钻孔电磁波法理论基础

王惠濂　　黄南晖　编著

武汉地质学院地下物探教研室

1983年3月

前　　言

本书系为78届研究生所开《钻孔电磁波法理论基础》课的部分基本内容。编写成讲义后曾于82年4月在物探所主持的全国钻孔电磁波法训练班上作为教材。该讲义又为福建省电磁波法短训班采用。为便于校内高年级学生及野外工作者研读电磁波方法的理论书刊，现将原稿修改并补充若干内容，暂把它铅印成书。这是一本导论性质的书，可帮助读者在自学理论中首先获得系统的基本概念。在此基础上，读者必能较为顺利地深入阅读内容较深的理论著作。由于本书注重于物理概念，因此亦将有助于实际工作者获得有用的东西。本书尚处于丰富和深入过程中，希读者提出宝贵批评，以便进一步完善此书。

编者谨识

1983年3月

目 录

第一章　有关的基本知识

§1　电磁场论概要

一、矢量分析复习

1．矢量乘积

无向积（点积）：

力$\vec{F}$是矢量，距离$\vec{S}$亦为矢量，功W为FScos θ为非矢量（标量）。今写W为$\vec{F}\cdot\vec{S}$，名为两矢量的无向积或点积。这样，定义无向积为

$$\vec{F}\cdot\vec{S}=FS\cos\theta \tag{1}$$

矢量积（叉积）：

这是如下形式的两矢量的乘积：$\vec{A}\times\vec{B}$。这个结果与无向积不同，相乘之后，为另一矢量。它的数量上的定义为 ABsin θ 。这个量显然是以A、B为两边的平行四边形的面积(图2)。面积确系矢量，因为有正反之分。矢量积的三矢量方向关系是这样规定的：三者依次组成右手关系——伸四指为$\vec{A}$方向，屈四指为$\vec{B}$方向，则伸直的大姆指即为叉积方向（图2中此方向为垂直纸面向下）。

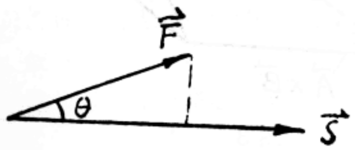

图 1

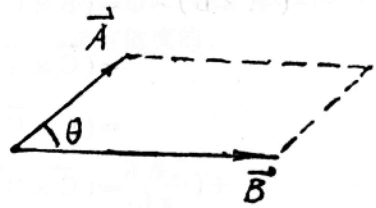

图 2

由此可见，矢量乘积不是代数乘积，而是完全独立的另外一种运算。

2．单位矢量

如果要把上面的矢量积和它的数量上的定义写成矢量等式，则为

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{n}\,AB\sin\theta \tag{2}$$

上式右边$\vec{n}$即为单位矢量。它的数值为1，方向在$\vec{A}\times\vec{B}$的方向上。这种表示方法很有用处。例如，可以把任意矢量$\vec{A}$表为直角坐标系中三个坐标分量之和，此时，就要用到三个单位矢量$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$：

$$\vec{A}=\vec{i}A_x+\vec{j}A_y+\vec{k}A_z$$

$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$分别为x方向y方向和z方向上的单位矢；A_x、A_y、A_z则是矢量$\vec{A}$在x、y、z轴上的分量。

利用上述矢量乘积运算定义，可得直角坐标系各单位矢量间的如下关系：

$$\begin{aligned} &\vec{i}\cdot\vec{i}=1 \qquad &&\vec{i}\cdot\vec{j}=0 \\ &\vec{i}\times\vec{i}=0 \qquad &&\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \end{aligned} \tag{3}$$

于是

$$\begin{aligned} \vec{A}\cdot\vec{B} &= (\vec{i}A_x+\vec{j}A_y+\vec{k}A_z)\cdot(\vec{i}B_x+\vec{j}B_y+\vec{k}B_z) \\ &= \vec{i}\cdot\vec{i}A_xB_y+\vec{j}\cdot\vec{j}A_yB_y+\vec{k}\cdot\vec{k}A_zB_z \\ &= A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \end{aligned} \tag{4}$$

显然仍是非矢量。又

$$\begin{aligned} \vec{A}\times\vec{B} &= \vec{i}(A_yB_z-A_zB_y)+\vec{j}(A_zB_x-A_xB_z)+\vec{k}(A_xB_y-A_yB_x) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

3．三重乘积

以下两式均属三重乘积：

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

对于第一式可写为

$$\begin{aligned} (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} &= (\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A} \\ &= (\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B} \\ &= (\vec{A}\times\vec{C})\cdot\vec{B} \\ &= (\vec{C}\times\vec{B})\cdot\vec{A} \end{aligned} \tag{6}$$

