中至少有两个人的生日相同, 则

$$P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{365!}{365^r \cdot (365 - r)!}$$

经计算可得如下结果:

个数 $r$	20	23	30	40	50	64	100
$p(B)$	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.9999997

可见, 在有 64 人的班级里“至少有两人的生日在同一天”的概率几乎是 1。

**例 1.3.3 ~ 例 1.3.5** 这类问题在概率论中称为分房问题, 人与房子都有其特性。在处理实际问题时, 要分清什么是“人”, 什么是“房”, 一般不可颠倒。常遇到的分房问题有,  $r$  个人生日问题, 配对问题, 球在盒中分布问题(将球看成人)。这类问题在现代统计物理学中有重要的应用。

**例 1.3.6** 从 1 ~ 100 的整数中随机地取一个数, 试求取到的整数能被 5 或 9 整除的概率。

**解:** 从 1, 2, 3, …, 100 中任取一数, 则样本空间含有 100 个基本事件。设  $A$  为取到的数能被 5 整除,  $B$  为取到的数能被 9 整除。

所求概率为  $P(A \cup B)$ , 在 1 ~ 100 中能被 5 整除的数有  $\left[\frac{100}{5}\right] = 20$  个, 即  $A$  含有 20 个基本事件。

在 1 ~ 100 中能被 9 整除的数有  $\left[\frac{100}{9}\right] = 11$  个, 即  $B$  含有 11 个基本事件。

在 1 ~ 100 中能被 5 整除, 又能被 9 整除的数, 就是能被 45 整除的数的个数为  $\left[\frac{100}{45}\right] = 2$ , 即  $AB$  含有两个基本事件。