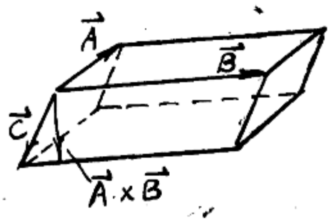

图3

图3所示的体积，即为上述三重乘积。显然这是一种无向积。对于第二式，可写为

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B}-(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A} \tag{7}$$

这是一种有向积。

4．梯度、散度、旋度

这三个名称，都是互不相同的一种矢量运算。

梯度：

这是对标量（非矢量）的一种矢量运算。运算结果为矢量。如果是在空间坐标里做这种运算，则梯度是一种随距离的变化率。例如，地形等高线的梯度即指山坡的陡度，这是一个矢量，其方向为山坡的最陡方向，数值为$\frac{\Delta p}{\Delta r}$，这是水平距离$\Delta r$范围内的高度变化$\Delta p$。若使$\Delta r$很小以至于零，则可得某一点的高度变化率$\frac{dp}{dr}$，这样，空间每一点都可能有不同的

梯度，于是此空间形成不同梯度的矢量“场”。

如果以单位矢量表示，上例的梯度表式可写为

$$p\text{的梯度}=\vec{i}\frac{\partial p}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{8}$$

$\frac{\partial p}{\partial x}$、$\frac{\partial p}{\partial y}$为x向、y向的梯度量值，或梯度的x向、y向分量。梯度也可以三个单位矢来表示，例如温度的梯度就是一个以三维空间来表示的矢量；电位梯度即电场，也是以三个分量描述的三维矢量场。p的梯度常以符号∇p或grad p表示。

梯度既是矢量，因此，如果它是由三个分量表示的量，则这个矢量的量值可以下式计算

$$p\text{的梯度值}=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2} \tag{9}$$

用等号表示时，写为$|\nabla p|$。

散度：

梯度是标量场的变率，散度则是矢量场的变率。在直角坐标里，矢量场有三个分量，所以

$$\vec{A}\text{的散度}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{10}$$

以符号$\nabla\cdot\vec{A}$或div$\vec{A}$表示。这种矢量运算的结果是标量。以一水流为例，设$\vec{A}$为流速，沿x方向，即$\vec{A}=\vec{i}A_x$，则$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{dA_x}{dx}$。现可有两种情形：一为$\frac{dA_x}{dx}=0$，即$A_x$沿x向不变化，这说明流速不变，流入量等于流出量（例如水管中的流水），流水不屯积或水管内无水源。这是无散度的情形，可见，无源即无散度；另一种为$\frac{dA_x}{dx}\neq 0$，即A_x沿x有变化，说明流入之水量与流出之水量不同，水有屯积或有源。是为有源即有散度。由此可见，散度的物理概念可理解为有无源。电荷是电源的一种，因此，在空间里电场是有散度的。

旋度：

这也是矢量场的变率的一种运算，定义为

$$\vec{A}\text{的旋度}=\vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{11}$$

以符号$\nabla\times\vec{A}$或rot$\vec{A}$表示。

旋度和散度的区别，由定义式即可看出：散度是沿场的方向的变率，而旋度则是沿场的垂直方向的变率。例如，在$\vec{A}$的旋度定义式中，对于x向的矢分量A_x，只计其垂直方向即y和z向的变率，而不计x方向的变率；对于A_y，只计x向和z向的变率；A_z则仅计x向和y向的变率。

旋度的意义可从旋涡来理解：例如，在水流的垂直方向上如果没有速度变化，显然不会发生涡流，于是按定义，对于速度矢$\vec{A}$，$\nabla\times\vec{A}=0$；但是，如果在水流的垂直方向有速度变化，例如河床之上不远处，水流就存在着上下方向的不同速度（恰在河床处，流速为零，离开河床流速递变），该处就有涡流发生，于是$\nabla\times\vec{A}\neq 0$。又如，在河道的转弯处，也有

旋涡存在，因为在河面的内外侧，水的流速有差异。当然，河道曲率与流速变率两者的关系在某种条件下，也可以不发生涡流，但这只是特定条件下的一种例外。一般地说，凡有垂直流速方向的速度变率，就一定会发生涡流。

旋度运算结果是矢量，故应对其方向加以规定。旋涡是绕某轴旋转的，故可以旋涡旋转最快的轴向视为旋度的方向。正如$\vec{A}\times\vec{B}$的方向垂直于$\vec{A}$、$\vec{B}$所在面，$\nabla\times\vec{A}$的方向也可按两矢量叉积的右手法则来确定，这里只是把符号∇也当成一矢量而已，即

$$\nabla\times\vec{A}=(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z})\times(\vec{i}A_x+\vec{j}A_y+\vec{k}A_z)$$

按叉积法则，即可得到（11）式。

上式也可写成

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

以便于记忆。

综上所述，可列下表

运算名称	符号	被运算场	结果场
A的梯度	∇A	标量场	矢量场
$\vec{A}$的散度	$\nabla\cdot\vec{A}$	矢量场	标量场
$\vec{A}$的旋度	$\nabla\times\vec{A}$	矢量场	矢量场

以上三种运算均属微分运算。此外尚有一种运算符号∇^2。对标量场w的这种运算，在直角坐标里定义为

$$\nabla^2 W=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (12)$$

这一运算符号实为

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

有的书里以Δ符号表示。

以上四种运算式，在不同坐标系里，表达形式是不同的，应予注意，可参阅有关书籍。

下面列出一些运算恒等式，以便应用，这些等式可自己加以证明：

$$\nabla(v+w)=\nabla v+\nabla w \quad (13)$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}+\vec{B})=\nabla\cdot\vec{A}+\nabla\cdot\vec{B} \quad (14)$$

$$\nabla\times(\vec{A}+\vec{B})=\nabla\times\vec{A}+\nabla\times\vec{B} \quad (15)$$

$$\nabla(vw)=v\nabla w+w\nabla v \quad (16)$$

$$\nabla\cdot(w\vec{A})=w\nabla\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\nabla w \quad (17)$$

$$\nabla\times(w\vec{A})=w\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\times\nabla w \quad (18)$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B} \quad (19)$$

$$\nabla^2\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla\times\nabla\times\vec{A} \quad (20)$$

$$\nabla\times(v\nabla w)=\nabla v\times\nabla w \quad (21)$$

$$\nabla \times \nabla w = 0 \tag{22}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \tag{23}$$

关于矢量的积分运算以及运算式在不同坐标系中的表示，可参阅有关书籍。

二、电磁场复习

1．单位制

电磁学中各物理量的单位，可以由各种不同出发点来建立起各种系统，通常，是如下两种系统：

（1）由厘米、克、秒（CGS）这一力学单位制扩大到电磁学领域而形成三种单位制，即：CGSE——绝对静电单位制、CGSM——绝对电磁单位制、CGS（Gauss）高斯制或未有理化CGS系统。CGSE制只用厘米、克、秒三个基本单位，其各导出单位无专门名称。这个单位制的起始导出方程采用电荷间所受力这一公式；CGSM制则采用电流之间所受的力这一公式，作为起始导出方程，并令$\mu_0=1$（真空中），这个单位制的导出单位，除下述4个名称外，也无专门名称。4个导出单位名称是：奥斯特——磁场H的单位、高斯——磁感应B的单位、马克斯威——磁通单位、吉伯——磁动势的单位：高斯制或未有理化CGS系统是：取CGSE制作为各电学量的单位。而取CGSM制作为各磁学量的单位。在高斯制中，马克斯威方程组的形式变为

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{C}\left(\vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi q$$

由于CGS制中所规定的长度及质量单位太小，使由此推导出的电学单位不适实用，为此，有人（Giorgi）提出改真空中的导磁率由CGS制中的1为10^{-7}，并以米、千克代替厘米、克而形成下述的实用制系统。

（2）由MKS（米千克秒）制这一力学单位制添上一个新的基本单位——安培（电流单位）形成实用制系统，它从电流导出电荷单位，由电荷导出电压单位，再由电压、电荷导出电容单位……。因而出现一系列的单位名称，但它们的因次均可最终化为米、千克、秒、安培四个基本单位。此单位制系统自1935年起被采用为国际标准单位制。

对于以上两个系统，有人（Heaviaide）指出CGS制的不合理性，因为该系统中，4π这一因子不合理地出现在一些不必要的场合，例如，只有在球对称问题中才应出现4π，然而考虑了这个因素，并把它去除以后，却使一些电学量（伏、安、欧）又变为非整数。但如果将CGS制中的真空导磁率由1改为4π，就可以达到合理化而不改变实用单位的值。这样就引出一个“合理化MKS单位制”。在这个单位制中，需使$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$，并且，需符合光速$C=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\approx3\times10^8$米/秒，故还应要求$\varepsilon_0\approx\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}$。这是一个较常用的单位制。在这一单位制中，马克斯威方程组的形式变为

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{D} = q$$

本课程以及野外实际工作中均采用这种单位制系统。

2．关于电场的实验

这是电学的一个基本实验。在带电体Q_0附近，放一同号检验电荷Q，即可发现检验电荷受一外向力$\vec{F}$的作用，此力的量值正比于QQ_0。把带电体通过空间对Q的作用视作"场"，并用$\vec{E}$表示，则此实验所显示的关系可表成

$$\vec{F}\ \alpha\ Q\vec{E}$$

若写成等式，则为

$$\vec{F}=aQ\vec{E}$$

比例系数a决定于各量所选用的单位。若取实用单位，则可使$a=1$，于是

$$\vec{F}=Q\vec{E}$$

这样，

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{Q}$$

可见，作用于检验电荷的场，是单位电荷所受的力，称之电场。无论带电体是大或小、是不变的或变化的电荷，均可在空间形成电场。电场的单位在实用制中是：伏/米。这可直接由上式检验：式中$\vec{F}$的单位在实用制中为牛顿，

图 4

由功和功率的单位可导得

$$牛顿=\frac{瓦\cdot秒}{米}$$

功率单位瓦又可由电流电压乘积IV的单位〔I〕〔V〕导得，即

$$瓦=〔I〕〔V〕=\frac{库伦}{秒}\cdot伏$$

库伦是电量的实用单位。因此

$$〔E〕=\frac{〔F〕}{〔Q〕}=\frac{瓦\cdot秒/米}{库伦}=\frac{\frac{库伦}{秒}\cdot伏\cdot秒/米}{库伦}=伏/米$$

3．关于磁场的实验

这个实验阐明一带电流的导体L，在磁铁（或另一带电流的导体）附近受到力$\vec{F}$作用的事实，由此发现磁场的存在。

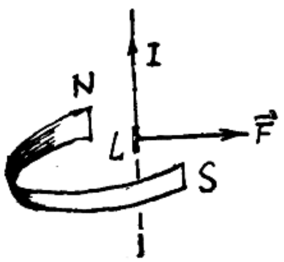

图 5

实验表明，在图5的布置条件下，载有电流I的导体L所受的力，垂直于导体和磁极NS所在的平面向外。如把磁铁的作用以矢量$\vec{B}$表示（从N指向S)，导体L向上以$\vec{L}$表示，则$\vec{F}$的方向恰符合$\vec{L}$、$\vec{B}$两矢叉乘的方向，而力的大小则与电流I、导体长度以及磁铁的强弱成正比，以关系式表示即为

$$\vec{F}=I\vec{L}\times\vec{B}$$

式中，比例系数已因采用实用单位而取为1。显然，磁铁通过空间作用于带电流的导体，它应是一种场，称为磁场，这里用$\vec{B}$表示*。它是单位长度导体上载有单位电流时所受之力，其单位为：韦伯/米²。同样可由上式导得：

$$〔B〕=\frac{〔F〕}{〔IL〕}=\frac{瓦\cdot秒/米}{安\cdot米}=\frac{伏\cdot秒}{米^2}=\frac{安}{米}\cdot\frac{伏\cdot秒/安}{米}$$

* 磁场以$\vec{B}$表示，B习惯上称为磁感应。它是传导电流和磁介质中分子电流所产生的总磁场。$\vec{H}$则直接和它的源（传导电流）相关，而与磁场存在处的均匀介质的性质无关。

由上式可知，韦伯这个单位名称定义为：伏·秒。由于磁场H的导出单位为：安/米，故根据上式和

$$[B]=[H][\mu]$$

可知，导磁率的单位应为：伏·秒/安/米。在实用制中称之为：亨/米。

4．磁场和电场之间的关系

这是对变动磁场的一个实验，这个实验表明：变动磁场附近，有电动势存在。用式子表示是

$$\varepsilon=-\frac{d\phi}{dt}$$

ϕ是磁感应$\vec{B}$和磁场中所围的面积$\vec{S}$两者的点积，称做磁通量。ε为沿此面边缘的电动势。这就是有名的感应定律，或称法拉第定律。如果沿整个边缘设置导线，则在导线中即有电流发生。式中的负号是实验中所观察到的现象，即磁通量随时间增大时，线环中产生的电动势要阻止磁通量的增大。例如，图6中$\frac{d\phi}{dt}$为正，则电动势方向即如图中所示（按右手法则，环中沿电动势方向的电流产生反向的磁通量）。

现在来导出$\vec{B}$、$\vec{E}$之间的关系。设导线围成如图7的规则矩形，并在xy面上。与此面相垂直的磁感应分量为B_z，于是上式可写成

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4\\&=E_x\Delta x+\left(E_y+\frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y+\left(E_x+\frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta y\right)(-\Delta x)+\\&\quad+E_y(-\Delta y)=\frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x\Delta y-\frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta x\Delta y=-\frac{d}{dt}B_z\cdot\Delta x\Delta y\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{dB_z}{dt}$$

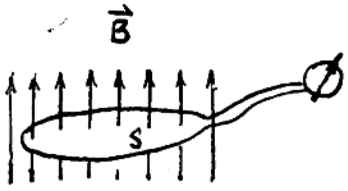

图6

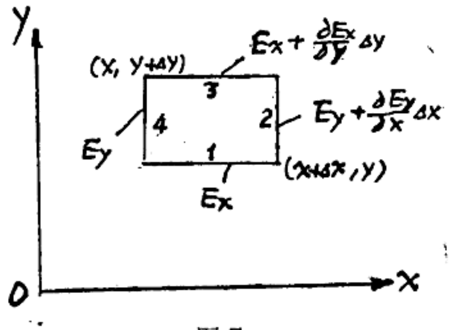

图7

由（11）式可知，此即为

$$(\nabla\times\vec{E})_z=-\frac{dB_z}{dt}$$

对于非xy面上的一般线环，尚可写出B_x和B_y两分量作用的关系式。最后，得出总结果为

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{d\vec{B}}{dt}$$

上述推导中，如设线环很小，则所得结果可用于非均匀的磁场中，于是上式写做

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

这就是磁场与电场两者之间的关系，它是法拉第定律的微分表示式。

5．关于磁场来源的实验

沿一闭合环路L（图9）测量$\vec{H}\cdot\Delta\vec{l}$，发现

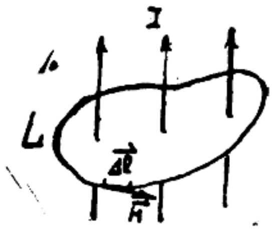

图8

$$\sum_{i}^{L}\vec{H}_i\cdot\Delta\vec{l}_i=I$$

I为穿过L环路的电流总值。即沿L一周把所分割的小段上的磁场测量值与该段距离矢的点积累加起来，等于环内电流总值。这里Δl_i可取足够小，以致在这一小段上，$\vec{H}$都可认为相同。如果按前一实验计算环流的办法来计算上式左式，使之分别等于电流的三个分量，并且取环面很小，则总结果可写成

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{i}$$

$\vec{i}$为环面内单位面积的电流。此式表明：电流产生磁场。这就是安培定律的微分形式。

根据以上四个基本实验，可把电磁场规律总结在如下四个方程中，这四个方程即马克斯威方程组：

$$\begin{aligned}&\nabla\times\vec{H}=\vec{i}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\&\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\&\nabla\cdot\vec{B}=0\\&\nabla\cdot\vec{D}=q\end{aligned}\qquad(24)$$

这个方程组十分重要，现再综述一下：

第一式系由安培定律推广而来。该式右边第二项也是一种电流，叫做位移电流。它是介质（非导体）中电场变化所形成的一种电流，证明如下：

先研究$\vec{D}\cdot\vec{S}$值。这个值叫做电通量。设S为一球面，其半径为R，则

$$\begin{aligned}\vec{D}\cdot\vec{S}&=\varepsilon E\cdot4\pi R^2\\&=\varepsilon\frac{Q}{\varepsilon4\pi R^2}\cdot4\pi R^2=Q\end{aligned}$$

ε为介质的介电常数；Q为球内的电荷，式中设其集中于球心，故其在R处产生的电场为$Q/\varepsilon4\pi R^2$。上式表明，球面的总电通量等于球内的总电荷。

再看电荷与电流的关系，已知

$$I=\frac{dQ}{dt}$$

利用上面的结果，则

$$I=\frac{dQ}{dt}=\frac{d(\vec{D}\cdot\vec{S})}{dt}=\frac{d\vec{D}}{dt}\cdot\vec{S}$$

设电流密度为 $\vec{i}$，则左式又为 $\vec{i}\cdot\vec{s}$，于是

$$\vec{i}=\frac{d\vec{D}}{dt}$$

此即表明 $\frac{d\vec{D}}{dt}$ 是电流。

然而在原来的安培定律中，并未包含这个位移电流。马克斯威假设这一电流也是产生磁场的原因。后来，实验证实了这一假设：在没有传导电流的空间，由于电场的变化，却有磁场形成。

这样，马克斯威方程组第一式的物理意义很明确，即安培传导电流及位移电流均是引起磁场的原因。或者说，电场变化产生磁场。

方程组的第二式则是感应定律，物理意义是：磁场的变化产生电场。

至于方程组的第四式，上面已证明：电通量等于所包之电荷。现在要证明电通密度的散度等于电荷体积密度。

为了证明这一问题，需要计算图 9 中小六面体内净出来的通量。

在前后两面上，净出来的通量为

$$(D_x+\frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x)\Delta y\Delta z-D_x\Delta y\Delta z$$

即

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

在左右两面上，净出来的通量则为

$$(D_y+\frac{dD_y}{\partial y}\Delta y)\Delta x\Delta z-D_y\Delta x\Delta y$$

即

$$\frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$

在上下两面上，净出来的通量为

$$(D_z+\frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta z)\Delta x\Delta y-D_z\Delta x\Delta y$$

即

$$\frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

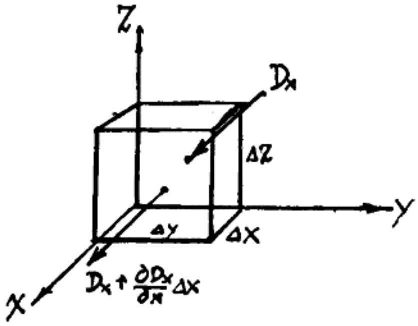

图 9

所以总的出来的通量为

$$(\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z})\Delta x\Delta y\Delta z$$

它应等于小六面体内的总电荷 $q\cdot\Delta x\Delta y\Delta z$。q为小六面体内的电荷体密度。于是由 (10)，可得

$$\nabla\cdot\vec{D}=q$$

此即方程组的第四式。它说明，电场有源，源为电荷，电通线开始于正电荷，终止于负电荷。电通密度D直接与它的源(自由电荷)相关，而与电荷所在的均匀介质的特性无关。

方程组的第三式是$\nabla \cdot \vec{B}=0$。按上述概念，应是：磁场无磁荷源。注意，这里仅指与电荷对应的那种源。

这四个式子把电、磁场及其关系都包括了，这是实验事实的理论总结，其意义是显然的。方程组的意义还在于由它导出的波方程，是解决电磁场（包括静的和交变的）问题的根本方程。

§2 波动基础

平静的水面落入一石块或吹来一阵风，都会引起水面起伏，形成水波。空间或介质中放入一电或磁振动源，同样也将造成波的传播，前者是机械波，是水分子振动的一种传递，后者则是电磁波，是电磁场量变动的传播。两者的物理分析十分相似。下面即就质点振动的分析，来讲述其过程和数学描述式。

一、质点的简谐振动

这是一种特殊的园周运动，质点沿园周运动，但讨论的是质点投影到通过园心的x轴上的情况（图10）。显然，质点的投影是以园心为中心在x轴上来回摆动的运动，即简谐振动。这种运动可用如下式子描述

$$A=|A|\cos\omega t$$

A为某时刻的振幅，|A|为最大振幅；ω为园周运动的角频率或称园频率，即单位时间内质点所扫过的角度。因此，$\omega=2\pi f$。f为每秒钟内重复运动的次数即频率。上式随时间变化的图形如图11。上式还可写成复指数函数形式（以后常用此形式表示）：

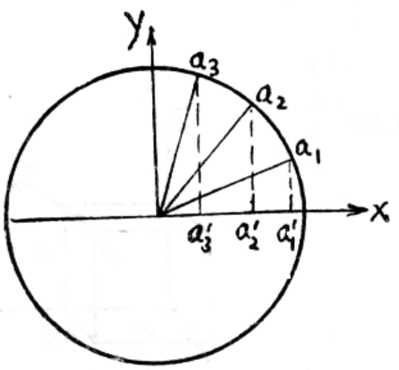

图10

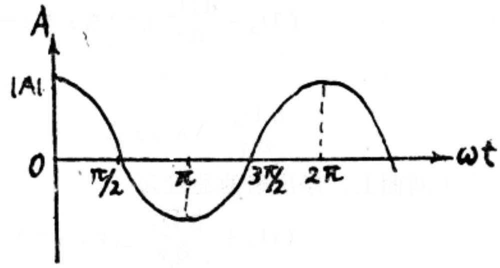

图11

$$A=\mathrm{Re}\{|A|e^{j\omega t}\}$$

j为虚数符号；Re为实部符号。

二、振动的传播

上面关于振动的数学描述，只涉及时间变化。但振动不仅仅在石块下落处发生，它还会随时间向外传播开来。如果同时考虑空间变化，则振动的描述应改写为

$$|A|\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)$$

这表明，在r处的振动，是该处t时刻以前$t-\frac{r}{v}$时刻的振动。显然，v是振动状态在空间的

传播速度。

现把式中相角改写一下：

$$\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)=\omega t-\frac{\omega r}{v}=\omega t-\frac{2\pi f r}{\lambda f}=\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r=\omega t-kr$$

这是两个相位角（弧度）之差，第二项中之k可称为相位系数，即单位距离的相角（弧度/米）。kr为r距离内相角的变化。k或称为传播常数，因为它描述了波的传播特性（波长λ、波速v）。后一种名称是以后常用的。以后会看到，前一种名称仅限于无损耗空间。

现进一步把上面表式的变动部分写成指数函数形式

$$\cos(\omega t-kr)=\mathrm{Re}[e^{j(\omega t-kr)}]$$

或

$$\sin(\omega t-kr)=\mathrm{Im}[e^{j(\omega t-kr)}]$$

Im是虚部符号。表述式既可以复指数函数的实部表述，也可以复指数函数的虚部表述。记住这一点，就可把表述式直接写成指数函数$e^{j(\omega t-kr)}$，这样可便于运算。此外，对于某一固定频率的振动，还可移去其中的$e^{j\omega t}$部分（随时间变化部分）而只表以空间变化部分e^{-jkr}。这就是以后以及别的书上常使用的表示式，称做单位振幅的基本波函数。指数幂的"—"号包含如下物理意义：它表示向着距离r增大的正方向前进的"正向行波"。因为，观察波的行进，常常以通过观察某一振幅在空间的移动来了解。如果是正向行进，则当时间增加时，正向距离也增大，而振幅未变，即某一定振幅以一定的速度正向移动。显然，相角的一二两项符号相反，可满足此要求。因此，$|A|e^{j(\omega t-kr)}$是正向行波，$e^{-j(\omega t-kr)}$即$e^{j(-\omega t+kr)}$也是正向行波，而$e^{j(\omega t+kr)}$及$e^{j(-\omega t-kr)}$则为反向行波。可见，对应于$e^{j\omega t}$，e^{-jkr}为正向、e^{jkr}为反向；对应于$e^{-j\omega t}$，e^{jkr}为正向而e^{-jkr}为反向。$e^{\pm j\omega t}$是两种不同表示方式的振动源的时间因子，各书的取用按作者习惯，不尽相同，应予注意。

三、波方程及其解

马克斯威方程组总结了电磁现象的规律。它们之间的进一步内在联系，还可归结为一个描述空间一切电磁场规律的方程——波方程。

现在来推导这个方程。先重写出马氏方程组

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{i}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=q$$

再予以具体化。设电、磁场的形式为*

$$\vec{E}=|\vec{E}|e^{-j\omega t} \qquad \vec{H}=|\vec{H}|e^{-j\omega t}$$

则上述方程组即化为：

$$\begin{aligned}&\nabla\times|\vec{H}|=\sigma|\vec{E}|-j\omega\varepsilon|\vec{E}|\\&\nabla\times|\vec{E}|=j\omega\mu|\vec{H}|\\&\nabla\cdot|\vec{H}|=0\\&\nabla\cdot|\vec{E}|=q/\varepsilon\end{aligned}\qquad(25)$$

---

* $\vec{E}$，$\vec{H}$表示场量与时间无关，只是空间位置的函数。

这个方程组的场量与时间无关，是以后常用的方程组。为便于书写，今后去掉模的符号而直接表以$\vec{E}$、$\vec{H}$。当然这样写，不应理解为瞬时值。上式中，σ为介质的电导率，单位为姆欧/米；ε为介质的介电常数，单位为*法/米。$\varepsilon=\varepsilon'\varepsilon_0$，$\varepsilon'$为相对介电常数、$\varepsilon_0$为真空中之值，在实用制中$\varepsilon_0=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}$；$\mu$为介质的导磁系数，单位为*亨/米，它等于$\mu'\mu_0$，$\mu'$为相对值、$\mu_0$为真空中之值，在实用制中$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$。

如果讨论的是无源区域，则方程组的第四式为零；如果除电荷源外，尚有电流，则除保持方程组第四式右式原有值外，第一式右式还应补入一项：$\vec{i}_{源}$

现从上述简化方程来推导波方程：

取第二式的旋度，得

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=j\omega\mu(\sigma-j\omega\varepsilon)\vec{E}=(j\omega\mu\sigma+\omega^2\mu\varepsilon)\vec{E}$$

$$=\omega^2\mu\varepsilon(1+\frac{j\sigma}{\omega\varepsilon})\vec{E}=\omega^2\mu\epsilon\vec{E}$$

这里，$\epsilon=\varepsilon(1+\frac{j\sigma}{\varepsilon\omega})$称做复介电常数，它显然是由于介质有导电性，即$\sigma\neq0$。如果在空气或真空中，则$\sigma=0$，于是$\epsilon=\varepsilon$，而此时$\mu'=1$、$\varepsilon'=1$故$\mu\epsilon=\mu_0\varepsilon_0=4\pi\times10^{-7}\cdot\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}=\frac{1}{9\times10^{16}}=\frac{1}{c^2}$是为光速平方的倒数，可见，在上式右边最后一个等式中可以把$\mu\epsilon$看做波传播速度平方之倒数。这样，最后一个等式按前述可写为$k^2\vec{E}$，即

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\omega^2\mu\epsilon\vec{E}=k^2\vec{E}$$

此时之k与前不同，是一个复数，它就是今后常遇到的传播常数。

同样，若取马氏方程组第一式的旋度，也可得出一个形式相似的方程。这样，便得

$$\begin{aligned}&\nabla\times\nabla\times\vec{E}-k^2\vec{E}=0\\&\nabla\times\nabla\times\vec{H}-k^2\vec{H}=0\end{aligned}\qquad(26)$$

利用矢量运算恒等式(20)，可把上式化为

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}-\nabla(\nabla\cdot\vec{E})=0$$

$$\nabla^2\vec{H}+k^2\vec{E}-\nabla(\nabla\cdot\vec{H})=0$$

利用无源时的马氏方程组第三、四方程，就得

$$\begin{aligned}&\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{H}=0\\&\nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0\end{aligned}\qquad(27)$$

这就是关于$\vec{E}$和$\vec{H}$的波方程。两方程的形式一样，只需解一个方程即可。于是，根据不同的边界条件，就可由上方程解出无源区域不同问题的场空间分布。

下面举一个简单的例子。

求解直角坐标系中均匀无限介质的无源区波方程。设场量$\vec{E}$只有x向分量，且不依x、y而变。

---

*法为电容单位，其因次可由C=Q/V导出，所以：法=库/伏=安秒/伏，于是由方程第组四式可导得〔ε〕=法/米。关于〔μ〕，前面已导出，见本章§1．二、3．

〔解〕 $\because \vec{E}=\vec{i}E_x$，$\therefore$由波方程（(27)的第一式）

$$\nabla^2 E_x \vec{i}+k^2 E_x \vec{i}=0$$

此式可写为

$$\nabla^2 E_x+k^2 E_x=0$$

由矢量分析公式（12），上式为

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+k^2 E_x=0$$

由于E_x不依x、y而变，故上式中一二两项为零，于是得

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2}+k^2 E_x=0 \tag{28}$$

此方程的特解是e^{jkz}及e^{-jkz}，故一般解应为其组合，即

$$E_x=E_0 e^{jkz}+E_0' e^{-jkz}$$

E_0及E_0'为积分常数。由前面讨论可知，这是两个Z方向的行波。由于源的时间因子是$e^{-j\omega t}$，故第一项是正向行波，第二项则是反向行波。由于本问题是均匀无限介质，反向行波不存在，故只有第一项。于是本问题的解（电场部分）即为

$$E_x=E_0 e^{jkz} \tag{29}$$

其瞬时解只需乘以时间因子$e^{-j\omega t}$即得。

现研究一下这个波的特性：

（1）此波系正Z向行进，即沿Z向相位发生变化；

（2）凡Z值相同之处，相位相同。即等相条件是Z＝常数。这是一个与Z垂直的平面，等相面是平面，故称此波为平面波。

（3）在等相面上，E_x相同。即等相面上，振幅相等。这是"均匀平面波"。

（4）k是复数时，可写做$k=\alpha+j\beta$，于是

$$E_x=E_0 e^{j\alpha z}\cdot e^{-\beta z}$$

后一因子随Z而减小，所以E_x呈Z向衰减。即在波的行进方向上有能量吸收。显然这是因为$\sigma\neq 0$所引起。可见，凡是介质有导电性时，总伴随有吸收。地下岩石就是如此。上式前一因子是相位变化因子，如前所述$\alpha=\frac{2\pi}{\lambda}$，而$\lambda f=v$，所以$\alpha$值决定$\lambda$及v值。

（5）由$(\alpha+j\beta)^2=\omega^2\mu\in=\omega^2\mu\varepsilon(1+\frac{j\sigma}{\omega\varepsilon})$可解出$\alpha$、$\beta$值。其结果是

$$\begin{aligned}\alpha&=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]}\\ \beta&=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]}\end{aligned} \tag{30}$$

上式说明α、β值与空间介质的ε、μ、σ有关，此外还与波源的频率有关。当$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}<<1$时，$\alpha\approx\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$、$\beta\approx 0$；当$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>1$时，$\alpha=\beta\approx\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$。$\sigma/\omega\varepsilon$实为传导电流与位移电流之比。前者是传导电流相对很小的情形，后者则为传导电流占主要成分的情形。一般情形下，α、β均有值，它们受介质物性影响的规律在下一章中详述。